

Teoremi di localizzazione degli autovalori

I Teorema di Gerschgorin. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Gli autovalori di A stanno nell'unione dei cerchi di Gerschgorin K_i , $i = 1, \dots, n$, ove

$$K_i = \left\{ z \in \mathcal{C}, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, n, j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

K_i è un cerchio di centro a_{ii} e raggio $\sum_{j=1, n, j \neq i} |a_{ij}|$.

Poichè gli autovalori di A coincidono con gli autovalori di A^T , segue che gli autovalori di A stanno anche in $\cup H_i$, ove $H_i = \left\{ z, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, n, j \neq i} |a_{ji}| \right\}$ e dunque a $(\cup K_i) \cap (\cup H_i)$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

K_1 ha centro 0 e raggio 3

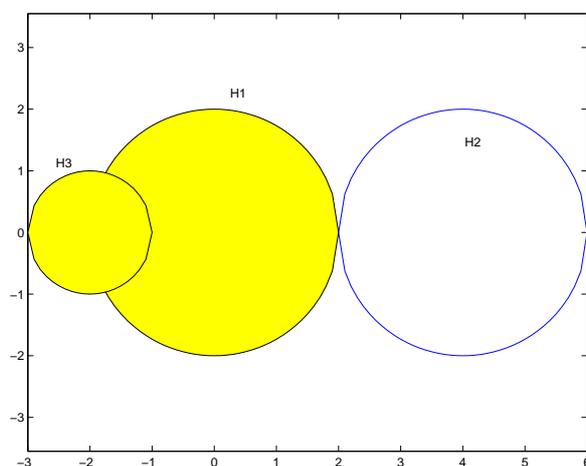
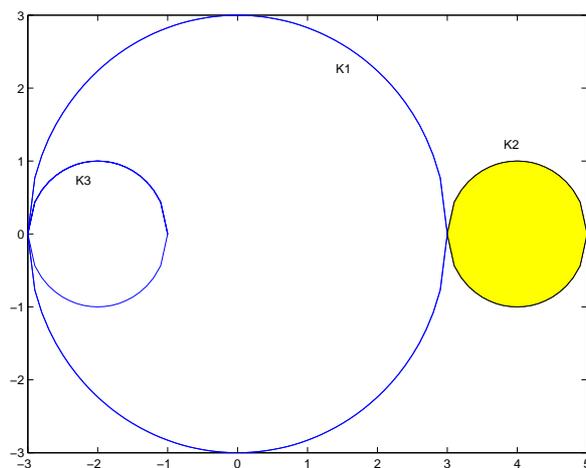
H_1 ha centro 0 e raggio 2

K_2 ha centro 4 e raggio 1

H_2 ha centro 4 e raggio 2

K_3 ha centro -2 e raggio 1

H_3 ha centro -2 e raggio 1



Il Teorema di Gerschgorin. Se l'unione M_1 di r cerchi di Gerschgorin è disgiunta dall'unione M_2 dei rimanenti $n - r$, allora r autovalori di A appartengono a M_1 e $n - r$ appartengono a M_2 .

Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n . A si dice riducibile se esiste una matrice di permutazione P tale che

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

con $0 < k < n$. Se non esiste P siffatto, A è irriducibile.

La permutazione P non è unica. Se la matrice A è associata a un sistema e se essa è riducibile, si può sempre ridurre la soluzione del sistema di ordine n alla risoluzione di due sistemi di ordine k e $n - k$:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ PAP^T Px &= Pb \end{aligned}$$

Posto $Px = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ e $Pb = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, si ha:

$$\begin{aligned} A_{11}y_1 + A_{12}y_2 &= c_1 \\ A_{22}y_2 &= c_2 \end{aligned}$$

Pertanto si risolve il secondo sistema determinando y_2 e poi, sostituendo nel primo sistema, si ottiene y_1 . Permutando opportunamente le componenti si ottiene $x = P^T y$.

Per vedere se una matrice è riducibile si introduce la seguente definizione.

Grafo orientato associato a una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: è costituito da n nodi $(1, 2, \dots, n)$ tale che per ogni $a_{ij} \neq 0$ esiste un arco orientato che collega il nodo i al nodo j .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Cammino orientato tra i nodi i e j : successione di archi orientati $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1})$ con $i_1 = i$ e $i_{k+1} = j$ consecutivi. La lunghezza del cammino è k .

Grafo orientato strettamente connesso: per ogni i, j con $i \neq j$ esiste un cammino orientato che connette i e j .

Caratterizzazione delle matrici irriducibili

A è irriducibile \Leftrightarrow il grafo associato è strettamente connesso.

ESEMPIO. La seguente matrice è irriducibile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La seguente matrice è riducibile (il nodo 2 non è connesso

al nodo 1 da nessun cammino):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrici tridiagonali: irriducibili $\Leftrightarrow \beta_i \neq 0, i = 1, n - 1, \gamma_i \neq 0, i = 2, n$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \beta_{n-1} & \\ & & \gamma_n & \alpha_n & \end{pmatrix}$$

III Teorema di Gerschgorin. Se A è una matrice quadrata di ordine n irriducibile e se esiste un autovalore di A che appartiene alla frontiera dell'unione dei cerchi di Gerschgorin, allora l'autovalore appartiene alla frontiera di ogni cerchio.

Conseguenze

- Se la matrice A è strettamente diagonale dominante per righe o per colonne oppure irriducibilmente diagonale dominante (ossia irriducibile e diagonale dominante con almeno una riga o una colonna per cui vale la diseuguaglianza in senso stretto), allora A è non singolare.

(Se A è strettamente diagonale dominante per righe, qualsiasi cerchio K_i non contiene l'origine; pertanto gli autovalori di A sono diversi da 0 e A è non singolare. Se A è irriducibilmente diagonale dominante, 0 può appartenere alla frontiera dell' $\cup K_i$. Ma in tal caso, poichè A è irriducibile, se 0 è autovalore, 0 deve appartenere alla frontiera di ogni K_i e c'è almeno un cerchio che non lo contiene).

- Se inoltre $a_{ii} > 0$, $Re(\lambda_i(A)) > 0$.
- Inoltre, se è A simmetrica, allora A è simmetrica definita positiva.

(Infatti gli autovalori di A hanno parte reale positiva e sono reali. Una matrice con autovalori reali positivi è simmetrica definita positiva).

Di particolare importanza è la successione delle potenze di una matrice quadrata.

Definizione. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice convergente se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, ove con 0 si intende la matrice nulla. Equivalentemente A è convergente se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ o $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^k)_{ij} = 0$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 3/16 & 1/8 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 1/8 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1/2^k & 0 \\ k/2^{k+1} & 1/2^k \end{pmatrix} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$$

Teorema (Hirsh). Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Per ogni norma naturale

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

ove $\rho(A) = \max_{i=1,n} |\lambda_i(A)|$ è il raggio spettrale della matrice A . Inoltre per ogni $\epsilon > 0$ esiste una norma naturale per cui

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$$

Teorema. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A è convergente $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Dimostrazione. Se A è convergente, $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste ν tale che per ogni $k > \nu$, $\|A^k\| < \epsilon$. Poichè $\rho(A^k) < \epsilon$, $\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i(A^k)| = \max_i |\lambda_i(A)^k| = \max_i |\lambda_i(A)|^k = \rho(A)^k$, segue che $\rho(A)^k < \epsilon$. Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A)^k = 0$, segue $\rho(A) < 1$.

Viceversa, dato μ tale che $\rho(A) + \mu < 1$, si ha che esiste una norma naturale per cui $\|A\| \leq \rho(A) + \mu < 1$.

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \leq (\rho(A) + \mu)^k$$

Poichè $\lim_{k \rightarrow \infty} (\rho(A) + \mu)^k = 0$, segue $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ e A è convergente.

Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1. A è convergente;
2. $\|A^k\| \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$;
3. $\rho(A) < 1$;
4. $A^k x \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
5. $I - A$ è non singolare e la serie di Neumann $\sum_{i=0}^{\infty} A^i = (I - A)^{-1}$ è convergente.

Metodi iterativi

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad b \in \mathbb{R}^n \quad \det(A) \neq 0$$

A partire da una qualunque approssimazione iniziale x^0 alla soluzione, si costruisce una successione di approssimazioni $\{x^k\}$, via via migliori, che per k tendente all'infinito convergono alla soluzione esatta $x^* = A^{-1}b$.

Poichè ci si arresta a un passo \bar{k} , occorre valutare l'errore di troncamento $e^{\bar{k}} = x^{\bar{k}} - x^*$.

A differenza dei metodi diretti, consentono di mantenere la struttura di una matrice e quindi di usare tecniche di memorizzazione compatta per matrici sparse (si vedano le librerie ITPACK ed ELLPACK). Si applicano quando la matrice A è sparsa e di grandi dimensioni.

La complessità di una iterazione è pari al costo del prodotto matrice vettore (è bassa per matrici sparse). La velocità di convergenza è solo lineare, per cui spesso necessitano di tecniche di accelerazione per minimizzare le iterazioni necessarie ad ottenere l'approssimazione entro la tolleranza richiesta.

Matrici con struttura sparsa si incontrano nella risoluzione di equazioni differenziali con condizioni ai limiti risolte con la tecnica delle differenze finite o degli elementi finiti.

Costruzione di un metodo iterativo

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad b \in \mathbb{R}^n \quad \det(A) \neq 0$$

Sia $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare. Il sistema è equivalente a

$$Mx = Mx + (b - Ax)$$

$$x = (I - M^{-1}A)x + M^{-1}b$$

$$x = Gx + c$$

ove $G = I - M^{-1}A$ e $c = M^{-1}b$.

La seconda formulazione permette di innescare un procedimento iterativo:

$$x^{k+1} = Gx^k + c$$

con x^0 qualunque, o equivalentemente

$$x^{k+1} = x^k + M^{-1}(b - Ax^k) = x^k + M^{-1}r_k$$

G si dice matrice di iterazione; r_k è il residuo. Si tratta di un metodo lineare (x^{k+1} dipende linearmente da x^k) stazionario (G e c sono costanti) del I ordine (x^{k+1} dipende solo da x^k).

Definizione. Un metodo iterativo è convergente se per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$ iniziale la successione $\{x^k\}$ generata da

$$x^{k+1} = Gx^k + c$$

converge per $k \rightarrow \infty$.

Se A e M sono non singolari e se $\{x^k\}$ converge a \bar{x} a partire da ogni x^0 iniziale, allora \bar{x} è l'unica soluzione del sistema $Ax = b$, ossia il metodo iterativo è consistente.

Per studiare la convergenza si introduce l'errore di troncamento al passo k :

$$e^k = x^k - x^*$$

Si nota che $r_k = b - Ax^k = A(x^* - x^k) = -Ae^k$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè $\{x^k\} \rightarrow x^*$ per $k \rightarrow \infty$ per ogni x^0 è che $\{e^k\} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ per ogni e^0 o anche $\{r_k\} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ per ogni r_0 .

$$e^k = x^k - x^* = Gx^{k-1} + c - Gx^* - c = G(x^{k-1} - x^*) = Ge^{k-1}$$

$$e^k = Ge^{k-1} = G^2e^{k-2} = \dots = G^ke^0$$

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinchè un metodo iterativo sia convergente è che $\rho(G) < 1$.

Dimostrazione. Il metodo converge se e solo se $\lim_{k \rightarrow \infty} e^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} G^ke^0 = 0$ per ogni e^0 , $\Leftrightarrow G$ è convergente $\Leftrightarrow \rho(G) < 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0 \quad \forall r_0 \\ \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (-Ae^k) = 0 \quad \forall e^0 \\ \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} e^k = 0 \quad \forall e^0 \end{aligned}$$

Condizione sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo è che $\|G\| < 1$.

Condizioni necessarie per la convergenza di un metodo iterativo sono $|\det(G)| < 1$ e $|\text{traccia}(G)| < n$.

Velocità di convergenza

Da $e^k = G^k e^0$, segue che

$$\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \|G^k\|$$

$\|G^k\|$ misura la diminuzione iniziale dell'errore dopo k passi.

La riduzione media per passo dopo k passi è

$$\left(\frac{\|e^k\|}{\|e^{k-1}\|} \frac{\|e^{k-1}\|}{\|e^{k-2}\|} \cdots \frac{\|e^1\|}{\|e^0\|} \right)^{1/k} \leq \|G^k\|^{1/k}$$

Se k è sufficientemente grande per cui $\|G^k\| < 1$, allora si dice velocità di convergenza in k passi la quantità

$$\mathcal{R}(G^k) = -\log_e \|G^k\|^{1/k}$$

Poichè $\left(\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|}\right)^{1/k} \leq \|G^k\|^{1/k} = e^{\log_e \|G^k\|^{1/k}} = e^{-\mathcal{R}(G^k)}$ segue che il reciproco della velocità di convergenza in k passi è il numero di passi che occorre fare per ridurre l'errore iniziale di $1/e$; infatti, posto $k = 1/\mathcal{R}(G^k)$,

$$\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \frac{1}{e}$$

Tuttavia è impossibile confrontare due metodi sulla base della velocità di convergenza in k passi poichè può succedere che

$$\|G_1^k\| \leq \|G_2^k\| \quad \text{per } k = k_1 \text{ prefissato}$$

e, poi,

$$\|G_2^k\| \leq \|G_1^k\| \quad \text{per } k = k_2 \text{ prefissato, con } k_1 \ll k_2$$

ove G_1 e G_2 sono matrici di iterazione di due metodi iterativi.

Esempio. Siano

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$G_1^k = \begin{pmatrix} 0.5^k & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{pmatrix} \quad G_2^k = \begin{pmatrix} 0.5^k & k0.5^{k+1} \\ 0 & 0.5^k \end{pmatrix}$$

Utilizzando la norma ∞ risulta

$$\|G_1^k\|_\infty = 0.6^k \quad \|G_2^k\|_\infty = (2 + k)0.5^{k+1}.$$

Per $k \leq 9$, $\|G_1^k\| < \|G_2^k\|$, mentre per $k \geq 10$, $\|G_1^k\| > \|G_2^k\|$.

Il confronto tra due metodi può essere fatto solo asintoticamente.

Si dimostra che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \right)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\|^{1/k} = \rho(G)$$

Si dice velocità asintotica di convergenza la quantità:

$$\mathcal{R}_\infty(G) = -\log_e \rho(G)$$

$\frac{1}{\mathcal{R}_\infty(G)}$ è una stima del numero di passi che occorre fare per ridurre l'errore iniziale di $1/e$.

$$\rho(G)^k \approx \frac{1}{e} \rightarrow k \approx -\frac{1}{\log_e \rho(G)} = \frac{1}{\mathcal{R}_\infty(G)}.$$

Arresto di un procedimento iterativo

- Da

$$\begin{aligned}x^{k+1} - x^k &= Gx^k + c - x^k = Gx^k + (x^* - Gx^*) - x^k = \\ &= (G - I)(x^k - x^*)\end{aligned}$$

segue che, poichè $\rho(G) < 1$ e $G - I$ è non singolare,

$$\|x^k - x^*\| \leq \|(I - G)^{-1}\| \|x^{k+1} - x^k\|$$

Ci si arresta se $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$. Ciò non garantisce che $\|x^k - x^*\|$ sia piccolo, poichè dipende da $\|(I - G)^{-1}\|$.

- Da $\frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^*\|} \leq k(A) \frac{\|r_{k+1}\|}{\|b\|}$, ci si può arrestare se $\frac{\|r_{k+1}\|}{\|b\|} < \epsilon$. Se la matrice A non ha $k(A)$ troppo grande, x^{k+1} è accettabile come soluzione.

In compenso i metodi non necessitano di analisi di errore di arrotondamento poichè ogni x^k può essere considerato come iterato iniziale e gli errori influiscono solo sull'ultima iterazione.

Metodi particolari

$$\begin{aligned}A &= M - N \\Mx^{k+1} &= Nx^k + b \\x^{k+1} &= M^{-1}Nx^k + M^{-1}b = (I - M^{-1}A)x^k + M^{-1}b \\x^{k+1} &= Gx^k + c\end{aligned}$$

ove M è una matrice non singolare facile da risolvere, $G = M^{-1}N = (I - M^{-1}A)$, $c = M^{-1}b$.

Una particolare decomposizione

$$\begin{aligned}A &= D - L - U \\A &= \begin{pmatrix} & & -U \\ & D & \\ -L & & \end{pmatrix} \\D &= \text{diag}(a_{ii}) \\L &= \begin{cases} -a_{ij} & j < i \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\U &= \begin{cases} -a_{ij} & j > i \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}\end{aligned}$$

Metodo di Jacobi (o metodo degli spostamenti simultanei)

$$A = M - N = D - (L + U)$$

$$M = D \quad N = L + U$$

$$x^{k+1} = D^{-1}(L + U)x^k + D^{-1}b$$

La matrice di iterazione, detta matrice di Jacobi è data da $J = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$.

Se $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, n$, allora

$$x_i^{k+1} = \frac{\left(-\sum_{j=1, n; j \neq i} a_{ij} x_j^k + b_i\right)}{a_{ii}}$$

$$\begin{aligned} J = D^{-1}(L + U) &= \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & & \\ & 1/a_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & 1/a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ -a_{n1}/a_{nn} & \dots & -a_{nn-1}/a_{nn} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esempio.

$$\begin{aligned}
 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\
 -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\
 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\
 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
 \end{aligned}$$

La soluzione esatta vale $x^* = (1, 2, -1, 1)^T$.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5} \\
 x_2 &= \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\
 x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10} \\
 x_4 &= -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}
 \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 & -1/5 & 0 \\ 1/11 & 0 & 1/11 & -3/11 \\ -1/5 & 1/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & -3/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 25/11 \\ -11/10 \\ 15/8 \end{pmatrix}$$

k	0	1	2	3	...	10
x_1	0	0.6000	1.0473	0.9326		1.0001
x_2	0	2.2727	1.7159	2.0533	...	1.9998
x_3	0	-1.1000	-0.8052	-1.0493		-0.9998
x_4	0	1.8750	0.8852	1.1309		0.9998

Il costo computazionale è pari a un prodotto matrice vettore per ogni iterazione.

Metodo di Gauss Seidel (o metodo degli spostamenti successivi)

$$A = M - N = (D - L) - U$$

$$M = D - L \quad N = U$$

$$(D - L)x^{k+1} = Ux^k + b$$

$$x^{k+1} = (D - L)^{-1}Ux^k + (D - L)^{-1}b$$

La matrice di iterazione, detta matrice di Gauss Seidel è data da $\mathcal{G} = (D - L)^{-1}U = I - (D - L)^{-1}A$.

Se $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, n$, allora

$$\sum_{j=1, i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + a_{ii}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j=i+1, n} a_{ij}x_j^k$$

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1, i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1, n} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$$

Esempio.

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

La soluzione esatta vale $x^* = (1, 2, -1, 1)^T$.

$$x_1^k = \frac{1}{10}x_2^{k-1} - \frac{1}{5}x_3^{k-1} + \frac{3}{5}$$

$$x_2^k = \frac{1}{11}x_1^k + \frac{1}{11}x_3^{k-1} - \frac{3}{11}x_4^{k-1} + \frac{25}{11}$$

$$x_3^k = -\frac{1}{5}x_1^k + \frac{1}{10}x_2^k + \frac{1}{10}x_4^{k-1} - \frac{11}{10}$$

$$x_4^k = -\frac{3}{8}x_2^k + \frac{1}{8}x_3^k + \frac{15}{8}$$

$$\mathcal{G} = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 10 & & & & \\ -1 & 11 & & & \\ 2 & -1 & 10 & & \\ 0 & 3 & -1 & 8 & \\ & & & & \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & & \\ & 1 & -3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0.6000	1.030	1.0065	1.0009	1.0001
x_2	0	2.3272	2.037	2.0036	2.0003	2.0000
x_3	0	-0.9873	-1.014	-1.0025	-1.0003	-1.0000
x_4	0	0.8789	0.9844	0.9983	0.99999	1.0000

Il costo computazionale è pari a un prodotto matrice vettore per ogni iterazione.

Convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss Seidel

Teorema. Se A è una matrice quadrata di ordine n strettamente diagonale dominante per righe o per colonne o irriducibilmente diagonale dominante per righe o per colonne, allora

- il metodo di Jacobi converge;
- il metodo di Gauss Seidel converge e $\|\mathcal{G}\|_\infty \leq \|J\|_\infty$

(Dimostrazione (convergenza del metodo di Jacobi). Se A è strettamente diagonale dominante per righe, allora $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$. Poichè $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, n$, segue che

$$\|J\|_\infty = \max_i \sum_{j \neq i} |a_{ij}| / |a_{ii}| < 1$$

Allora $\rho(J) \leq \|J\|_\infty < 1$ e il metodo è convergente.

Se A è irriducibilmente diagonale dominante per righe $\|J\|_\infty \leq 1$. Se fosse $\rho(J) = 1$, esisterebbe un autovalore λ tale che $|\lambda| = 1$ e dunque tale autovalore appartiene alla frontiera dell'unione dei cerchi di Gerschgorin (che sono di centro 0 e raggio minore od uguale a 1). Ma se A è irriducibile, lo è anche J . Poichè ogni cerchio di Gerschgorin deve passare per tale autovalore (III teorema di Gerschgorin) e per almeno un indice $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| / |a_{ii}| < 1$, allora non può essere $\rho(J) = 1$, bensì $\rho(J) < 1$.)

Il fatto che $\|\mathcal{G}\|_\infty \leq \|J\|_\infty$ non assicura che il metodo di Gauss Seidel converga più velocemente del metodo di Jacobi.

Teorema di Stein Rosenberg. Se $J \geq 0$, allora si può verificare uno solo dei seguenti casi:

- $0 < \rho(\mathcal{G}) < \rho(J) < 1$
- $0 = \rho(\mathcal{G}) = \rho(J)$
- $1 = \rho(\mathcal{G}) = \rho(J)$
- $1 < \rho(J) < \rho(\mathcal{G})$

I metodi di Gauss Seidel e di Jacobi convergono entrambe o divergono entrambe. Nel caso in cui convergono entrambe, il metodo di Gauss Seidel è asintoticamente non meno veloce del metodo di Jacobi.

Teorema. Sia A quadrata di ordine n simmetrica con $a_{ii} > 0$. Allora A è definita positiva se e solo se il metodo di Gauss Seidel è convergente.

Teorema. Sia A quadrata di ordine n simmetrica e sia $2D - A$ definita positiva. Allora A è definita positiva se e solo se il metodo di Jacobi è convergente.

Metodi iterativi parametrici

$$A = M(\omega) - N(\omega)$$

ove $M(\omega)$ è non singolare.

$$x^{k+1} = G(\omega)x^k + c(\omega)$$

$$G(\omega) = M(\omega)^{-1}N(\omega) = I - M(\omega)^{-1}A$$

$$c(\omega) = M(\omega)^{-1}b$$

- Occorre determinare i valori di ω per cui $M(\omega)$ è non singolare e $\rho(G(\omega)) < 1$; sia Ω l'insieme di tali valori;
- occorre poi determinare entro Ω il valore ω^* per cui si ha che

$$\rho(G(\omega^*)) = \min_{\omega \in \Omega} \rho(G(\omega)) = \min_{\omega \in \Omega} \max_{i=1, n} |\lambda(G(\omega))|.$$

Un modo per introdurre tale parametro è quello di usare la tecnica di rilassamento o di estrapolazione entro un metodo noto:

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega)x_i^k + \omega x_i^{k+1/2}$$

ove $x_i^{k+1/2}$ è ottenuto da x_i^k applicando un passo del metodo che si vuole estrapolare o rilassare.

- $\omega = 1$ fornisce il metodo di partenza;
- con $\omega > 1$ si parla di sovrarilassamento;
- con $\omega < 1$ si parla di sottorilassamento;

In pratica invece di usare

$$x_i^{k+1} = x_i^k + (M^{-1}r_k)_i$$

si usa

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega(M^{-1}r_k)_i$$

Metodo estrapolato di Jacobi

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= (1 - \omega)x^k + \omega x^{k+1/2} \\&= (1 - \omega)x^k + \omega(D^{-1}(L + U)x^k + D^{-1}b) \\&= (1 - \omega)x^k + \omega x^k - \omega D^{-1}Ax^k + \omega D^{-1}b \\x^{k+1} &= (I - \omega D^{-1}A)x^k + \omega D^{-1}b\end{aligned}$$

$$J(\omega) = I - \omega D^{-1}A, \quad M(\omega) = D/\omega, \quad N(\omega) = (D - \omega A)/\omega.$$

Metodo estrapolato di Gauss Seidel (SOR)

$$\begin{aligned}x_i^{k+1} &= (1 - \omega)x_i^k + \omega(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^k)/a_{ii} \\a_{ii}x_i^{k+1} + \omega \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{k+1} &= a_{ii}(1 - \omega)x_i^k - \omega \sum_{j>i} a_{ij}x_j^k + \omega b_i\end{aligned}$$

In notazione matriciale

$$\begin{aligned}(D - \omega L)x^{k+1} &= ((1 - \omega)D + \omega U)x^k + \omega b \\x^{k+1} &= (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)x^k + (D - \omega L)^{-1}\omega b \\M(\omega) &= \frac{D - \omega L}{\omega} \quad N(\omega) = \frac{(1 - \omega)D + \omega U}{\omega} \\G(\omega) &= (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)\end{aligned}$$

Teorema (Kahan). $\rho(G(\omega)) > |\omega - 1|$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \det(G(\omega)) &= \det((D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n a_{ii}\right)^{-1} \prod_{i=1}^n (1 - \omega)a_{ii} = \\ &= (1 - \omega)^n \\ |\det(G(\omega))| &= |(1 - \omega)^n| \leq \rho(G(\omega))^n \end{aligned}$$

Perchè ci sia convergenza deve essere necessariamente $0 < \omega < 2$.

Teorema (Ostroski-Reich). Sia A simmetrica con $a_{ii} > 0$ e sia $0 < \omega < 2$. Allora A è definita positiva se e solo se il metodo SOR converge.

Il problema di trovare il valore di ω , ω^* , per cui

$$\rho(G(\omega^*)) = \min_{0 < \omega < 2} \rho(G(\omega))$$

si risolve solo per particolari classi di matrici.

Se A è tridiagonale con elementi diagonali non nulli, valgono le seguenti asserzioni:

- La matrice di Jacobi ha autovalori reali simmetricamente disposti attorno all'origine;
- se μ è autovalore di J e

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \lambda \mu^2$$

λ è autovalore di $G(\omega)$;

- se λ è un autovalore non nullo di $G(\omega)$ e

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \lambda \mu^2$$

μ è un autovalore di J .

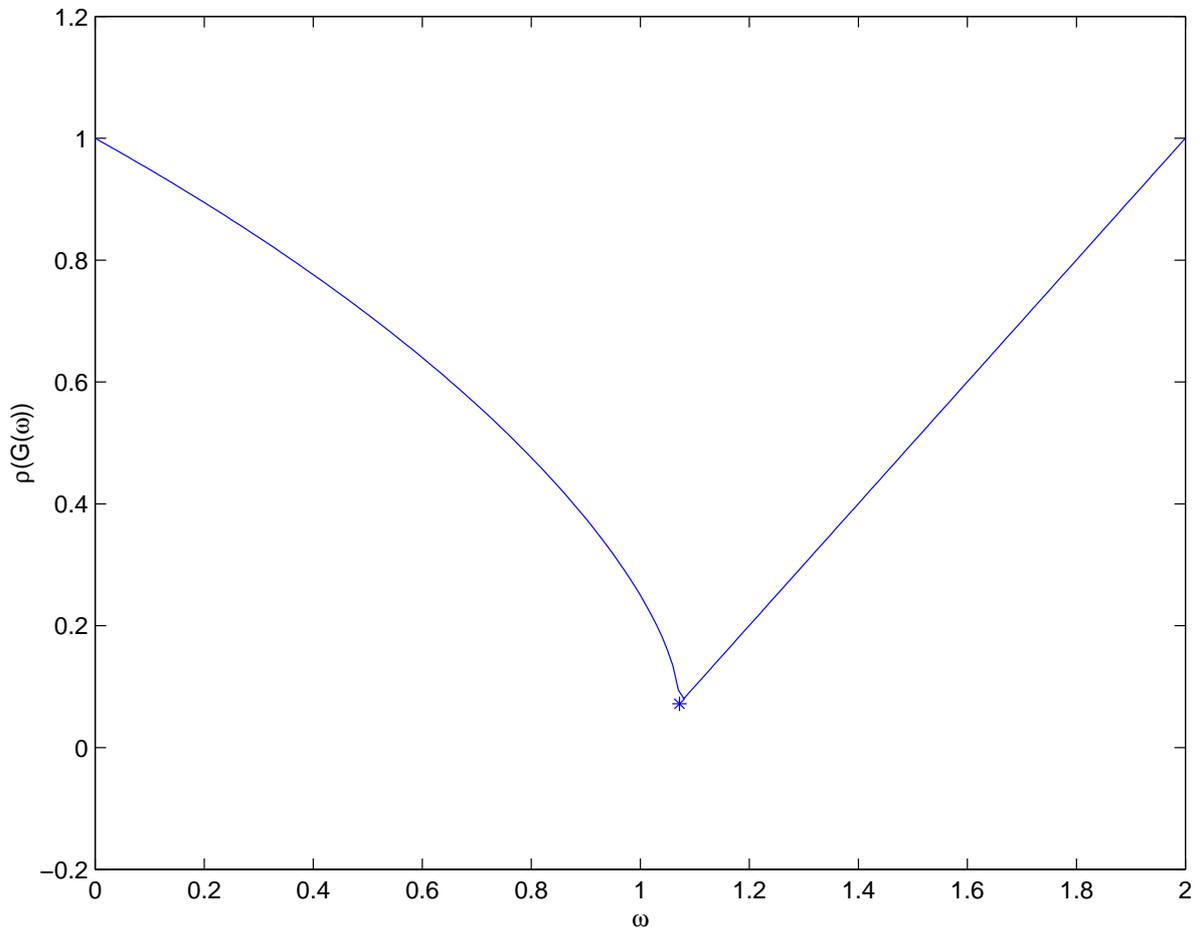
In particolare per $\omega = 1$, $\rho(J)^2 = \rho(\mathcal{G})$ e dunque $\mathcal{R}_\infty(\mathcal{G}) = 2\mathcal{R}_\infty(J)$ se convergono entrambi.

I metodi di Jacobi e SOR convergono e divergono entrambi. Se $\rho(J) < 1$, allora il valore di ω ottimale è

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$$

$$\rho(G(\omega^*)) = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho(J)^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} = \omega^* - 1$$

$$\rho(G(\omega)) = \begin{cases} \omega - 1 & \omega^* \leq \omega < 2 \\ 1 - \omega + \frac{1}{2}\omega^2\rho(J)^2 + \omega\rho(J)\sqrt{1 - \omega + \frac{1}{4}\omega^2\rho(J)^2} & 0 < \omega < \omega^* \end{cases}$$



Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice è irriducibilmente diagonale dominante e $\rho(J) < 1$.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(J - \mu I) = -\mu(\mu^2 - 0.625)$. $\mu = 0$, $\mu = \pm\sqrt{0.625}$. Pertanto $\rho(J) = 0.79057$.

Gli autovalori di $G(\omega)$ sono tali che:

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2$$

$\rho(\mathcal{G}) = 0.625$. SOR converge e $\omega^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-0.625}} \simeq 1.24$. Inoltre $\rho(G(\omega^*)) = 0.24$.

Velocità di convergenza	Iterazioni necessarie a ridurre l'errore iniziale di $1/e$
$\mathcal{R}_\infty(J) = 0.235$	$4.26 \simeq 4 - 5$
$\mathcal{R}_\infty(\mathcal{G}) = 0.47$	$2.13 \simeq 2 - 3$
$\mathcal{R}_\infty(G(\omega^*)) = 1.4271$	$0.7 \simeq 1$

Metodi iterativi a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ & \dots & & \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qq} \end{pmatrix} = D - L - U \quad A_{ij} \in \mathcal{R}^{p \times p}$$

$$D = \text{diag}(A_{ii})$$

$$L = \begin{cases} -A_{ij} & j < i \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} -A_{ij} & j > i \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si definiscono metodi di Jacobi a blocchi, di Gauss Seidel a blocchi e SOR a blocchi:

$$J_B = D^{-1}(L + U) \quad \mathcal{G}_B = (D - L)^{-1}U$$

$$G(\omega)_B = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$$

I metodi di Jacobi e Gauss Seidel a blocchi convergono per M-matrici.

Se A è simmetrica definita positiva e $0 < \omega < 2$, il metodo SOR a blocchi converge.

Se A è simmetrica e $2D - A$ è simmetrica definita positiva, allora A è definita positiva se e solo se il metodo di Jacobi a blocchi è convergente.

La teoria delle matrici tridiagonali si estende alle matrici tridiagonali a blocchi.

Teorema. Se A è una matrice con $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ e $A^{-1} > 0$ con blocchi diagonali non singolari vale che:

- $0 \leq \rho(J_B) \leq \rho(J) < 1$
- $0 \leq \rho(\mathcal{G}_B) \leq \rho(\mathcal{G}) < 1$
- $0 \leq \rho(\mathcal{G}_B) < \rho(J_B) < 1$

Questo accade per matrici irriducibilmente diagonali dominanti con $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, $a_{ii} > 0$.