# NORMA DI UN VETTORE

Una NORMA VETTORIALE su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $||.|| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup \{0\}$, che associa ad ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ di componenti $x_i,\ i = 1, \ldots, n$, uno scalare in modo che valgano le seguenti proprietà:

- $||x|| \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (se non vale tale proprietà si parla di seminorma);
- $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (disuguaglianza triangolare).

Segue che $||x - y|| \geq |||x|| - ||y|||$.

In $\mathbb{R}^n$ si possono definire le seguenti norme:

- $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^T x}$; (norma euclidea)
- $||x||_\infty = \max_{i=1,n} |x_i|$; (norma uniforme o del massimo)
- $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Si può provare che queste funzioni godono delle proprietà delle norme. In particolare per dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma euclidea è necessario dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Swartz:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq ||x||_2 ||y||_2$$

Esempio. Se $x = (1, -1, 2)$, $||x||_2 = \sqrt{6}$, $||x||_1 = 4$, $||x||_\infty = 2$.

La norma 1, 2, $\infty$ sono casi particolari della norma data da:

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \qquad p \geq 1$$

Infatti per la norma uniforme si ha:

$$\max|x_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \leq (n)^{1/p} \max|x_i|$$

Per $p \to \infty$, $||x||_\infty = \max|x_i|$.

Si dice sfera unitaria rispetto a una norma il seguente insieme:

$$S = \{x,\ t.c.\ ||x|| \leq 1\}$$

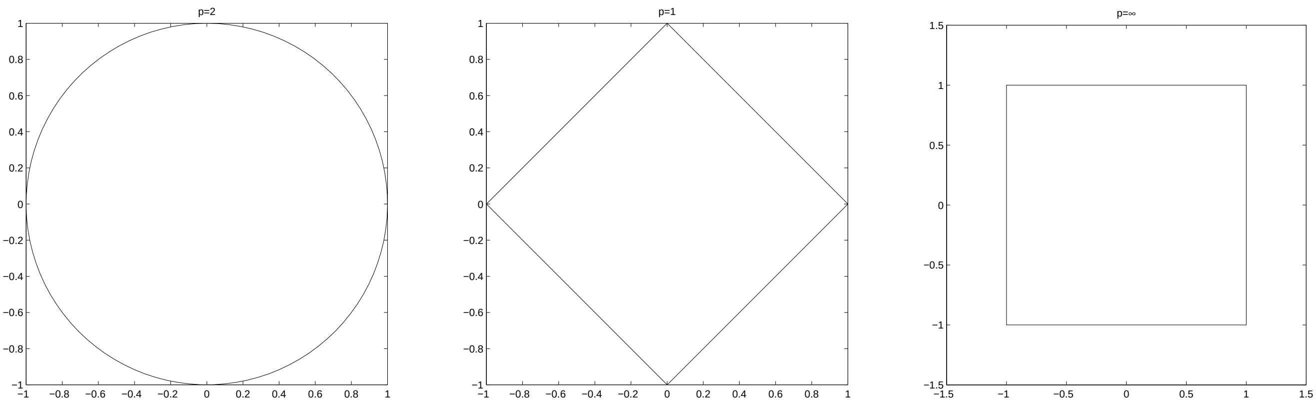
S è un insieme convesso, ossia se $x, y \in S$, anche $\alpha x + (1-\alpha) y \in S$, per $\alpha \in (0,1)$. Infatti

$$||\alpha x + (1-\alpha)y|| \leq \alpha||x|| + (1-\alpha)||y|| \leq 1$$

Inoltre la norma è una funzione strettamente convessa perchè

$$||x+y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow x = \alpha y$$

In $\mathbb{R}^2$, la sfera unitaria rispetto alle norme $2, 1, \infty$ sono le seguenti:




La norma è una funzione uniformemente continua delle sue componenti.

Definizione. Due norme $||.||_+$ e $||.||_*$ si dicono equivalenti se esistono costanti positive $A$ e $B$ tali che per ogni $x$:

$$||x||_+ \leq A||x||_*$$

$$||x||_* \leq B||x||_+$$

In uno spazio di dimensione finita, come $\mathbb{R}^n$ che ha dimensione $n$, tutte le norme sono equivalenti.

Definizione. Una successione di vettori $\{x^{(k)}\} \in \mathbb{R}^n$ si dice che converge a un vettore $x$ per $k \to \infty$ se esiste una norma per cui $\lim_{k\to\infty} ||x^{(k)} - x|| = 0$.

Questa definizione è ben posta poichè tutte le norme sono equivalenti. Dunque se in una norma vale che $\lim_{k\to\infty} ||x^{(k)} - x|| = 0$, allora vale in qualunque norma. Inoltre,

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow \text{per ogni } i = 1, \ldots, n \quad \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} ||x^{(k)} - x|| = 0$$

Esempio. Sia $x^{(k)} = (1/k, 1, 1/k^2)$; allora $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = (0, 1, 0)$.

Proprietà.

$$\begin{aligned}
||x||_\infty &\leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty \\
||x||_\infty &\leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty \\
||x||_2 &\leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2
\end{aligned}$$

# Norma di una matrice

Poichè una matrice $m \times n$ si può pensare come un vettore di $m \times n$ componenti (ordinando gli elementi della matrice per righe o per colonne), segue che una norma matriciale generalizzata è una funzione $||.|| : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup \{0\}$, tale che:

- $||A|| \geq 0$, per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$;
- $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
- $||\alpha A|| = |\alpha| ||A||$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$;
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

Di conseguenza, una norma matriciale generalizzata è una funzione uniformemente continua delle sue componenti; tutte le norme matriciali generalizzate sono equivalenti; vale che

$$||A - B|| \geq |||A|| - ||B|||$$

Una norma matriciale generalizzata è una norma matriciale se vale la seguente proprietà submoltiplicativa o di consistenza:

$$||AB|| \leq ||A|| ||B||$$

ove $A$ e $B$ sono matrici moltiplicabili.

Una norma matriciale $||.||_M$ si dice compatibile a una norma vettoriale $||.||_V$se

$$||Ax||_V \leq ||x||_V ||A||_M$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Non tutte le norme matriciali generalizzate sono consistenti. Per esempio, se si definisce

$$||A|| = \mathsf{max}_{ij}|a_{ij}|$$

questa è una norma generalizzata.

Tuttavia, date

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $||AB|| = 2$ mentre $||A|| = ||B|| = 1$. Non vale la consistenza.

Tuttavia a partire da una norma matriciale generalizzata, moltiplicandola per una opportuna costante, si ottiene una norma matriciale. Per esempio, la seguente definizione della norma di Turing fornisce una norma matriciale:

$$||A||_T = \sqrt{mn}\ \mathsf{max}_{ij}|a_{ij}|$$

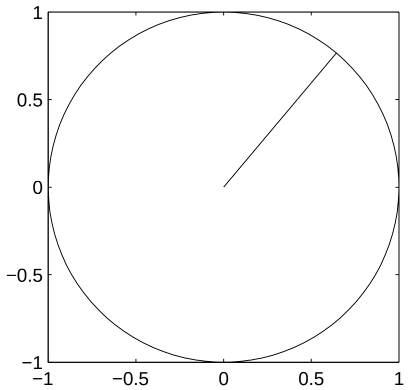
Siamo interessati a introdurre norme matriciali indotte da una norma vettoriale $||.||_V$. Una norma di questo tipo è detta norma naturale o norma indotta dalla norma vettoriale. Essa viene definita come:

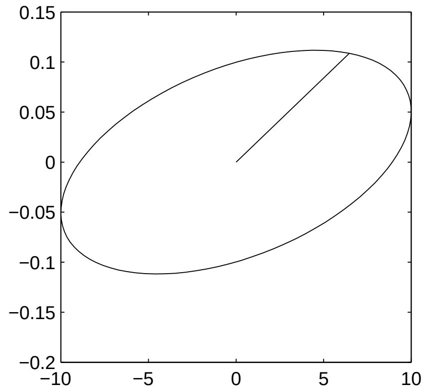
$$||A||_N = \max_{||x||_V=1} ||Ax||_V$$

Si dimostra che $||A||_N$ è una norma matriciale, che è compatibile con $||.||_V$ e che tale norma è la più piccola norma matriciale compatibile con la norma $||.||_V$.

La $||A||_N$ esprime la massima perturbazione relativa che subisce una qualsiasi direzione dello spazio $\mathbb{R}^n$ per effetto della trasformazione lineare associata ad $A$.

Se $m = n = 2$, $||A||_2$ è il massimo semiasse dell'elissoide $Ax$.



Norma matriciale compatibile con la norma $\infty$

$$||A||_\infty = \mathsf{max}_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Norma matriciale compatibile con la norma $1$

$$||A||_1 = \mathsf{max}_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Norma matriciale compatibile con la norma $2$ (euclidea), detta norma spettrale

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

ove $\lambda_{max}(A^T A)$ indica l'autovalore massimo della matrice simmetrica semidefinita positiva $A^T A$.

Un'altra norma matriciale compatibile con la norma euclidea è la norma di Frobenius:

$$||A||_F = \sqrt{\sum_i \sum_j (a_{ij})^2} = \sqrt{tr(A^T A)}$$

ove $tr(A^T A)$ è la somma degli elementi diagonali di $A^T A$. Vale che

$$||A||_2 \leq ||A||_F$$

Esempio. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora

$$||A||_T = 3\sqrt{6} \quad ||A||_F = \sqrt{16} \quad ||A||_1 = 4 \quad ||A||_\infty = 5$$

La norma naturale dell'identità è sempre 1.

$$||I||_N = \max_{||x||_V=1} ||Ix||_V = 1$$

Tutte le norme matriciale sono equivalenti.

Allora, data la successione di matrici $\{A_k\}$ si dice che sono convergenti alla matrice $A$ per $k \to \infty$ se esiste una norma matriciale per cui $\lim_{k\to\infty} ||A_k - A|| = 0$.

Questa definizione è ben posta poichè tutte le norme sono equivalenti. Inoltre,

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \text{per ogni } i, j \quad \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$$

Definizione. Si dice raggio spettrale di una matrice quadrata $A$ di ordine $n$ il massimo dei valori assoluti degli autovalori di $A$, denotato con $\rho(A) = \max_{i=1,n} |\lambda_i(A)|$.

Teorema. Per ogni norma naturale,

$$\rho(A) \leq ||A||_N$$

. Per ogni $\epsilon > 0$, esiste una norma naturale per cui

$$||A||_N \leq \rho(A) + \epsilon$$

Definizione. Sia $A$ una matrice simmetrica. Allora $A$ è definita positiva (semidefinita positiva) se, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $x^T Ax > 0$ ($x^T Ax \geq 0$).

Definizione. Sia $A$ una matrice simmetrica. Allora $A$ è definita negativa (semidefinita negativa) se, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $x^T Ax < 0$ ($x^T Ax \leq 0$).

Si dimostra che $A$ è definita positiva (semidefinita positiva) se e solo se gli autovalori di $A$ sono positivi (non negativi).

Si dimostra che $A$ è definita negativa (semidefinita negativa) se e solo se gli autovalori di $A$ sono negativi (non positivi).

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Allora $A^T A$ e $AA^T$ sono simmetriche e semidefinite positive. Se $m > n$ e $A$ è di rango massimo per colonne, $A^T A$ è definita positiva. Se $m \leq n$ e $A$ è di rango massimo per righe, $AA^T$ è definita positiva.