$$\boxed{|R(x)| \le \frac{M\omega^*}{(n+1)!}}$$

- Nodi di Chebychev
- Si minimizza la quantità $\omega^* = \max_{[-1,1]} |\omega(x)|$

$[-1,1]$	$[a,b]$
$\omega^* = \dfrac{1}{2^{n-1}}$	$\omega^* = 2\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1}$

Esempio

Sia $f(x) = \ln(x)$, $[a,b] = [0.4, 0.8]$. Dati $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.7, x_3 = 0.8$ e

$$\begin{aligned}
y_0 &= \ln(x_0) = -0.916291 \\
y_1 &= \ln(x_1) = -0.693147 \\
y_2 &= \ln(x_2) = -0.356675 \\
y_3 &= \ln(x_3) = -0.223144
\end{aligned}$$

trovare una maggiorazione di $R(0.6)$

$$D^4(\ln(x)) = -6/x^4.$$

$$R(x) = \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)}{4!}\left(-\frac{6}{\xi^4}\right)$$

$$R(x) = \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)}{4!}\left(-\frac{6}{\xi^4}\right)$$

ξ dipendente da x appartiene a $(0.4, 0.8)$. Poichè $6/x^4$ è decrescente in tale intervallo con valore massimo in 0.4, si ha

$$|-6/x^4| \leq 6/(0.4)^4 = 234.4$$

$$|R(x)| \leq |(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)|\frac{234.4}{24}$$

Per $x = 0.6$,

$$|R(0.6)| \leq 0.0039$$

Esempio

- Quale dovrebbe essere il grado del polinomio di interpolazione della funzione cos(x) in [0.3,0.6] sui nodi di Chebychev per avere un errore inferiore a 10^{-6} ?

$$|R(x)| \leq \frac{M\omega^*}{(n+1)!} \leq 10^{-6}$$

Nodi di Chebychev $\Rightarrow$ $\omega^* = 2\left(\frac{0.6-0.3}{4}\right)^{n+1}$

$|f^{n+1}(x)| \leq M$ $\Leftarrow$ $M = 1$

$$|R(x)| \leq \frac{M\omega^*}{(n+1)!} \leq 10^{-6}$$

$\omega^* = 2 \cdot 0.075^{n+1}$ $\qquad M = 1$

n	$\dfrac{M\omega^*}{(n+1)!}$
2	8.4375e-004
3	6.3281e-005
4	4.7461e-006
5	3.5596e-007

$\Rightarrow \; n = 5$

Approssimazione di dati e funzioni

INTERPOLAZIONE

Interpolazione polinomiale

Polinomio di interpolazione
Lagrange
Newton
n+1 punti

Stima dell'errore

Polinomio di Taylor

- Si può derivare dal polinomio di interpolazione nella forma di Newton quando tutti i nodi “precipitano” in un unico punto.

$$f[x_0x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f'(\xi) \xrightarrow{x_1 \to x_0} f'(x_0)$$

$$\xi \in [x_0, x_1]$$

Si definiscono le differenze divise con argomenti coincidenti

$$f[x_0x_0] = f'(x_0)$$

$$f[x_0x_0x_0] = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$f[x_0x_0...x_0] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0x_1](x - x_0) + f[x_0x_1x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &\quad \ldots f[x_0x_1 \ldots x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$p_n^N(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0

Stima dell'errore

$$R(x) = f(x) - p_n^N(x)$$

- Si dimostra che se $f \in C^{n+1}([x, x_0])$

$$\boxed{R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}} \quad \xi \in [x, x_0]$$

- Se $|f^{n+1}(x)| \leq M$

$$\boxed{|R(x)| \leq \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Osservazioni

- Si ha che

$$f(x_0) - p_n^N(x_0)$$

$$f'(x_0) = p'^N_n(x_0)$$

$$f^{(n)}(x_0) = p^{(n)N}_{\ \ n}(x_0)$$

- Tutta l'informazione usata per l'approssimazione è concentrata in un punto
- L'approssimazione è buona solo vicino ad x_0

Osservazioni

- Il polinomio di Taylor centrato nel punto 0 si dice polinomio di Mac Laurin

Esempio

- Polinomio di Taylor della funzione seno

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \\ &+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos(\theta' x)\end{aligned}$$

$$0 < \theta' < 1$$

- L'errore commesso è

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)!}$$

- Si vuole determinare l'intervallo in cui il polinomio di Taylor approssima la funzione seno entro una tolleranza di 10^{-5}.

$$|R_5(x)| \leq \frac{|x^7|}{7!} \leq 10^{-5}$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq \sqrt[7]{10^{-5} \cdot 7!} = 0.6525$$

L'intervallo cercato è $[-0.6525, 0.6525]$

Esempio

Si calcoli il polinomio di Mac Laurin in $f(x) = \sqrt{1+x}$ di grado 3 e si trovi una approssimazione di $f(0.1)$ e una stima dell'errore.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} \\ f^{I}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ f^{II}(x) &= -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \\ f^{III}(x) &= \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \\ f^{IV}(x) &= -\frac{15}{16(1+x)^{7/2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_3(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3}$$

$$f(0.1) = \sqrt{1.1}$$

$$p_3(0.1) = 1+\tfrac{1}{2}0.1-\tfrac{1}{8}(0.1)^2+\tfrac{1}{16}(0.1)^3 = 1.0488125$$

$$R_3(x) = \tfrac{x^4}{4!}\left(-\tfrac{15}{16(1+\xi)^{7/2}}\right)$$

$$\begin{aligned} |R_3(x)| &\leq \frac{(0.1)^4 15}{24 \cdot 16} \max_{[0,0.1]} \frac{1}{(1+\xi)^{7/2}} \\ &= \frac{0.0005}{128} 1 \\ &\cong 3.9 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Approssimazione di dati e funzioni

INTERPOLAZIONE

Interpolazione polinomiale

Polinomio di interpolazione
Lagrange
Newton
n+1 punti

Polinomio di
Taylor
1 punto

Stima dell'errore

$$\begin{cases} -y''(x) + c(x)y(x) & = \quad f(x) \quad x \in (0,1) \\ y(0) \;\; y(1) \text{ assegnati} \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{n+1} \;\; x_i = ih \quad i = 0, ..., n+1$$

$$-y_{i-1} + (2 + h^2 c_i) y_i - y_{i+1} = h^2 f_i \quad i = 1, ..n$$

$$c_i = c(x_i) \quad f_i = f(x_i) \;\; i = 1, ..., n$$

$$\begin{pmatrix} (2+h^2c_1) & -1 & & & \\ -1 & (2+h^2c_2) & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & (2+h^2c_{n-1}) & -1 \\ & & & -1 & (2+h^2c_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + y(0) \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-1} \\ h^2 f_n + y(1) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c(x) = x} \; \boxed{f(x) = -\exp(1-x) + (16\pi^2 + x)\sin(4\pi x)}$$

$$y(x) = e^x + \sin(4\pi x)$$