Metodi per il calcolo dell'inversa di una matrice

- Se A è fattorizzabile nella forma $A = LR$, occorre risolvere gli n sistemi
$$AX = I \Rightarrow LRX = I$$
$$LY = I \qquad RX = Y$$
Ciò comporta $\mathcal{O}(n^3/3)$ prodotti per la fattorizzazione, e $\mathcal{O}(2n^3/3)$ prodotti per la soluzione. Si può anche calcolare A^{-1} mediante l'inversione delle matrici R e L ($2\mathcal{O}(n^3/6)$ prodotti), eseguendo poi il prodotto delle inverse ($\mathcal{O}(n^3/3)$ prodotti)
$$A^{-1} = R^{-1}L^{-1}$$
In totale, in entrambe i casi, $\mathcal{O}(n^3)$ prodotti.
- Se A è fattorizzabile nella forma $PA = LR$, occorre risolvere gli n sistemi
$$PAX = PI \Rightarrow LRX = P$$
$$LY = PI \qquad RX = Y$$
Ciò comporta $\mathcal{O}(n^3/3)$ prodotti per la fattorizzazione, e $\mathcal{O}(2n^3/3)$ prodotti per la soluzione. Si può anche calcolare A^{-1} mediante l'inversione delle matrici R e L ($2\mathcal{O}(n^3/6)$ prodotti), eseguendo poi il prodotto delle inverse ($\mathcal{O}(n^3/3)$ prodotti) e permutando opportunamente le colonne della matrice ottenuta:
$$A^{-1} = R^{-1}L^{-1}P$$
- Se A è simmetrica definita positiva e quindi esiste la fattorizzazione di Cholesky, $A = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$, occorre risolvere gli n sistemi
$$AX = I \Rightarrow \mathcal{L}\mathcal{L}^T X = I$$

$$\mathcal{L}Y = I \qquad \mathcal{L}^T X = Y$$

Ciò comporta $\mathcal{O}(n^3/6)$ prodotti per la fattorizzazione, e $\mathcal{O}(2n^3/3)$ prodotti per la soluzione. Si può anche calcolare A^{-1} mediante l'inversione della matrice $\mathcal{L}$ ($\mathcal{O}(n^3/6)$ prodotti), eseguendo poi il prodotto della trasposta dell'inversa con l'inversa ($\mathcal{O}(n^3/3)$ prodotti):

$$A^{-1} = \mathcal{L}^{-T}\mathcal{L}^{-1}$$

In totale $\mathcal{O}(2n^3/3)$ prodotti.

- Se A è fattorizzabile nella forma $A = QR$, occorre risolvere gli n sistemi

  $$AX = I \Rightarrow QRX = I \Rightarrow RX = Q^T$$

  Ciò comporta $4\mathcal{O}(n^3/3)$ prodotti per la fattorizzazione (matrici di Givens), e $\mathcal{O}(n^3/2)$ prodotti per la soluzione. Si può anche calcolare A^{-1} mediante l'inversione della matrice R ($\mathcal{O}(n^3/6)$ prodotti), eseguendo poi il prodotto della trasposta dell'inversa di R con Q^T ($\mathcal{O}(n^3/2)$ prodotti):

  $$A^{-1} = R^{-1}Q^T$$

- Metodo di Gauss–Jordan

Sia X l'inversa calcolata. Allora

$$A^{-1} - X = A^{-1}(I - A * X)$$

$$\|A^{-1} - X\| \leq \|A^{-1}\|\|I - A * X\| \Rightarrow \frac{\|A^{-1} - X\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|I - A * X\|$$

Dalla piccolezza di $\|I - A * X\|$ si deduce che l'inversa è accettabile (ossia l'errore relativo è piccolo).

Metodo di Gauss–Jordan

Lo scopo del metodo è trovare l'inversa della matrice A, risolvendo il sistema $AX = I$ mediante l'applicazioni di trasformazioni elementari di Gauss–Jordan che riducono la matrice A a forma diagonale.

Si dice trasformazione elementare di Gauss–Jordan la seguente matrice:

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & & -m_{1i} & & \\ & 1 & -m_{2i} & & \\ & & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{ji} & 1 & \\ & & \vdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Se $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}, \quad j = 1, \ldots, n; i \neq j$, la colonna j–esima della matrice A cui è premoltiplicata M_i si annulla eccetto nell'elemento diagonale che rimane invariato.

Occorre che in posizione perno a_{ii} ci sia un elemento non nullo.

Allora, a partire dalla prima colonna, quando si arriva alla colonna i–esima, si cerca sulla colonna i dall'elemento diagonale in poi l'elemento di modulo massimo (basta uno diverso da 0). Si porta in posizione perno tale elemento mediante una permutazione elementare P_i e poi si annulla la colonna i mediante una trasformazione di Gauss-Jordan eccetto nell'elemento diagonale.

Dopo n passi A è ridotta a forma diagonale e poi all'identità, premoltiplicando per l'inversa della diagonale ottenuta.

Applicando le traformazioni anche all'identità si ha:

$$\underbrace{D^{-1}M_nP_nM_{n-1}P_{n-1}....M_2P_2M_1P_1}_{X} \quad [A\ I] = [I\ V]$$

$$X \quad [A\ I] = [I\ V]$$

$$\Rightarrow XA = I \quad X = V$$

per cui $A^{-1} = X = V$.

La complessità computazionale è pari a $\mathcal{O}(n^3)$ prodotti e somme.

In modo analogo si può trovare la soluzione di un sistema, anche se il metodo di Gauss-Jordan per il calcolo della soluzione di un singolo sistema ha una maggiore complessità ($\mathcal{O}(n^3/2)$ prodotti).

Esempio.

$$[A\ I] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ permutazione II e I riga

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ 1/2 \\ -1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ permutazione III e II riga

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} 2/5 \\ \\ 1/5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2/5 & 0 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1 & -3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} -1/2 \\ 5/4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 5/2 & 0 & -5/4 & 5/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1 & -3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix} = [I\ A^{-1}]$$

Complessità computazionale nella risoluzione di un sistema lineare denso di n equazioni

metodo	prodotti	somme	rad. quadrate
Gauss	$n^3/3$	$n^3/3$	
Cholesky	$n^3/6$	$n^3/6$	n
Gauss–Jordan	$n^3/2$	$n^3/2$	
Givens	$4n^3/3$	$2n^3/3$	$n^2/2$