Trasformazione elementari di Givens

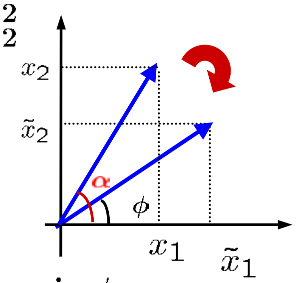
$$G_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& c &&&& s &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& -s &&&& c &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} & \end{array}$$

- dove $\boxed{c^2 + s^2 = 1} \rightarrow c = \cos\phi, \;\; s = \sin\phi$

Osservazione

- Esprime una rotazione di ampiezza φ
- Esempio (n=2)

$x = (x_1,\; x_2)^t \quad l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$



$$\begin{cases} x_1 = l\cos\alpha \\ x_2 = l\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = l\cos(\alpha - \phi) \\ \tilde{x}_2 = l\sin(\alpha - \phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = l\cos\alpha\cos\phi + l\sin\alpha\sin\phi \\ \tilde{x}_2 = l\sin\alpha\cos\phi - l\cos\alpha\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 c + x_2 s \\ \tilde{x}_2 = x_2 c - x_1 s \end{cases} \quad \boxed{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

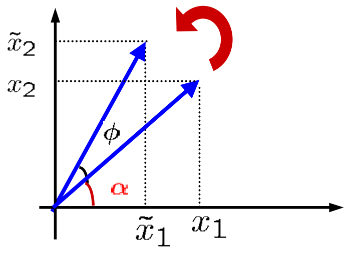
Osservazione

- Rotazione nel senso positivo degli archi

$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)^t \quad \boldsymbol{l} = \sqrt{\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{l} \cos \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{x}_2 &= \boldsymbol{l} \sin \boldsymbol{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 &= \boldsymbol{l} \cos(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\phi}) \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 &= \boldsymbol{l} \sin(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\phi}) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 &= \boldsymbol{l} \cos \boldsymbol{\alpha} \cos \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{l} \sin \boldsymbol{\alpha} \sin \boldsymbol{\phi} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 &= \boldsymbol{l} \sin \boldsymbol{\alpha} \cos \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{l} \cos \boldsymbol{\alpha} \sin \boldsymbol{\phi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 &= \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{s} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 &= \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{c} + \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{s} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

In generale

- Il prodotto matrice vettore

$$\boldsymbol{G}_{ij}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

equivale ad una rotazione nell'iperpiano individuato da $e_i,\ e_j$

Proprietà

- La matrice G_{ij} è ortogonale (l'inversa coincide con la trasposta).
- Infatti si è visto dall'esempio in 2 dimensioni che la trasposta esprime una rotazione in senso inverso.
- In generale si ha che

$$G_{ij}G_{ij}^T = I$$

$$G_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & c & & & s & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & -s & & & c & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & & i & & & j & & \end{array} & \end{array}$$

$(i$-esima riga di $G_{ij})(i$-esima colonna di $G_{ij}^T) = c^2+s^2 = 1$

$(i$-esima riga di $G_{ij})(j$-esima colonna di $G_{ij}^T) = -cs+sc = 0$

$(j$-esima riga di $G_{ij})(i$-esima colonna di $G_{ij}^T) = -sc+cs = 0$

$(j$-esima riga di $G_{ij})(j$-esima colonna di $G_{ij}^T) = s^2+c^2 = 1$

Per le altre componenti si comporta come la matrice identità

Osservazione

- Se

$$\boldsymbol{G_{ij}x} = \boldsymbol{y}$$

è sempre possibile trovare valori di c ed s (trovare un angolo φ tale che

$$y_j = 0$$

Infatti

- Il prodotto $\boldsymbol{G_{ij}x} = \boldsymbol{y}$ altera solo la i-esima e la j-esima componente del vettore y secondo le relazioni

$$\begin{cases} y_k = x_k & k \neq i, j \\ y_i = cx_i + sx_j & \\ y_j = -sx_i + cx_j & \end{cases}$$

Per annullare y_j occorre trovare c ed s tali che

$$\begin{array}{c} c^2 + s^2 = 1 \\ y_j = 0 = -sx_i + cx_j \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \\ s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \end{cases}}$$

- Data una matrice A, è possibile trovare $\boldsymbol{G_{ij}}$ tale che $B = G_{ij}A$ abbia l'elemento $b_{ji} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & c & & & s & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & -s & & & c & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad i \qquad\qquad\quad j \qquad\qquad \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{ni} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{ji} &= (j\text{-esima riga di } G_{ij})(i\text{-esima colonna di } A) \\ &= -sa_{ii} + ca_{ji} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 + s^2 &= 1 \\ b_{ji} = 0 &= -sa_{ii} + ca_{ji} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} c = \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \\ s = \dfrac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \end{cases}}$$

Inoltre

- Vengono alterate solo la riga i e la riga j della matrice prodotto

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & \cdots & b_{ii} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{ji} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{ni} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} b_{kl} = a_{kl} & k \neq i, j; l = 1, ..., n \\ b_{il} = ca_{il} + sa_{jl} & l = 1, ..., n \\ b_{jl} = -sa_{il} + ca_{jl} & l = 1, .., n \end{array}$$

Fattorizzazione QR

- Usare le trasformazioni di Givens per triangolarizzare una matrice (analogia con le trasformazioni di Gauss).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{ni} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$G_{1n}...G_{13}G_{12}A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1i}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & ... & ... & ... & a_{2n}^{(1)} \\ ... & .... & \ddots & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & a_{ii}^{(1)} & ... & a_{in}^{(1)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{j2}^{(1)} & ... & a_{ji}^{(1)} & ... & a_{jn}^{(1)} \\ ... & ... & .... & & & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & & a_{ni}^{(1)} & & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$G_{2n}...G_{23}(G_{1n}...G_{13}G_{12}A) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1i}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & ... & ... & a_{2n}^{(2)} \\ ... & 0 & \ddots & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & a_{ii}^{(2)} & ... & a_{in}^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{ji}^{(2)} & ... & a_{jn}^{(2)} \\ ... & ... & .... & & & \\ 0 & 0 & & a_{ni}^{(2)} & & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Dopo n-1 passi

$$\underbrace{\prod_{i=n-1,1;j>i} G_{ij}}_{Q^T} A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & ... & \tilde{a}_{1i} & ... & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & ... & ... & ... & \tilde{a}_{2n} \\ ... & 0 & \ddots & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & \tilde{a}_{ii} & ... & \tilde{a}_{in} \\ ... & ... & ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = R$$

Q^T è una matrice ortogonale perché prodotto di matrici ortogonali

$$A = QR$$

Riassumendo

- TEOREMA

  Se A è una matrice nxn allora esiste una matrice ortogonale Q tale che

  $$A = QR$$

  dove R è triangolare superiore.

  Si ha

  $$Q = \prod_{i=1,\dots,n;j>i} G_{ij}^T$$

Complessità computazionale

$$B = G_{ij}A \qquad \begin{matrix} b_{il} = ca_{il} + sa_{jl} \\ b_{jl} = -sa_{il} + ca_{jl} \end{matrix} \qquad \begin{cases} c = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2+a_{ji}^2}} \\ s = \frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2+a_{ji}^2}} \end{cases}$$

$$\downarrow 4n$$

$$G_{1n} \dots G_{12} \rightarrow 4n(n-1)$$

Passo	Prodotti	Radici
1	$4n(n-1)$	n-1
2	$4n(n-2)$	n-2
...	...	...
n-1	$4n$	1

$$\mathcal{O}(\frac{4n^3}{3}) \qquad \mathcal{O}(\frac{n^2}{2})$$

Osservazione

- La complessità della fattorizzazione QR è $\mathcal{O}\left(\frac{4n^3}{3}\right)$ maggiore rispetto all'algoritmo di Gauss.
- Nel caso di matrici sparse può essere conveniente.
- Es: Matrici tridiagonali

$$G_{n-1n} \ldots G_{23} G_{12} A = R = \begin{pmatrix} x & x & x & \\ \circ & x & x & x \\ & \circ & x & x \\ & & \circ & x \end{pmatrix}$$

$\mathcal{O}(\frac{4n(n-1)}{3})$ prodotti e $\mathcal{O}(n-1)$ radici

Osservazioni

- Si dimostra che la fattorizzazione QR equivale al procedimento di Gram-Schmidt.
- La fattorizzazione QR è utilizzata anche per
  - Algoritmi per il calcolo degli autovalori di una matrice;
  - Metodi per la soluzione di problemi di fitting (approssimazione)

Osservazione

- Per il calcolo di s e c si cerca di migliorare la stabilità usando le formule

$$\text{Se } |x_i| < |x_j|, \text{ si pone } t = \frac{x_i}{x_j} \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad c = t \cdot s$$
$$\text{Se } |x_j| < |x_i|, \text{ si pone } t = \frac{x_j}{x_i} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad s = t \cdot c$$

In questo modo la quantità t è sempre minore di 1.

Soluzione di un sistema

$$Ax = b$$

$$QRx = b$$

$$Rx = Q^T b$$ Sostituzione all'indietro

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$G_{12} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ \boxed{-s \quad c \quad 0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad -2s + 1c = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 2/\sqrt{5} \\ s = 1/\sqrt{5} \end{cases}$$

$$G_{12}A = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 3/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'inversa

- Le sue colonne sono le soluzioni degli n sistemi $Ax = e_i$.
- Se per esempio $A = LR$

$$AX = I \Rightarrow LRX = I$$

$$LY = I \quad RX = Y$$

- Si risolvono n sistemi triangolari inferiori dove il termine noto è rappresentato dalle colonne della matrice identità e poi n sistemi triangolari superiori.

$$\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{3}\right) + 2n * \mathcal{O}\left(\frac{n^2}{2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{4n^3}{3}\right) \geq \mathcal{O}(n^3)$$

Metodo di Gauss-Jordan

- Si risolvono contemporaneamente gli n sistemi

$$AX = I$$

- La matrice A viene ridotta a forma diagonale mediante trasformazioni di Gauss-Jordan.

Trasformazioni di Gauss-Jordan

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & & -m_{1i} & & \\ & 1 & -m_{2i} & & \\ & & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{ji} & 1 & \\ & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} \qquad m_{ji} = \frac{a_{ji}}{aii}$$

- Il prodotto $M_i A$ equivale ad una combinazione lineare delle righe. La matrice risultante ha tutti elementi nulli sulla colonna i tranne l'elemento diagonale.

Dopo n-1 passi

- Si applicano n-1 trasformazioni alla matrice composta

$$[A\ \ I]$$

- Si ottiene

$$\underbrace{M_n ... M_1}[A\ \ I] = [D\ \ B]$$

$$\tilde{X}A = D \Rightarrow \underbrace{D^{-1}\tilde{X}}_{X}A = I$$

$$X = D^{-1}B$$

Osservazioni

- E' una variante del metodo di Gauss. Si tratta di un procedimento di eliminazione.
- Anche in questo caso si può applicare la strategia di pivoting parziale.
- Il metodo di Gauss-Jordan ha complessità computazionale $\mathcal{O}(n^3)$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A \;\; I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ -1/2 \\ 1/2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_1 P_1 A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -2/5 \\ \\ 1/5 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -1/2 \\ 5/4 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -2/5 & 0 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1 & -3/5 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 1/4 \\ 2/5 \\ 5/4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 5/2 & 0 & -5/4 & 5/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1 & -3/5 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{array}{ccc} 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 5/4 & -3/4 & -1/4 \end{array}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Sommario dei metodi diretti

- Complessità computazionale

metodo	prodotti	somme	rad. quadrate
Gauss	$n^3/3$	$n^3/3$	
Cholesky	$n^3/6$	$n^3/6$	n
Gauss–Jordan	$n^3/2$	$n^3/2$	
Givens	$4n^3/3$	$2n^3/3$	$n^2/2$

- Due librerie di subroutine per la risoluzione dei sistemi lineari
  - http://www.cs.colorado.edu/~jessup/lapack/applets/linear_equations_routines.html
  - http://hsl.rl.ac.uk/contentshslarc.html#m
- La scelta del metodo dipende
  - Dalla struttura della matrice (sparsa o densa)
  - Dalla dimensione
  - Dal condizionamento del sistema