Approssimazione di dati e funzioni

INTERPOLAZIONE

Interpolazione polinomiale

Polinomio di interpolazione
Lagrange
Newton
n+1 punti

Polinomio di
Taylor
1 punto

Interpolazione polinomiale a tratti: funzioni spline

Stima dell'errore

Funzioni spline

$x_0 \equiv a \quad x_1 \quad x_2 \qquad x_i \; x_{i+1} \quad x_m \quad b \equiv x_{m+1}$

Partizione di $[a,b]$: $I_i = [x_i, x_{i+1})$, $I_m = [x_m, x_{m+1}]$

Si dice funzione spline di grado n relativa alla partizione $\{x_i\}_{i=0,\dots,m+1}$ di $[a,b]$ una funzione $s(x)$ tale che:

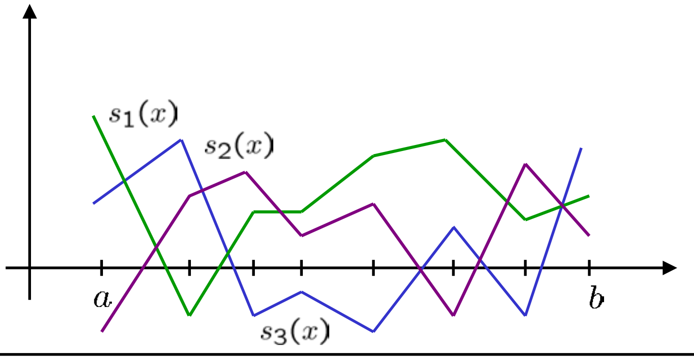
1. $s(x)$ è un polinomio $s_i(x)$ di grado non superiore a n in ciascun sottointervallo I_i;
2. $s(x) \in C^{n-1}[a,b]$;

$$s_i^{(k)}(x_{i+1}) = s_{i+1}^{(k)}(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, m-1; \, k = 0, 1, \dots, n-1$$

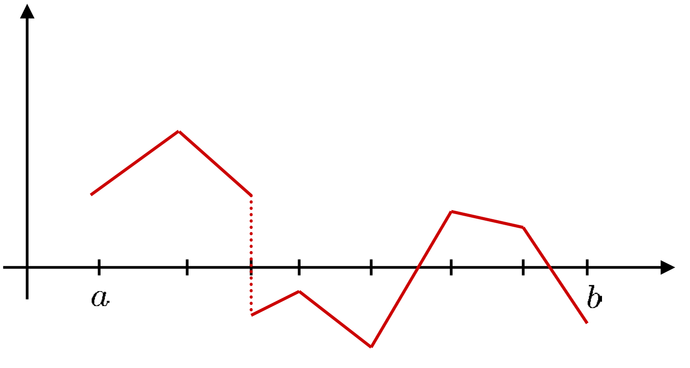
Esempio: spline lineari

- n = 1; devono essere lineari nei sottointervalli della partizione;
- devono essere continue in [a,b]

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, ..., m-1$$



Questa non è una spline lineare!



Non è continua in x_2

Osservazione

- La spline lineare relativa ad una partizione non è unica.
- Fissati i valori

$$s(x_i), \quad i = 0, ..., m+1$$

viene individuata una sola spline lineare.

- Una spline lineare relativa ad una partizione di m+2 punti dipende da m+2 parametri.

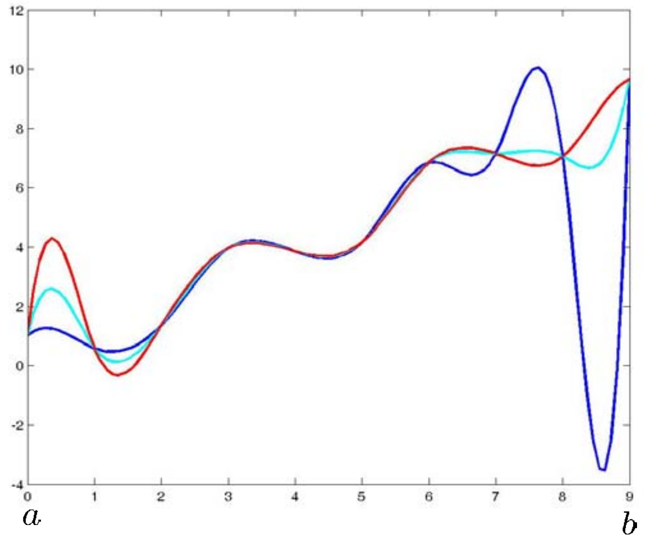
Esempio: spline cubiche

- n=3; sono polinomi di grado 3 nei sottointervalli della partizione;
- Valgono le relazioni

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, ..., m-1;$$

$$s_i{}'(x_{i+1}) = s_{i+1}{}'(x_{i+1}), \quad i = 0, ..., m-1;$$

$$s_i{}''(x_{i+1}) = s_{i+1}{}''(x_{i+1}), \quad i = 0, ..., m-1;$$



Osservazioni

- Anche fissando i valori $s(x_i)$, la spline cubica relativa ad una partizione non è unica;
- In generale , per spline di grado n

$s_i(x)$ → $n+1$ parametri

I_i → $m+1$ intervalli

→ $(m+1)(n+1)$ parametri

$$s_i^{(k)}(x_{i+1}) = s_{i+1}^{(k)}(x_{i+1})$$

$i = 0, ..., m-1; k = 0, 1, .., n-1$ → nm condizioni

→ $(n+1)(m+1) - nm = n+m+1$ parametri liberi

Per le spline cubiche

- Per una spline cubica (n=3) ci sono m+4 parametri liberi (gradi di libertà).
- Se noi fissiamo i valori $s(x_i), \; i = 0, ..., m+1$ abbiamo dato m+2 condizioni; restano altri 2 gradi di libertà.

Interpolazione con spline lineari

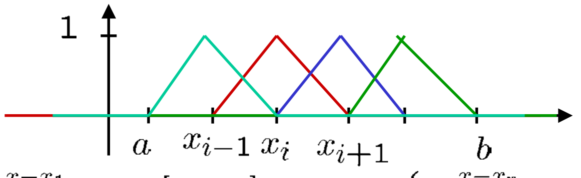
- TEOREMA
  Dati $a \geq x_0 < x_1 < ... < x_m < x_{m+1} \leq b$
  e assegnati $y_0, y_1, ..., y_m, y_{m+1}$ esiste una sola spline lineare $s(x)$ tale che

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, ..., m+1$$

Inoltre si ha

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+1} y_i l_i(x)$$

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$



$$l_0(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases} \qquad l_{n+1} = \begin{cases} \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}, & x \in [x_n, x_{n+1}]; \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$$

Analisi dell'errore

In $[x_i, x_{i+1}]$, l'errore commesso è pari a quello di interpolazione con un polinomio di grado 1.

$$f \in C^2([a,b]) \Rightarrow f(x) - s_i(x) = \frac{f'(\xi_i)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad x_i < \xi < x_{i+1}.$$

$$|f''(x)| \leq M \Rightarrow |f(x) - s_i(x)| \leq \frac{M}{2} \max |(x - x_i)(x - x_{i+1})| = \frac{M}{2} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4}$$

$$h = \max_{i=0,\ldots,n} (x_{i+1} - x_i) \Rightarrow \max_{x \in [a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{M}{8} h^2$$

Osservazioni

- La spline lineare di interpolazione non è derivabile nei nodi.
- Si cercano interpolazioni mediante spline di grado superiore.
- Non basta fissare i valori assunti nei nodi per individuare un'unica spline cubica
- Sono necessarie altre condizioni.

Interpolazione con spline cubiche

- TEOREMA
  Dati $a \geq x_0 < x_1 < ... < x_m < x_{m+1} \leq b$
  e assegnati $y_0, y_1, ..., y_m, y_{m+1}$ esiste una sola spline cubica $s(x)$ tale che

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, ..., m+1$$

e tale che valga una delle seguenti condizioni:

1. $s'(x_0) = z_0,\ s'(x_{m+1}) = z_{m+1}$, con z_0, z_{m+1} assegnati (spline cubica vincolata)
2. $s''(x_0) = s''(x_{m+1}) = 0$ (spline naturale)
3. $$\begin{aligned} y_0 &= y_{m+1} = s(x_0) = s(x_{m+1}) \\ s'(x_0) &= s'(x_{m+1}) \\ s''(x_0) &= s''(x_{m+1}) \end{aligned}$$
   (spline periodica)

Come si ricava la spline cubica di interpolazione

$$s_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x-x_i) + \gamma_i(x-x_i)^2 + \delta_i(x-x_i)^3$$

Vogliamo ricavare $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$
in funzione di $y_i = s(x_i)$ e di $z_i = s'(x_i)$

$$s_i'(x) = \beta_i + 2\gamma_i(x-x_i) + 3\delta_i(x-x_i)^2$$

$$s_i''(x) = 2\gamma_i + 6\delta_i(x-x_i)$$

$$s_i(x_i) = \alpha_i = y_i$$

$$s_i'(x_i) = \beta_i = z_i$$

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \\ s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} s_i(x_{i+1}) = y_i \\ s_i'(x_{i+1}) = z_i \end{array}} \\ \boxed{s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})} \end{cases}$$

Poniamo $h_i = x_{i+1} - x_i$.

$$\begin{cases} \alpha_i + h_i\beta_1 + h_i^2\gamma_i + h_i^3\delta_i = y_{i+1} \\ \beta_i + 2\gamma_i h_i + 3\delta_i h_i^2 = z_{i+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_i = \left[z_{i+1} + z_i - 2\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right)\right]\frac{1}{h_i^2} \\ \gamma_i = \left[3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right) - (z_{i+1} + 2z_i)\right]\frac{1}{h_i} \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma_i + 3\delta_i h_i = \gamma_{i+1}}$$

$$\boxed{h_{i+1}z_i + 2(h_i+h_{i+1})z_{i+1} + h_i z_{i+2} = 3h_{i+1}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right) + 3h_i\left(\frac{y_{i+2}-y_i}{h_{i+1}}\right)}$$

$$i = 0, ..., m-1$$

$$\underbrace{h_{i+1}z_i+2(h_i+h_{i+1})z_{i+1}+h_iz_{i+2} = 3h_{i+1}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right)+3h_i\left(\frac{y_{i+2}-y_i}{h_{i+1}}\right)}_{b_i}$$

$$i = 0, ..., m-1$$

È un sistema di m equazioni nelle m+2 incognite z_i

Spline cubica vincolata z_0, z_{n+1} assegnati.

$$Tz = b.$$

$$T = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_0 & & & \\ h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & h_{m-1} \\ & & & h_m & 2(h_{m-1}+h_m) \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -h_1z_0+b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ -h_{m-1}z_{m-1}+b_m \end{pmatrix}$$

$$h_{i+1}z_i+2(h_i+h_{i+1})z_{i+1}+h_iz_{i+2} = 3h_{i+1}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right)+3h_i\left(\frac{y_{i+2}-y_i}{h_{i+1}}\right)$$

$$i = 0, ..., m-1$$

Spline cubica naturale

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= 0 \quad s''(x_{m+1}) = 0 \\ 2\gamma_0 &= 0 \quad 2\gamma_m + 6\delta_m h_m = 0 \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_0) & h_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & h_m & 2(h_{m-1}+h_m) & h_{m-1} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3\frac{y_1-y_0}{h_0} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ 3\frac{y_{m+1}-y_m}{h_m} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{h_{i+1}z_i+2(h_i+h_{i+1})z_{i+1}+h_i z_{i+2} = 3h_{i+1}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right)+3h_i\left(\frac{y_{i+2}-y_i}{h_{i+1}}\right)}$$

$$i = 0, ..., m-1$$

Spline cubica periodica

$$\begin{aligned} y_0 &= y_{m+1} \quad s^{'}(x_0) = s^{'}(x_{m+1}) = z_0 = z_{m+1} \\ s^{''}(x_0) &= s^{''}(x_{m+1}) \\ \gamma_0 &= \gamma_n + 3\delta_m h_m \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_m) & h_m & & & h_0 \\ h_1 & 2(h_1+h_0) & h_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ h_{m-1} & & & h_m & 2(h_{m-1}+h_m) \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Teorema

Tra tutte le funzioni $f \in C^2[a,b]$ tali che

$f(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n+1, \quad x_0 \equiv a, x_{n+1} \equiv b$

e tali che vale una di queste condizioni

a) $f^{'}(x_0) = z_0, \qquad f^{'}(x_{n+1}) = z_{n+1}$

b) $f^{''}(x_0) = f^{''}(x_{n+1}) = 0$

c) $f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_{n+1}) \qquad k = 0, 1, 2$

la spline cubica di interpolazione per cui vale a) o b) o c) è quella per cui vale la proprietà di minimo

$$\int_a^b (s^{''}(x))^2 dx \leq \int_a^b (f^{''}(x))^2 dx$$

l'uguaglianza vale se e solo se $f \equiv s$.

Teorema

Sia $f \in C^2[a,b]$ e sia $s(x)$ la spline cubica interpolante f.

$$|f(x) - s(x)| \leq h^{3/2}\left(\int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

$$x \in [a,b]$$

$$|f'(x) - s'(x)| \leq h^{1/2}\left(\int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

$h = \max_{i=0,\ldots,n}(x_{i+1} - x_i)$.

Osservazioni

- La spline cubica interpolante approssima la funzione interpolata;
- Anche la derivata prima della funzione viene approssimata dalla derivata prima della spline cubica.

Stima dell'errore

$$|f(x) - s(x)| \le h^{3/2}\left(\int_a^b (f''(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

$$|f''(x)| \le M, \; x \in [a, b]$$

$$\boxed{|f(x) - s(x)| \le h^{3/2} M \sqrt{b-a}}$$

Pertanto fissato $\epsilon \ge h^{2/3} M \sqrt{b-a}$, $s(x)$ è approssimazione di $f(x)$ in $[a, b]$ entro la tolleranza ϵ.