

# SISTEMI LINEARI

Un sistema lineare di  $n$  equazioni algebriche in  $n$  incognite è esprimibile come:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\dots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

ove  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  si dicono coefficienti del sistema,  $b_i \in \mathbb{R}$  sono i termini noti e  $x_i$  sono le incognite; in notazione matriciale, chiamando  $A$  la matrice reale quadrata degli  $n \times n$  coefficienti,  $x \in \mathbb{R}^n$  il vettore delle incognite e  $b \in \mathbb{R}^n$  il vettore dei termini noti (termine noto), si ha

$$Ax = b$$

Si assume che  $A$  sia non singolare, ossia che  $\det(A) \neq 0$  o, equivalentemente, che esiste l'inversa della matrice  $A$ . In tal caso la soluzione del sistema è unica ed è data da

$$x = A^{-1}b$$

Il calcolo dell'inversa di  $A$  consiste nel calcolare una matrice  $X$  tale che

$$AX = I$$

ove  $I$  è la matrice identità di ordine  $n$ . Ciò equivale a risolvere  $n$  sistemi lineari:

$$AX_{*j} = e_j$$

ove  $X_{*j}$  è la  $j$ -esima colonna della matrice inversa incognita ed  $e_j$  è la  $j$ -esima colonna dell'identità ( $j$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ ).

Ovviamente non conviene calcolare la soluzione del sistema  $Ax = b$  come  $x = A^{-1}b$ , poichè il calcolo dell'inversa comporta la risoluzione di  $n$  sistemi.

### Metodi per la risoluzione di sistemi lineari

- Metodi diretti: con un numero finito di operazioni, in aritmetica esatta, si determina la soluzione esatta; poichè si lavora in aritmetica finita, occorre valutare l'errore di arrotondamento delle operazioni e l'errore inerente.
- Metodi iterativi: la soluzione si ottiene come limite di una successione di approssimazioni alla soluzione; a partire da un vettore che è una approssimazione iniziale a una soluzione, si costruisce una successione di vettori convergenti alla soluzione cercata quando il numero di passi tende all'infinito; poichè il processo deve essere interrotto, occorre analizzare l'errore di troncamento nell'approssimazione determinata (errore inerente, errore di troncamento).

La scelta del metodo dipende:

- dalla struttura della matrice (densa o sparsa, ossia con un numero di elementi non nulli proporzionali alla dimensione della matrice);
- dalla condizione della matrice;
- dalla dimensione.

Per ciascun metodo, occorre analizzare la complessità computazionale, l'errore, la dipendenza dalla struttura della matrice.

La matrice  $n \times (n + 1)$  ottenuta aggiungendo alla matrice  $A$  come  $(n + 1)$ -esima colonna il vettore dei termini noti,  $[Ab]$  si dice matrice completa.

## Casi particolari

- Sia  $A = D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  diagonale.

Poichè  $\det(D) = d_1 d_2 \dots d_n$ ,  $D$  è non singolare se e solo se  $d_i \neq 0, i = 1, \dots, n$ .

In tal caso l'inversa è una matrice diagonale data da  $D^{-1} = \text{diag}(1/d_1, 1/d_2, \dots, 1/d_n)$ . Segue che la soluzione di

$$Dx = b$$

è ottenuta immediatamente mediante la formula:

$$x_i = b_i/d_i, i = 1, \dots, n$$

- Sia  $A$  una matrice triangolare (inferiore  $a_{ij} = 0, j > i$ , superiore  $a_{ij} = 0, j < i$ ). Per fissare le idee, sia  $A = R = \{r_{ij}\}$ , triangolare superiore.

Poichè  $\det(R) = r_{11} r_{22} \dots r_{nn}$ ,  $R$  è non singolare se e solo se tutti gli elementi diagonali sono non nulli.

In tal caso l'inversa di una matrice triangolare superiore (inferiore) è una matrice triangolare superiore (inferiore), con elementi diagonali dati da  $1/r_{ii}, i = 1, \dots, n$ . Infatti, se

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix} \quad R^{-1} = \{\rho_{ij}\}$$

si ha (dalla regola di Cramer applicata al sistema  $AX_{*j} = e_j$ ):

$$\rho_{jj} = \frac{\det \begin{pmatrix} r_{11} & r_{22} & \dots & 0 & \dots & r_{1,n} \\ & r_{22} & \dots & 0 & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & 0 & \dots & \\ & & & 1 & \dots & r_{jn} \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & r_{nn} \end{pmatrix}}{\det(R)} = \frac{r_{11} \dots r_{j-1} r_{j+1} \dots r_{nn}}{r_{11} r_{22} \dots r_{jj} \dots r_{nn}} = \frac{1}{r_{jj}}$$

Inoltre, per  $j < i$ , (risolvendo  $AX_{*j} = e_j$ ),

$$\rho_{ij} = \frac{\det \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & 0 & \dots & r_{1,n} \\ & \dots & 1 & \dots & r_{jn} \\ & & 0 & \dots & r_{in} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & r_{nn} \end{pmatrix}}{\det(R)} = 0$$

Poichè  $RR^{-1} = I$ , si ha che:

$$\sum_{k=1}^n r_{ik} \rho_{kj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Se  $i = j$ , poichè

$$r_{i1} \rho_{1j} + r_{i2} \rho_{2j} + \dots + r_{ii} \rho_{ij} + \dots + r_{in} \rho_{nj} = 1$$

e  $r_{ik} = 0$ ,  $k < i$ ,  $\rho_{kj} = 0$ ,  $j < k$ , segue  $\rho_{ii} = \frac{1}{r_{ii}}$ .

Se  $i \neq j$ ,  $j > i$ , allora

$$\sum_{k=1}^n r_{ik} \rho_{kj} = \sum_{k=i}^j r_{ik} \rho_{kj} = r_{ii} \rho_{ij} + r_{ii+1} \rho_{i+1j} + \dots + r_{ij} \rho_{jj} = 0$$

Da ciò

$$\rho_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^j r_{ik} \rho_{kj}}{r_{ii}}$$

Occorre disporre della  $i$ -esima riga di  $R$  dalla diagonale fino all'elemento  $j$  e della  $j$ -esima colonna di  $R^{-1}$  dall' $i + 1$ -esimo elemento al  $j$ -esimo. Dunque si può calcolare  $R^{-1}$  a partire dalla  $n$ -esima riga fino alla prima e su ogni riga dall'elemento di posizione  $n$  all'elemento diagonale. Usando questo ordinamento si può usare  $R$  come spazio di memorizzazione per  $R^{-1}$ . La complessità computazionale è:

1.  $\frac{n(n+1)}{2}$  divisioni;
2.  $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + \dots + n - 1) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}(i^2 + i) = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \right) = \mathcal{O}(n^3/6)$  moltiplicazioni e somme.

## Algoritmi di sostituzione all'indietro e di eliminazione in avanti

La risoluzione di un sistema triangolare superiore si può ottenere in sole  $\mathcal{O}(n^2/2)$  somme e prodotti e  $n$  divisioni mediante l'algoritmo di sostituzione all'indietro. In tal caso si ricava  $x_n$  dall'ultima equazione. Si sostituisce nella penultima e si ricava  $x_{n-1}$  e così via. Per i sistemi triangolari inferiori si usa l'algoritmo di eliminazione in avanti, ove si ricava  $x_1$  dalla prima equazione, si sostituisce nella seconda e si ricava  $x_2$  e così via. In totale servono le stesse operazioni.

Entrambi gli algoritmi sono metodi diretti, che, in un numero finito di passi, in aritmetica esatta, calcolano la soluzione esatta del sistema. Quando si usa aritmetica finita, invece di calcolare la soluzione  $x$  del sistema

$$Rx = b \quad Lx = b$$

si determina una soluzione approssimata  $z$ . Essa può essere interpretata come soluzione esatta di un sistema perturbato:

$$(R + \delta R)z = b \quad (L + \delta L)z = b$$

ove vale che:

$$\|\delta R\|_\infty \leq 1.01u \frac{n(n+1)}{2} \max(|r_{ij}|)$$

$$\|\delta L\|_\infty \leq 1.01u \frac{n(n+1)}{2} \max(|l_{ij}|)$$

se  $(n-1)u \leq 0.01$ , ove  $u$  è la precisione di macchina.

## Metodi diretti per il caso generale

$$Ax = b \quad \det(A) \neq 0$$

- Metodo di Cramer: si calcola  $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$ , ove  $\det(A_j)$  è la matrice ottenuta dalla  $A$  sostituendo alla  $j$ -esima colonna di  $A$  il termine noto  $b$ . Se si usa la regola di Laplace per il calcolo del determinante, servono  $n!(n - 1)$  prodotti per ogni determinante. Pertanto per il calcolo della soluzione servono  $n!(n - 1)(n + 1)$  prodotti,  $n$  divisioni e  $(n! - 1)(n + 1)$  somme. Contando solo i prodotti e supponendo che si impieghino  $10^{-9}$  secondi per ogni prodotto, per  $n = 20$  servono circa 154 anni per calcolare la soluzione del sistema!! C'è eccessiva complessità computazionale e conseguente accumulo di errori.
- Calcolo dell'inversa: comporta la soluzione di  $n$  sistemi. Si consideri il caso semplice:

$$7x = 21$$

Se viene calcolato come  $x = (7)^{-1}21 = .142857 \cdot 21 = 2.99997$ , ci vogliono 2 operazioni e c'è un errore. Se invece si usano le proprietà delle equazioni (metodo di sostituzione), si ha  $x = \frac{21}{7} = 3$ ; si esegue una sola operazione e non c'è errore.

Dunque occorre evitare il calcolo dell'inversa.



- Metodi di fattorizzazione: l'idea di base è quella di fattorizzare la matrice  $A$  nel prodotto di due matrici semplici da risolvere, in modo che sia facile risolvere i due sistemi associati; in particolare, si studiano due tipi di fattorizzazione:

- fattorizzazione  $LR$ : si fattorizza la matrice  $A$  nel prodotto di una matrice triangolare inferiore per una triangolare superiore; se  $A = LR$ , si ha

$$Ax = b \Rightarrow LRx = b \Rightarrow \begin{array}{ll} Ly = b & \text{eliminazione in avanti} \\ Rx = y & \text{sostituzione all'indietro} \end{array}$$

In totale, una volta ottenuta la fattorizzazione, servono  $\mathcal{O}(n^2)$  operazioni.

- fattorizzazione  $QR$ : si fattorizza la matrice  $A$  nel prodotto di una matrice ortogonale (per cui  $Q^{-1} = Q^T$ ) con una matrice triangolare superiore; se  $A = QR$ , si ha

$$Ax = b \Rightarrow QRx = b \Rightarrow Rx = Q^T b$$

In totale  $\mathcal{O}(n^2/2 + n^2)$  operazioni.

## Fattorizzazione $LR$

Data  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , si vogliono trovare le condizioni per cui  $A$  si può fattorizzare nel prodotto di una matrice triangolare inferiore  $L$  con una triangolare superiore  $R$ . Poichè deve essere

$$A = LR$$

occorre imporre  $n^2$  uguaglianze per determinare  $n^2 + n$  parametri (numero di elementi non nulli di  $L$  e di  $R$ ). Occorre fissare  $n$  elementi, attribuendo ad essi un valore arbitrario.

In genere, per convenzione, si fissano uguali a 1 gli elementi diagonali della matrice triangolare inferiore o superiore. In realtà si cerca la fattorizzazione

$$A = LDU$$

ove  $L$  è una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali 1,  $D$  è una matrice diagonale,  $U$  è una matrice triangolare superiore con elementi diagonali 1.

$$A = LDU = \begin{cases} LR & R = DU & \text{fattorizzazione di Doolittle} \\ \tilde{L}U & \tilde{L} = LD & \text{fattorizzazione di Crout} \end{cases}$$

ove  $r_{ij} = d_i u_{ij}$  e  $\tilde{l}_{ij} = l_{ij} d_j$ .

Da una fattorizzazione si può ottenere l'altra.

La fattorizzazione  $A = LDU$  non esiste sempre. Per esempio, se  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , non esistono  $L$ ,  $D$  e  $U$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 u_{12} \\ l_{21} d_1 & l_{21} d_1 u_{12} + d_2 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 0$$

$$d_1 u_{12} = 1$$

$$l_{21} d_1 = 1$$

$$l_{21} d_1 u_{12} + d_2 = 0$$

Equazioni incompatibili.

**Teorema.** Se i determinanti di tutte le sottomatrici principali prime  $A^{(i)}$  di  $A$  di ordine  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  sono non nulli (per  $A^{(i)}$  si intende l'intersezione delle prime  $i$  righe e  $i$  colonne di  $A$ ), allora esistono matrici  $L$  triangolare inferiore unitaria (con 1 sulla diagonale),  $D$  diagonale,  $U$  triangolare superiore unitaria, tali che  $A = LDU$ . La fattorizzazione è univocamente determinata e vale che

$$\det(A^{(i)}) = d_1 d_2 \dots d_i$$

Poichè  $\det(A) = d_1 \dots d_n$ , se  $d_n \neq 0$ ,  $A$  è non singolare.

Viceversa, se  $A$  è decomponibile in modo unico come  $A = LDU$ , allora tutte le sottomatrici principali prime eccetto al più l'ultima sono non singolari.

Il determinante di una sottomatrice principale prima si dice minore.

Teorema. Se  $A$  è non singolare e  $A = LDU$ , la fattorizzazione è unica.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano due fattorizzazioni  $A = L_1R_1 = L_2R_2$ , con  $L_1, L_2$  triangolari inferiori unitarie diverse tra loro e  $R_1, R_2$  triangolari superiori diverse tra loro. Poichè  $A$  è non singolare,  $\det(A) = \det(L_1)\det(R_1) = 1 \cdot \det(R_1) \neq 0$ , e dunque  $R_1$  è non singolare. Analogamente per  $R_2$ . Da

$$L_1R_1 = L_2R_2$$

moltiplicando per  $L_2^{-1}$  ambo i membri a sinistra e per  $R_1^{-1}$  ambo i membri a destra, si ha

$$L_2^{-1}L_1 = R_2R_1^{-1}$$

Pertanto  $L_2^{-1}L_1 = I$  e  $R_2R_1^{-1} = I$ . Si ha  $L_1 = L_2$  e  $R_1 = R_2$ .

## Trasformazioni elementari di Gauss

Sia  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $x_1 \neq 0$ . Una trasformazione elementare di Gauss è una matrice triangolare inferiore con 1 sulla diagonale t.c.  $L_1 x = (x_1, 0, \dots, 0)^T$ :

$$L_1 = I - m^{(1)} e_1^T$$
$$L_1 x = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_2 & 1 & & \\ \dots & \dots & 1 & \\ -m_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$-m_i x_1 + x_i = 0 \Rightarrow m_i = \frac{x_i}{x_1} \quad i = 2, \dots, n$$

ove  $m^{(1)} = (0, m_2, \dots, m_n)^T$ .

In generale, se  $x_i \neq 0$  e si vuole trasformare  $x$  in un vettore  $(x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)^T$ , allora  $L_i = I - m^{(i)} e_i^T$ , con  $m^{(i)} = (0, \dots, 0, m_{i+1}, \dots, m_n)^T$ ,  $m_j = \frac{x_j}{x_i}$ ,  $j = i + 1, \dots, n$ .

$L_i$  è non singolare e  $L_i^{-1} = I + m^{(i)} e_i^T$ . Infatti

$$(I - m^{(i)} e_i^T)(I + m^{(i)} e_i^T) = I - m^{(i)} e_i^T + m^{(i)} e_i^T - m^{(i)} e_i^T m^{(i)} e_i^T = I$$

perchè  $e_i^T m^{(i)} = 0$ .

Costruiamo la fattorizzazione di Doolittle  $A = LR$ , nell'ipotesi di  $A$  con tutti i determinanti delle sottomatrici principali prime (minori) di ordine  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  non nulli. Poichè la costruzione è fatta per risolvere  $Ax = b$ , applichiamo le stesse trasformazioni anche a  $b$ , ossia fattorizziamo la matrice completa  $[A \ b]$ .

## Algoritmo di eliminazione di Gauss

- Passo 1.  $A = A_1, b = b_1$ .

Eliminiamo la prima incognita da tutte le equazioni eccetto la prima. Ciò vuol dire togliere da ogni equazione a partire dalla seconda un opportuno multiplo della prima equazione, azzerando tutti i coefficienti di  $x_1$  nelle righe  $2, 3, \dots, n$  della matrice dei coefficienti. Ciò significa premoltiplicare  $[A_1 \ b_1]$  per la matrice di trasformazione elementare di Gauss che trasforma la prima colonna di  $A$  in  $(a_{11}, 0, \dots, 0)^T$ .

$$L_1[A_1 \ b_1] = [A_2 \ b_2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ \dots & & & & \\ -m_{n1} & 0 & \dots & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

ove  $L_1 = I - m^{(1)} e_1^T, m^{(1)} = (0, m_{21}, \dots, m_{n,1})^T$ .

Poichè  $a_{i1}^{(2)} = 0 = -m_{i1}a_{11} + a_{i1}$  e  $a_{11} \neq 0$  (minore di  $A$  di ordine 1), segue

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, \dots, n$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad i, j = 2, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1, \quad i = 2, \dots, n$$

Si osservi che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Calcolando i determinanti,  $1. \det(A^{(2)}) = a_{11}a_{22}^{(2)} \Rightarrow a_{22}^{(2)} \neq 0$ .  
 Dunque è possibile costruire

$$L_2 = I - m^{(2)} e_2^T$$

ove  $m^{(2)} = (0, 0, m_{32}, \dots, m_{n2})^T$ .

● Passo 2.

$$\begin{aligned} L_2[A_2 \ b_2] &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & & \\ 0 & \dots & & \dots & \\ 0 & -m_{n2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} & \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & a_{3n}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ove  $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ ,  $i = 3, \dots, n$ ,  $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}$ ,  $b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)}$ ,  $i, j = 3, \dots, n$ .

Inoltre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix}$$

e, poichè

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -m_{21} & 1 & \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} A^{(3)}$$

calcolando i determinanti, si ottiene  $1.1. \det(A^{(3)}) = a_{11}a_{22}^{(2)}a_{33}^{(3)} \Rightarrow a_{33}^{(3)} \neq 0$ .

- Passo  $k$ . Al passo  $k < n$ , la situazione è

$$L_{k-1}L_{k-2}\dots L_1[A_1 \ b_1] = [A_k \ b_k] =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & & & a_{n1} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & & & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nk}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Considerando l'intersezione tra le prime  $k$  righe e  $k$  colonne delle matrici, si ha  $\det(A^{(k)}) = a_{11}a_{22}^{(2)}\dots a_{kk}^{(k)} \Rightarrow a_{kk}^{(k)} \neq 0$ .

Preso  $L_k = I - m^{(k)}e_k^T$ ,  $m^{(k)} = (0, \dots, 0, m_{k+1k}, \dots, m_{nk})^T$ ,

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \dots, n,$$

$$L_k[A_k \ b_k] = [A_{k+1} \ b_{k+1}] =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & & & a_{n1} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & & & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{k+1k+1}^{(k+1)} & \dots & b_{k+1}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nk+1}^{(k+1)} & \dots & b_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

Le prime  $k$  righe e  $k$  colonne restano invariate. Le posizioni  $(i, k)$ ,  $i = k+1, \dots, n$  si annullano e

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}$$

Dopo  $n - 1$  passi si ha:

$$L_{n-1}\dots L_2L_1[A_1 \ b_1] = [R \ y]$$



con  $r_{ii} = a_{ii}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $y = (b_1 \ b_2^{(2)} \ b_3^{(3)} \ \dots \ b_n^{(n)})^T$ .

Allora

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} R \quad b = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} y$$

Detto  $L = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}$ ,  $\Rightarrow A = LR \quad b = Ly$ .

Poichè

$$(I + m^{(i)} e_i^T)(I + m^{(j)} e_j^T) = I + m^{(i)} e_i^T + m^{(j)} e_j^T + m^{(i)} e_i^T m^{(j)} e_j^T$$

e per  $i < j$ ,  $e_i^T m^{(j)} = 0$ . Pertanto

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \dots & 1 & & \\ \dots & m_{ij} & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Si è determinata la fattorizzazione e la risoluzione di  $Ly = b$ . Se  $A$  è non singolare ( $r_{nn} \neq 0$ ), resta da risolvere  $Rx = y$ .

$$\det(A) = a_{11} a_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)}$$

Pertanto si è dimostrato che:

se tutti i minori principali (eccetto al più l'ultimo) sono non nulli, i perni  $a_{ii}^{(i)}$  per  $i=1, \dots, n-1$  sono non nulli e l'eliminazione di Gauss si può portare a termine (strategia diagonale). Se poi  $a_{nn}^{(n)} \neq 0$ , la matrice è non singolare e  $x = R^{-1}b$ .

La complessità computazionale dell'algoritmo vale:

- Fattorizzazione:  $\frac{n(n-1)}{2}$  divisioni,  $\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$  somme e prodotti;
- Termine noto:  $\frac{n(n-1)}{2}$  prodotti e somme per fattorizzare più altrettanti  $\frac{n(n-1)}{2}$  prodotti e somme per la soluzione.
- Determinante:  $n - 1$  prodotti

## Esempio

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right) = [A \ b]$$

$$m^{(1)} = (0, 2, 3, -1)^T$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array} \right) = [A_2 \ b_2]$$

$$m^{(2)} = (0, 0, 4, -3)^T$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array} \right) = [A_3 \ b_3]$$

$$m^{(3)} = (0, 0, 0, 0)^T$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 4 & 1 & \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$y = L^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = -1$$

$$\det(A) = 13 \cdot 3 = 39$$

# Condizioni sufficienti per l'esecuzione dell'algoritmo di Gauss con strategia diagonale

Ci sono due classi di matrici per il cui il metodo di Gauss si può portare a termine senza che nessun perno si annulli:

- le matrici strettamente diagonali dominanti per righe (per colonne) o le matrici non singolari diagonali dominanti per righe (o per colonne);
- le matrici simmetriche definite positive.

Una matrice si dice strettamente diagonale dominante per righe (per colonne) se vale per ogni  $i = 1, \dots, n$  ( $j = 1, \dots, n$ ):

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j, j=1}^n |a_{ij}| \quad (|a_{jj}| > \sum_{i \neq j, i=1}^n |a_{ij}|)$$

Una matrice si dice diagonale dominante per righe (per colonne) se vale per ogni  $i = 1, \dots, n$  ( $j = 1, \dots, n$ ):

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j, j=1}^n |a_{ij}| \quad (|a_{jj}| \geq \sum_{i \neq j, i=1}^n |a_{ij}|)$$

Una matrice strettamente diagonale dominante è non singolare. Infatti il primo pivot non può essere nullo. Se così fosse, tutta la prima riga sarebbe nulla e la matrice non sarebbe più strettamente diagonale dominante. Dopo aver fatto un passo dell'algoritmo di Gauss, si

dimostra che la sottomatrice  $A_2(2 : n, 2 : n)$  è ancora strettamente diagonale dominante; pertanto  $a_{22}^{(2)} \neq 0, \dots$

Un ragionamento analogo vale per le matrici non singolari diagonali dominanti.

## Matrici definite positive

Una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica ( $A = A^T$ ) si dice definita positiva se per ogni vettore  $x$  non nullo risulta  $x^T A x > 0$ .

PROPRIETA'. Sia  $A$  una matrice simmetrica definita positiva.

- Una matrice è simmetrica definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono numeri reali positivi. Questa è una proprietà caratterizzante delle matrici definite positive.
- Se  $A$  è simmetrica definita positiva, essa è non singolare e la sua inversa è simmetrica definita positiva.
- Tutte le sottomatrici principali di una matrice simmetrica definita positiva sono simmetriche definite positive.
- Se  $A$  è simmetrica definita positiva,  $\det(A) > 0$ .
- $\max|a_{ij}| \leq \max(a_{ii})$ .

Poichè tutti i minori principali primi sono positivi, l'algoritmo di eliminazione di Gauss può essere portato a termine, in quanto i perni sono positivi. Le sottomatrici che si ottengono ad ogni passo  $A_k(k : n, k : n)$  sono ancora simmetriche definite positive.

Inoltre (teorema di Von Neumann Goldstine):

$$\max|a_{ij}^{(k)}| \leq \max(a_{ii})$$

gli elementi che si incontrano nell'algoritmo non diventano mai troppo grandi rispetto agli elementi di  $A$ . (Dal fatto che  $a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$ , si ha

$$\max|a_{ij}^{(2)}| \leq \max(a_{ii}^{(2)}) = \max(a_{ii} - \frac{a_{i1}^2}{a_{11}}) \leq \max(a_{ii}) \leq \max|a_{ij}|$$

# Fattorizzazione di Gauss per matrici simmetriche

Se  $A$  è simmetrica e fattorizzabile mediante l'algoritmo di Gauss,

$$A = LDU \quad A = A^T = U^T D L^T$$

Pertanto  $L = U^T$ .

$$A = LDL^T$$

La complessità computazionale diventa dell'  $\mathcal{O}(\frac{n^3}{6})$  somme e prodotti, poichè circa metà elementi non sono da calcolare.

## Teorema di Cholesky

Una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica è definita positiva se e solo se esiste una e una sola matrice  $\mathcal{L}$  triangolare inferiore con elementi diagonali positivi tale che  $A = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$  (equivalentemente, posto  $\mathcal{L} = \mathcal{R}^T$ ,  $A = \mathcal{R}^T\mathcal{R}$ ).

Dim. Se esiste una e una sola matrice  $\mathcal{L}$  triangolare inferiore con elementi diagonali positivi tale che  $A = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$ , allora per ogni  $x \neq 0$  si ha

$$x^T Ax = x^T \mathcal{L}\mathcal{L}^T x = \|\mathcal{L}^T x\|_2^2 \geq 0$$

Poichè  $\mathcal{L}$  è non singolare e  $x \neq 0$ ,  $\mathcal{L}^T x \neq 0$  e  $x^T Ax > 0$ .

Se  $A$  è simmetrica definita positiva ammette fattorizzazione unica del tipo  $LDL^T$ . Inoltre, per ogni  $x \neq 0$ ,

$$0 < x^T Ax = x^T LDL^T x = y^T Dy = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$$

ove si è posto  $y = L^T x \neq 0$ . Poichè allora i  $d_i > 0$ , si può scrivere  $D = \Delta\Delta$ , con  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$ .

Posto  $L\Delta = \mathcal{L}$ , si è determinata una matrice triangolare inferiore con elementi  $l_{ii} = \sqrt{d_i} \cdot 1 > 0$ . L'unicità della matrice segue dall'unicità della fattorizzazione  $LDU$  per matrici non singolari.

Questa fattorizzazione è detta **fattorizzazione di Cholesky** e caratterizza le matrici simmetriche definite positive. Se una matrice simmetrica non ammette tale fattorizzazione non è definita positiva.



# Fattorizzazione di Cholesky (tecnica compatta)

Le tecniche compatte sfruttano le uguaglianze matriciali, considerando le singole equazioni tra scalari in un ordine opportuno, detto pavimentazione della matrice:

$$A = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$$

Se  $j \leq i$ , si ha

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik}l_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} + l_{ij}l_{jj}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}} & j < i \\ l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}^2} & j = i \end{cases}$$

$j = 1, \dots, n$ .

Si costruisce la matrice  $\mathcal{L}$  per colonne; essa si può memorizzare nel triangolo strettamente triangolare inferiore di  $A$ , ponendo gli elementi diagonali in un vettore ausiliario  $p$ .

	2				
$A$	3	7			
	4	8	11		
	5	9	12	14	
$p$	1	6	10	13	15

Pavimentazione

## Complessità

- $\mathcal{O}(\frac{n^3}{6})$  somme e  $\mathcal{O}(\frac{n^3}{6})$  prodotti;
- $\mathcal{O}(\frac{n^2}{2})$  divisioni e  $n$  estrazioni di radici quadrate

Per evitare le estrazioni di radici si preferisce calcolare la fattorizzazione  $LDL^T$ , ossia non fare le divisioni per  $l_{jj}$  e non estrarre le radici.

- $\det(A) = l_{11}^2 l_{22}^2 \dots l_{nn}^2$ ;
- se una delle quantità sotto radice che si incontrano nel calcolo è negativa, la matrice non è definita positiva;
- se  $A$  è associata al sistema  $Ax = b$ , resta da risolvere

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = b \\ \mathcal{L}^T x = y \end{cases}$$

Nel caso di  $A = LDL^T$ , si deve risolvere

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = D^{-1}y \end{cases}$$