ESEMPI.

- $y = \varphi(a, b, c) = a + b + c$.

$$\epsilon_y = \frac{a}{a+b+c}\epsilon_a + \frac{b}{a+b+c}\epsilon_b + \frac{c}{a+b+c}\epsilon_c$$

$$I_{cond} = |\frac{a}{a+b+c}| + |\frac{b}{a+b+c}| + |\frac{c}{a+b+c}|$$

Il problema è ben condizionato se a, b, c sono di segno concorde.

- $y = \varphi(a, b) = a^2 - b^2$.

$$\epsilon_y = \frac{2a^2}{a^2 - b^2}\epsilon_a - \frac{2b^2}{a^2 - b^2}\epsilon_b$$

$$I_{cond} = \frac{2a^2}{|a^2 - b^2|} + \frac{2b^2}{|a^2 - b^2|}$$

Il problema è mal condizionato se $a^2 \simeq b^2$.

Caso delle operazioni elementari

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{x\pm y} &= \frac{x}{x\pm y}\epsilon_x \pm \frac{y}{x\pm y}\epsilon_y \\
\epsilon_{xy} &= \epsilon_x + \epsilon_y \\
\epsilon_{x/y} &= \epsilon_x - \epsilon_y \\
\epsilon_{\sqrt(x)} &= \frac{1}{2}\epsilon_x \\
\epsilon_{x^\alpha} &= \alpha\epsilon_x
\end{aligned}
$$

Moltiplicazione, divisione, estrazione di radice e potenza, con $|\alpha|$ piccolo, sono ben condizionate. Per l'operazione $x-y$, con $x \simeq y$, si verifica il fenomeno di cancellazione.

ESERCIZI.

1. $\varphi(x) = x - 1$; $I_{cond} = |\frac{x}{x-1}|$.
   Mal condizionamento per $x \simeq 1$.
2. $\varphi(x) = e^x$; $I_{cond} = |x|$.
   Mal condizionamento per $|x| \gg 1$ e buon condizionamento per $|x| \ll 1$.
3. $\varphi(x) = ln(|x|)$; $I_{cond} = |\frac{1}{ln|x|}|$.
   Mal condizionato per $x \simeq 1$.
4. $\varphi(x) = \sin(x)$; $I_{cond} = |x \cot(x)|$.
   Mal condizionamento per $|x| \simeq n\pi$ e $|x| \gg 1$, ben condizionamento per $|x| \simeq (n-1/2)\pi$.
5. $\sqrt{(x^2+1)} - |x|$; $I_{cond} = |\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}|$.
   Sempre buon condizionamento.

Errori inerenti e di arrotondamento

Si considerano sia gli errori inerenti che quelli dovuti all'aritmetica finita.

ESEMPIO. $\varphi(a,b) = a^2 - b^2$.Si assume:

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= a(1+\epsilon_a)\\ \tilde{b} &= b(1+\epsilon_b)\end{aligned}$$

- ALGORITMO 1.

$$\begin{aligned}fl(\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2) &= (\tilde{a}^2(1+\epsilon_1) - \tilde{b}^2(1+\epsilon_2))(1+\epsilon_3)\\ &\simeq \tilde{a}^2 - \tilde{b}^2 + \tilde{a}^2\epsilon_1 - \tilde{b}^2\epsilon_2 + (\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2)\epsilon_3\\ &= a^2(1+\epsilon_a)^2 - b^2(1+\epsilon_b)^2 +\\ &\quad + a^2(1+\epsilon_a)^2\epsilon_1 - b^2(1+\epsilon_b)^2\epsilon_2 +\\ &\quad + (a^2(1+\epsilon_a)^2 - b^2(1+\epsilon_b)^2)\epsilon_3\\ &\simeq a^2 - b^2 + 2a^2\epsilon_a - 2b^2\epsilon_b + a^2\epsilon_1 - b^2\epsilon_2 +\\ &\quad + (a^2 - b^2)\epsilon_3\end{aligned}$$

trascurando, in un'analisi del I ordine, $\epsilon_a^2, \epsilon_b^2, \epsilon_a\epsilon_3, \ldots$.

$$\begin{aligned}\frac{fl(\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2) - (a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} &\simeq \frac{2a^2}{a^2 - b^2}\epsilon_a - \frac{2b^2}{a^2 - b^2}\epsilon_b +\\ &\quad + \frac{a^2}{a^2 - b^2}\epsilon_1 - \frac{b^2}{a^2 - b^2}\epsilon_2 + \epsilon_3\end{aligned}$$

L'errore globale è dato da:

– errore dovuto ai dati iniziali:

$$I_{cond} = \frac{2a^2}{|a^2 - b^2|} + \frac{2b^2}{|a^2 - b^2|}$$

– errore dovuto all'aritmetica finita:

$$I_{alg1} = \frac{a^2}{|a^2 - b^2|} + \frac{b^2}{|a^2 - b^2|} + 1$$

- ALGORITMO 2.

$$\begin{aligned} fl(\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2) &= (\tilde{a} + \tilde{b})(\tilde{a} - \tilde{b})(1 + \epsilon_4)(1 + \epsilon_5))(1 + \epsilon_6) \\ &\simeq (\tilde{a}(1 + \epsilon_a) + \tilde{b}(1 + \epsilon_b))(\tilde{a}(1 + \epsilon_a) - \tilde{b}(1 + \epsilon_b)). \\ &\quad .(1 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6) \\ &\simeq a^2 - b^2 + 2a^2\epsilon_a - 2b^2\epsilon_b + (a^2 - b^2)(\epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6) \end{aligned}$$

trascurando, in un'analisi del I ordine, $\epsilon_a^2, \epsilon_b^2, \epsilon_a\epsilon_4, \ldots$.

$$\begin{aligned} \frac{fl(\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2) - (a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} &\simeq \frac{2a^2}{a^2 - b^2}\epsilon_a - \frac{2b^2}{a^2 - b^2}\epsilon_b + \\ &\quad + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 \end{aligned}$$

L'errore globale è dato da:

– errore dovuto ai dati iniziali:

$$I_{cond} = \frac{2a^2}{|a^2 - b^2|} + \frac{2b^2}{|a^2 - b^2|}$$

– errore dovuto all'aritmetica finita:

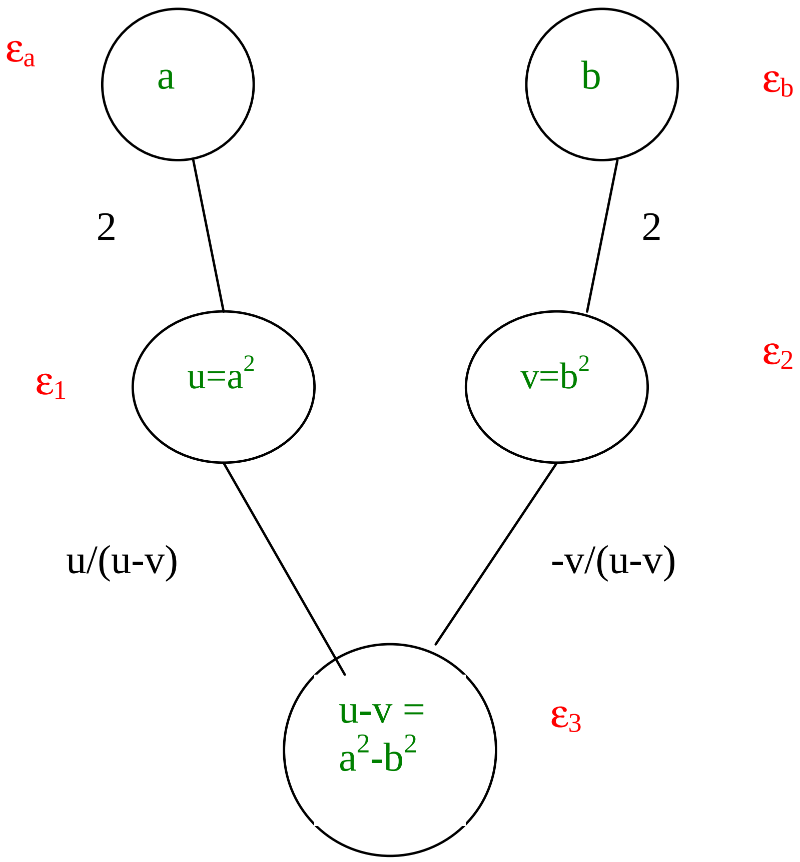
$$I_{alg2} = 3$$

Metodo dei grafi

Si pone accanto a ogni nodo l'errore relativo (dovuto al dato o all'operazione aritmetica). Su ogni arco si indica l'indice di condizionamento della trasformazione. Il contributo sull'errore totale relativo ϵ_{tot} di ogni errore ϵ_i si ottiene sommando i prodotti dei fattori di amplificazione su ogni percorso che unisce il nodo relativo a ϵ_i con quello del risultato finale.

ESEMPIO. Analisi dell'errore col metodo dei grafi dei due algoritmi per il calcolo di $\varphi(a, b) = a^2 - b^2$.

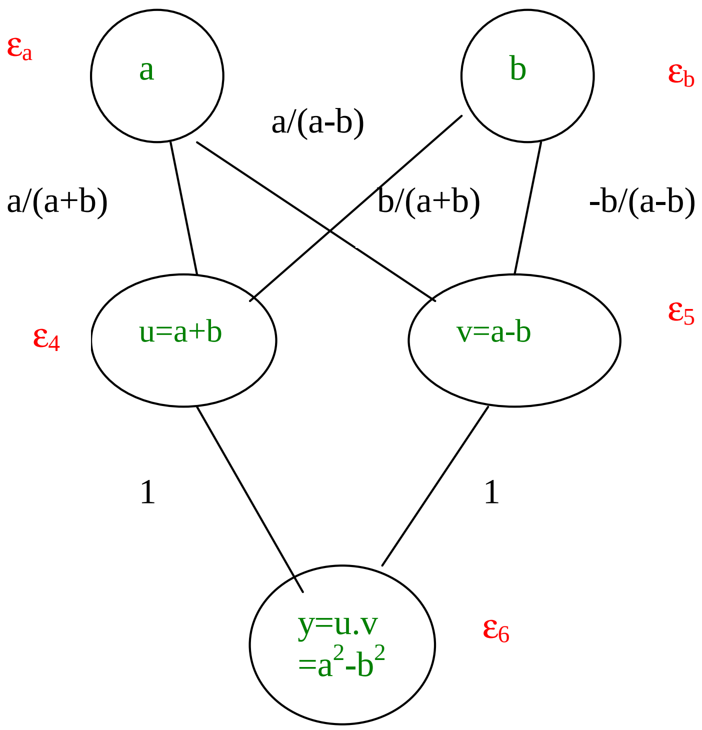
Algoritmo 1



$$
\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= 2\frac{u}{u-v}\epsilon_a + 2\frac{-v}{u-v}\epsilon_b + \\
&+ \frac{u}{u-v}\epsilon_1 - \frac{v}{u-v}\epsilon_2 + \epsilon_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= 2\frac{a^2}{a^2-b^2}\epsilon_a - 2\frac{b^2}{a^2-b^2}\epsilon_b + \\
&+ \frac{a^2}{a^2-b^2}\epsilon_1 - \frac{b^2}{a^2-b^2}\epsilon_2 + \epsilon_3
\end{aligned}
$$

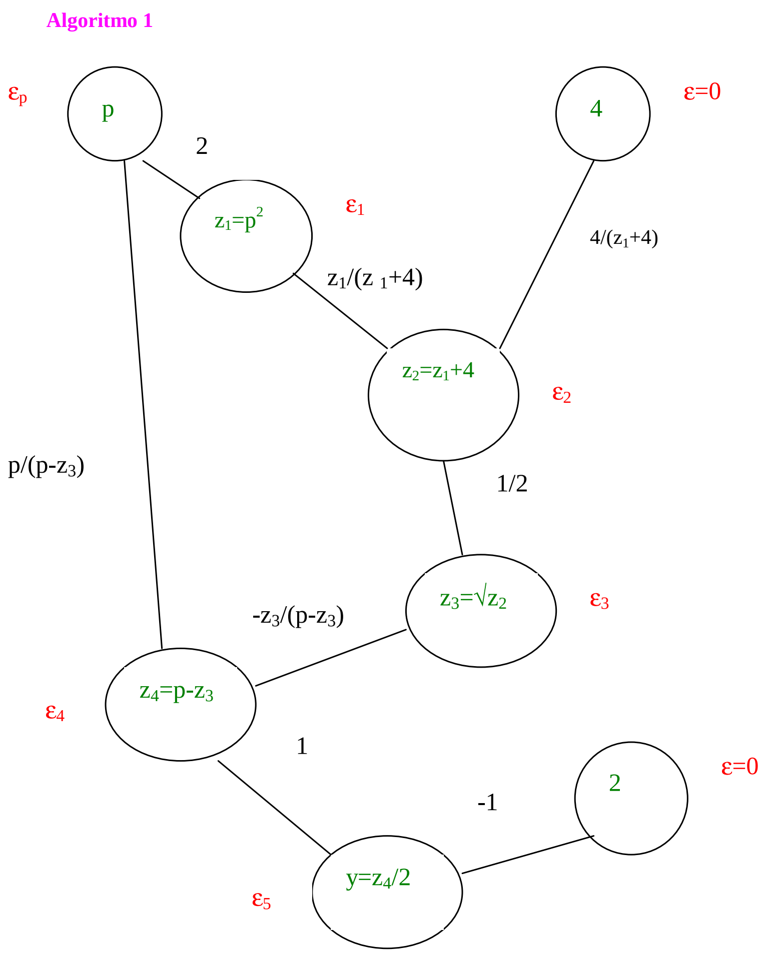
Algoritmo 2



$$
\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= \left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a-b}\right)\epsilon_a+\left(\frac{b}{a+b}-\frac{b}{a-b}\right)\epsilon_b+ \\
&+ \epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= 2\frac{a^2}{a^2-b^2}\epsilon_a-2\frac{b^2}{a^2-b^2}\epsilon_b+ \\
&+ \epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6
\end{aligned}
$$

ESEMPIO. $\varphi(p) = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2} \quad p \geq 0$



$$
\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= \left(\frac{p}{p-z_3} + \frac{z_1}{z_1+4}\frac{-z_3}{(p-z_3)}\right)\epsilon_p + \\
&+ \left(\frac{z_1}{z_1+4}\frac{-z_3}{2(p-z_3)}\right)\epsilon_1 + \left(\frac{-z_3}{2(p-z_3)}\right)\epsilon_2 - \frac{z_3}{p-z_3}\epsilon_3 + \\
&+ \epsilon_4 + \epsilon_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= \frac{-p}{\sqrt{p^2+4}}\epsilon_p + \\
&+ \left(\frac{p^2(p+\sqrt{p^2+4}}{(8\sqrt{p^2+4})}\right)\epsilon_1 + \frac{1}{8}(p\sqrt{p^2+4} + p^2 + 4)\epsilon_2 + \\
&+ \frac{1}{4}(p\sqrt{p^2+4} + p^2 + 4)\epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5
\end{aligned}
$$

$I_{cond} = \frac{p}{\sqrt{p^2+4}}$: il problema è ben condizionato.

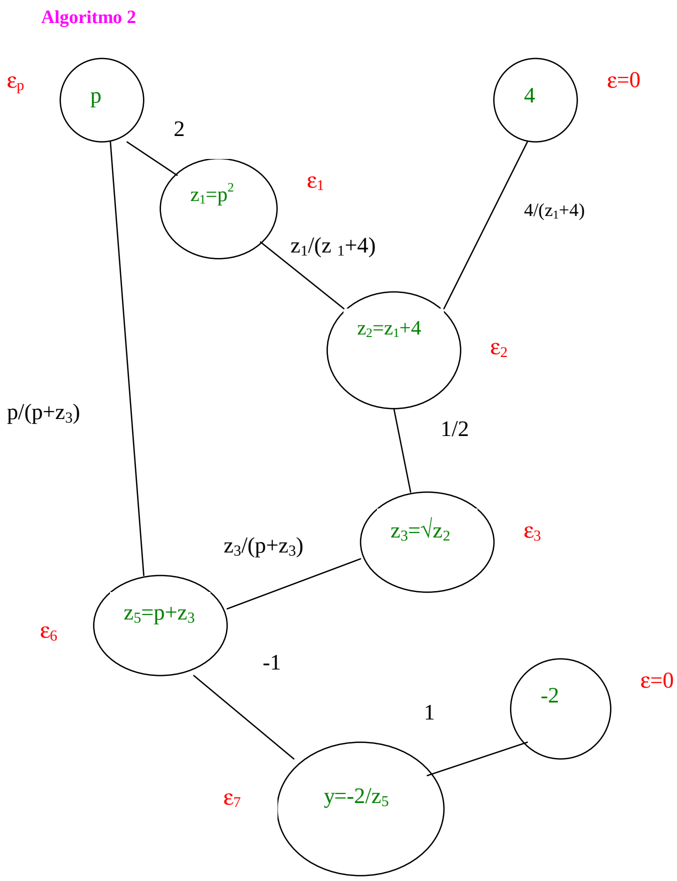
$I_{alg1} = 2 + \frac{p^2(p+\sqrt{p^2+4}}{8\sqrt{p^2+4}} + \frac{3}{8}(p\sqrt{p^2+4} + p^2 + 4)$: se $p \gg$, l'algoritmo è instabile. Per rendere l'algoritmo stabile, si riformula l'espressione usando la tecnica di razionalizzazione.

$\varphi(p) = \frac{-2}{p+\sqrt{p^2+4}}$

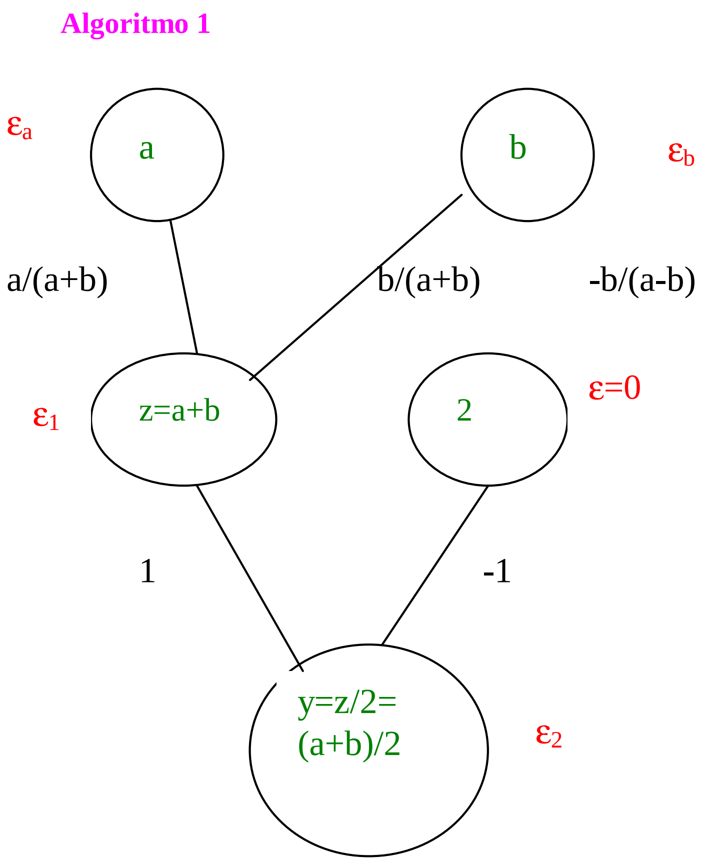
$$
\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= \frac{-p}{\sqrt{p^2+4}}\epsilon_p + \\
&+ \frac{p^2(p-\sqrt{p^2+4})}{8\sqrt{p^2+4}}\epsilon_1 + \frac{1}{8}(p\sqrt{p^2+4} - (p^2 + 4))\epsilon_2 + \\
&+ \frac{1}{4}(p\sqrt{p^2+4} - (p^2 + 4))\epsilon_3 - \epsilon_6 + \epsilon_7
\end{aligned}
$$

L'indice di condizionamento non cambia: $I_{cond} = \frac{p}{\sqrt{p^2+4}}$.

$I_{alg2} = 2 + \frac{p^2|p-\sqrt{p^2+4}|}{8\sqrt{p^2+4}} + \frac{3}{8}|p\sqrt{p^2+4} - (p^2+4)|$: questo algoritmo è numericamente più stabile del precedente.



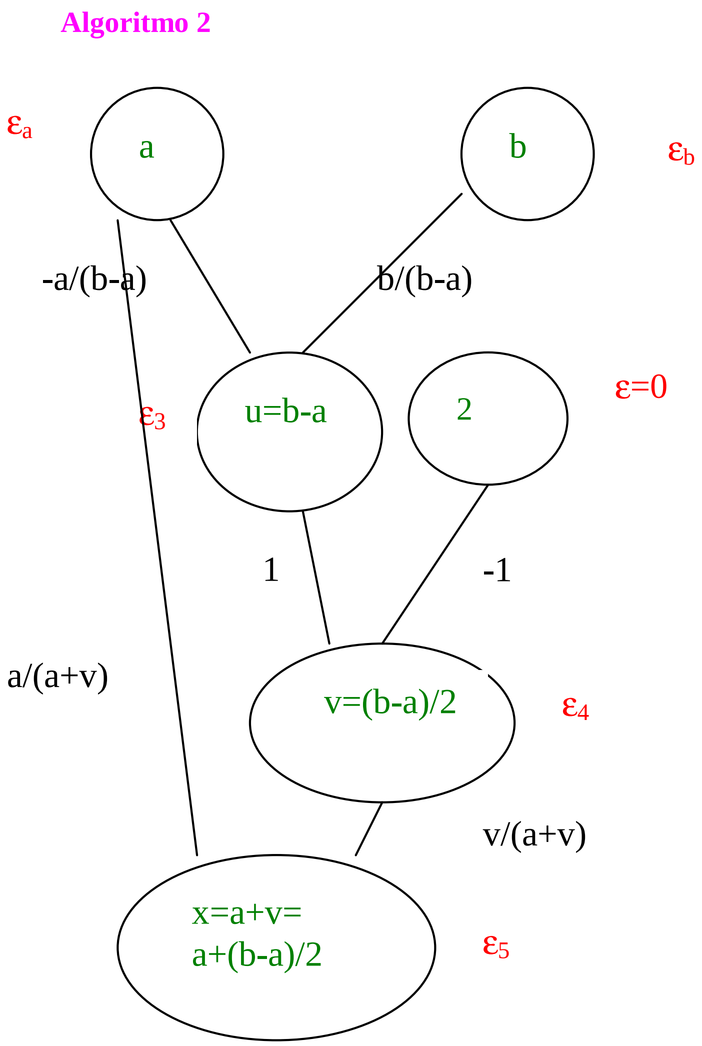
ESEMPIO. $\varphi(a,b) = \frac{a+b}{2}$.



$$\begin{aligned} \epsilon_{tot} &= \frac{a}{a+b}\epsilon_a + \frac{b}{a+b}\epsilon_b + \\ &+ \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

$I_{cond} = |\frac{a}{a+b}| + |\frac{b}{a+b}|$

$I_{alg1} = 2$



$$
\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= \frac{a}{a+b}\epsilon_a + \frac{b}{a+b}\epsilon_b + \\
&+ \frac{b-a}{a+b}\epsilon_3 + \frac{b-a}{a+b}\epsilon_4 + \epsilon_5
\end{aligned}
$$

$I_{cond} = |\frac{a}{a+b}| + |\frac{b}{a+b}|$

$I_{alg2} = 2|\frac{b-a}{a+b}| + 1$

Il problema è mal condizionato se $a \simeq -b$. Se a e b hanno lo stesso segno, allora è ben condizionato. Inoltre,

$$I_{alg1} > I_{alg2} \quad \text{se} \quad 2 > 2\left\|\frac{b-a}{b+a}\right\| + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} > |\frac{b-a}{b+a}|$$

Se a e b sono positivi, allora $a + b > 0$ e si ha:

$$\frac{a+b}{2} > |b-a|$$

1. $b - a < \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{a}{b}$
2. $-\frac{a+b}{2} < b - a \Rightarrow \frac{a}{b} < 3$

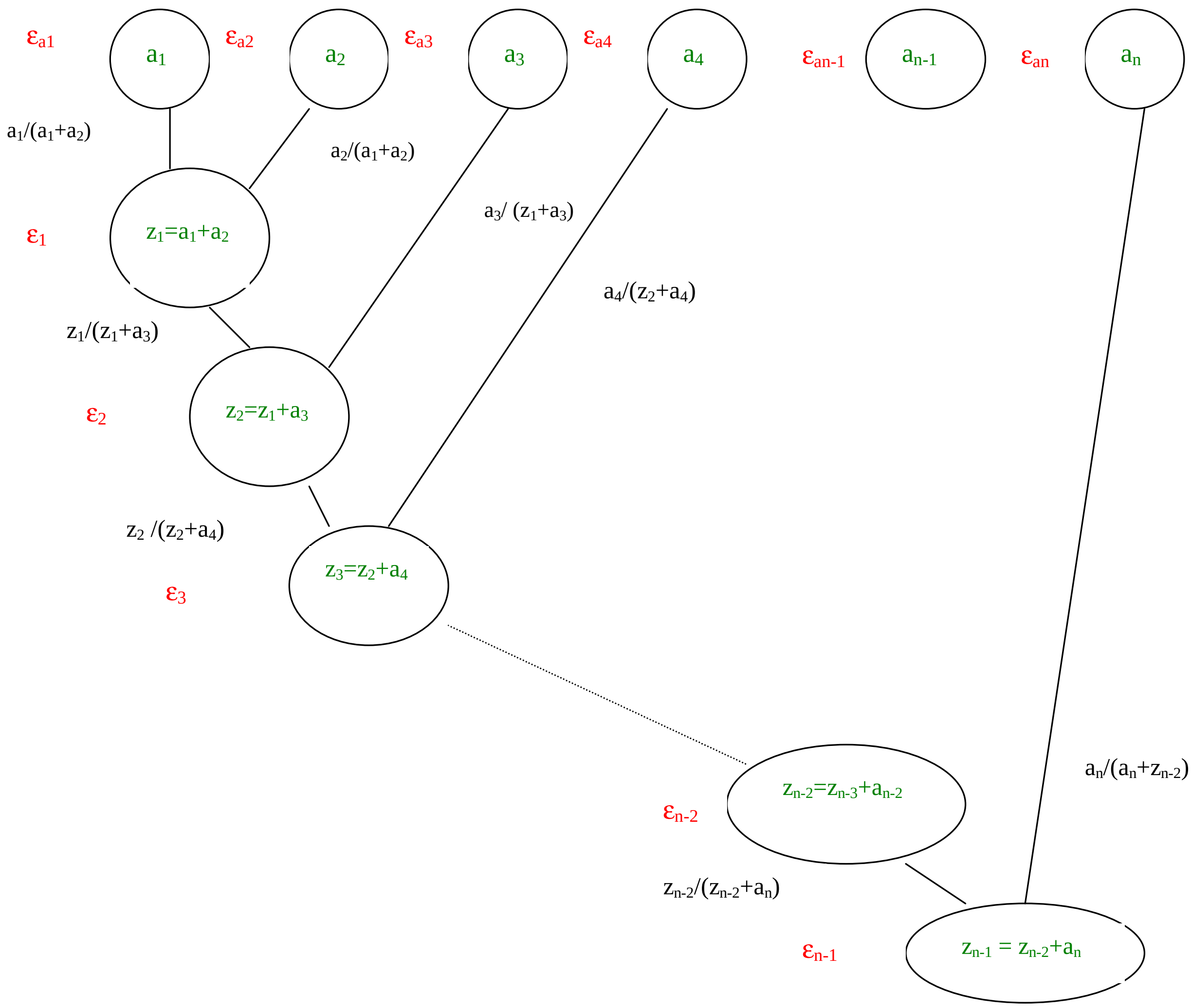
L'algoritmo 2 è numericamente più stabile dell'algoritmo 1 se $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} < 3$.

ESEMPIO

$$\begin{aligned}
\epsilon_{tot} &= \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\frac{z_1}{z_1+a_3}\frac{z_2}{z_2+a_4}\dots\frac{z_{n-2}}{z_{n-2}+a_n}\right)\epsilon_{a_1} + \\
&+ \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\frac{z_1}{z_1+a_3}\frac{z_2}{z_2+a_4}\dots\frac{z_{n-2}}{z_{n-2}+a_n}\right)\epsilon_{a_2} + \\
&+ \left(\frac{a_3}{z_1+a_3}\frac{z_2}{z_2+a_4}\dots\frac{z_{n-2}}{z_{n-2}+a_n}\right)\epsilon_{a_3} + \\
&+ \dots + \left(\frac{a_n}{z_{n-2}+a_n}\right)\epsilon_{a_n} + \\
&+ \left(\frac{z_1}{z_1+a_3}\frac{z_2}{z_2+a_4}\dots\frac{z_{n-2}}{z_{n-2}+a_n}\right)\epsilon_1 + \\
&+ \left(\frac{z_2}{z_2+a_4}\dots\frac{z_{n-2}}{z_{n-2}+a_n}\right)\epsilon_2 + \\
&+ \dots + \frac{z_{n-2}}{z_{n-2}+a_n}\epsilon_{n-1} + \epsilon_{n-1} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S}\epsilon_{a_i} + \\
&+ \frac{a_1+a_2}{S}\epsilon_1 + \frac{a_1+a_2+a_3}{S}\epsilon_2 + \dots + \frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{S}\epsilon_{n-2} + \epsilon_{n-1}
\end{aligned}$$

ove S è il valore esatto della somma. Si noti che $z_{n-2} + a_n = S$. Se a_i sono di segno concorde, il problema è ben condizionato. Per avere maggiore stabilità numerica conviene sommare dal più piccolo (in valore assoluto) al più grande.

Algoritmo 1



ε_{a1}
a_1
ε_{a2}
a_2
ε_{a3}
a_3
ε_{a4}
a_4
ε_{an-1}
a_{n-1}
ε_{an}
a_n
$a_1/(a_1+a_2)$
$a_2/(a_1+a_2)$
ε_1
$z_1=a_1+a_2$
$a_3/ (z_1+a_3)$
$a_4/(z_2+a_4)$
$z_1/(z_1+a_3)$
ε_2
$z_2=z_1+a_3$
$z_2 /(z_2+a_4)$
ε_3
$z_3=z_2+a_4$
$a_n/(a_n+z_{n-2})$
ε_{n-2}
$z_{n-2}=z_{n-3}+a_{n-2}$
$z_{n-2}/(z_{n-2}+a_n)$
ε_{n-1}
$z_{n-1} = z_{n-2}+a_n$