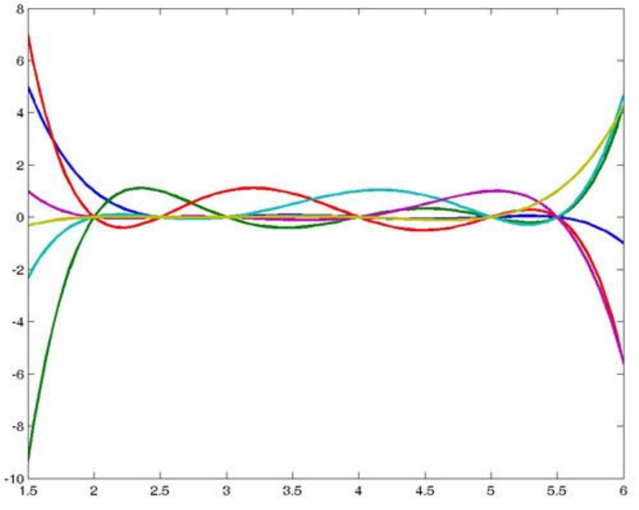
$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ $\quad\quad$ $2, 2.5, 3, 4, 5, 5.5$



Polinomio di interpolazione nella forma di Lagrange

$$\boxed{L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}} \quad k = 0, ..., n$$

Polinomio di interpolazione nella forma di Lagrange

$$\boxed{p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)}$$

Si dimostra che è IL polinomio di interpolazione.
Cambia solo la rappresentazione.

Esempio: interpolazione di funzione

$x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$. Si vuole trovare il polinomio di interpolazione di secondo grado di $f(x) = 1/x$.

$\Rightarrow y_0 = 1/x_0 = 0.5 \quad y_1 = 1/x_1 = 0.4 \quad y_2 = 1/x_2 = 0.25$

$p_2(x)$ è una parabola.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10 \\
L_1(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = (-4x^2 + 24x - 32)/3 \\
L_2(x) &= \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = (x^2 - 4.5x + 5)/3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= 0.5.(x^2 - 6.5x + 10) + 0.4.(-4x^2 + 24x - 32)/3 + \\
&+ 0.25(x^2 - 4.5x + 5)/3 = \\
&= 0.05x^2 - 0.425x + 1.15
\end{aligned}$$

Costo computazionale

- Per calcolare

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

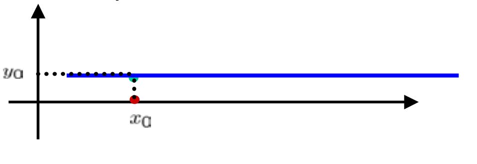
per il den. e numeratore sono necessari n-1 prodotti. $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(2n^2)$

- Non è possibile usare lo schema di Horner
- Se si aggiunge un punto di osservazione, occorre ricalcolare tutti gli $L_k(x)$

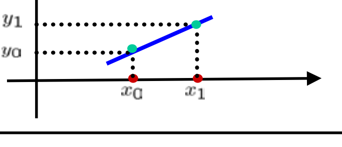
- Ricaviamo una diversa rappresentazione del polinomio di interpolazione con minore complessità computazionale e in modo da poter derivare un polinomio di grado superiore da quello di grado inferiore.

Differenze divise

- Se n=0
  - Abbiamo un solo punto (x_0, y_0)
  - $p_0(x) = y_0$



- Se n = 1
  - Abbiamo 2 punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$
  - Il polinomio cercato è la retta passante per i due punti
  - $p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$



$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$p_1(x) = p_0(x) + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Differenza divisa relativa ai nodi x_0, x_1

Se si sta interpolando una funzione si ha $y_i = f(x_i)$ e si indica come

$$\boxed{f[x_0 x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}$$

Proprietà

- Simmetria

$$f[x_0 x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1 x_0]$$

- Ricorsività

$$f[x_0 x_1 x_2] = \frac{f[x_0 x_1] - f[x_1 x_2]}{x_0 - x_2}$$

Ordine 2

$$f[x_0 x_1 \dots x_m] = \frac{f[x_0 x_1 \dots x_{m-1}] - f[x_1 x_2 \dots x_m]}{x_0 - x_m}.$$

Ordine m

$$f[x_0] = f(x_0)$$

Ordine 0

Tabella delle differenze divise

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0x_1] & & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1x_2] & f[x_0x_1x_2] & & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2x_3] & f[x_1x_2x_3] & f[x_0x_1x_2x_3] & \\
x_4 & f[x_4] & f[x_3x_4] & f[x_2x_3x_4] & f[x_1x_2x_3x_4] & f[x_0x_1x_2x_3x_4]
\end{array}
$$

Esempio. $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3;\ f(x_0) = 1,$
$f(x_1) = 3,\ f(x_2) = 2$

0	1		
1	3	$\frac{1-3}{0-1} = 2$	
3	2	$\frac{3-2}{1-3} = -\frac{1}{2}$	$\frac{2-1/2}{0-3} = -\frac{1}{2}$

Polinomio di interpolazione nella forma di Newton

- Si dimostra che il polinomio

$$
\begin{aligned}
p_n(x) \;=\; & f[x_0] + f[x_0x_1](x-x_0) + f[x_0x_1x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\
& \dots f[x_0x_1\dots x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

è il polinomio di interpolazione della funzione f nei nodi $x_0, ..., x_n$

Osservazioni

- Si può costruire in modo ricorsivo:

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + f[x_0 x_1 \ldots x_{k+1}](x-x_0)\ldots(x-x_k)$$

dove $p_k(x)$ è il polinomio di interpolazione di grado k sui k +1 nodi $x_0, ..., x_k$

Vantaggi della rappresentazione di Newton

- Aggiungere un nodo, cioè cercare il polinomio di interpolazione di grado superiore, comporta l'aggiunta di una riga della tabella delle differenze divise;
- Il polinomio può essere valutato mediante lo schema di Horner;
- La complessità computazionale è la metà rispetto alla rappresentazione di Lagrange.

Esempio di prima

$x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$. Si vuole trovare il polinomio di interpolazione di secondo grado di $f(x) = 1/x$.

$\Rightarrow y_0 = 0.5 \quad y_1 = 0.4 \quad y_2 = 0.25$

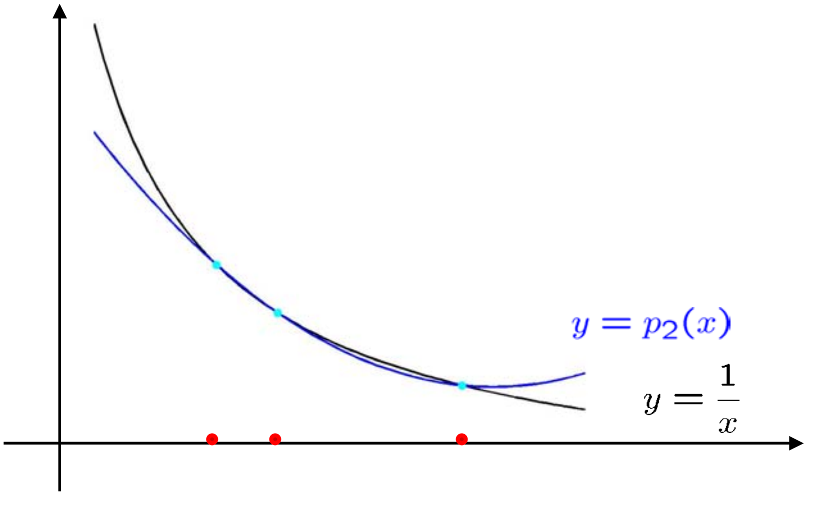
2	0.5		
2.5	0.4	$\frac{0.4-0.5}{2.5-2} = -0.2$	
4	0.25	$\frac{0.25-0.4}{4-2.5} = -0.1$	$\frac{-0.1+0.2}{4-2} = 0.05$

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0x_1](x-x_0) + f[x_0x_1x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$p_2(x) = 0.5 - 0.2(x-2) + 0.05(x-2)(x-2.5)$$

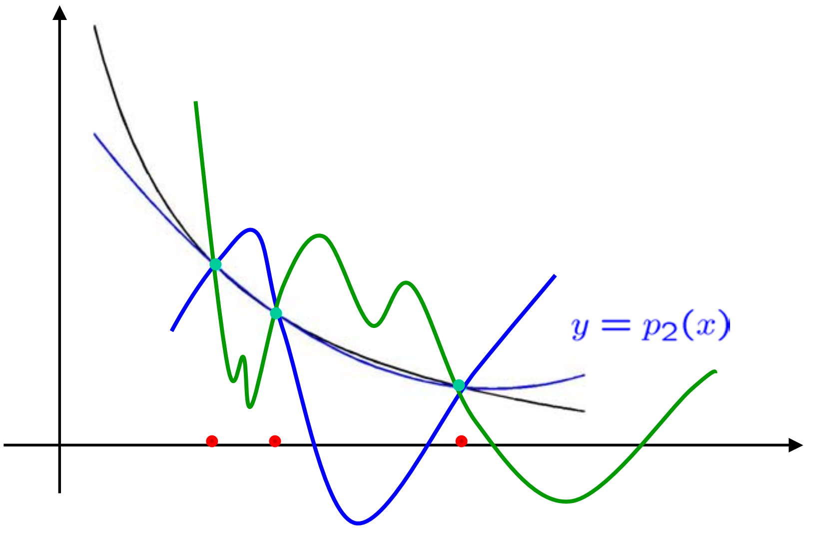
$$p_2(x) = 1.15 - 0.425x + 0.05x^2$$

Grafico



Osservazioni

- In generale, se $f(x)$ è un polinomio di grado non superiore ad n, allora $p_n(x) = f(x)$
- Altrimenti il polinomio di interpolazione assume valori diversi dalla funzione.
- Funzioni diverse possono avere lo stesso polinomio di interpolazione.



Errore di interpolazione

$$R(x) = f(x) - p_n(x)$$

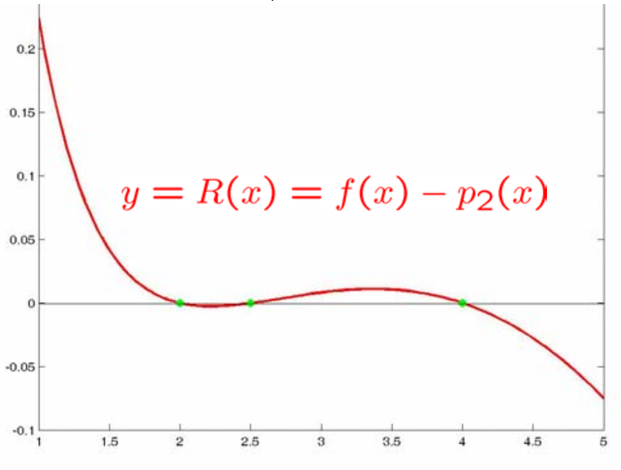
- Si ha che $p_n(x_i) = f(x_i)\ \ i = 0, ..., n$
  $R(x_i) = 0$ ma in generale $R(x) \neq 0$
- Se $f \in C^{n+1}([a, b]),\ x_0, ..., x_n \in [a, b]$ si dimostra che

$$\boxed{R(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)}$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

Grafico dell'errore

$x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4,\ f(x) = 1/x, x \in [1, 5]$,
$p_2(x) = 1.15 - 0.425x + 0.05x^2$.



Stima dell'errore

$$\boxed{R(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)}$$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \quad \xi \in [a,b]$$

Se $f \in C^{n+1}([a,b])$, allora esiste M tale che

$$|f^{n+1}(x)| \leq M$$

Anche $\omega \in C([a,b])$, quindi esiste ω^* tale che

$$|\omega(x)| \leq \omega^*$$

$$\boxed{|R(x)| \leq \frac{M\omega^*}{(n+1)!}} \quad \forall x \in [a,b]$$

Fattori che influiscono sull'errore

$$\boxed{R(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)}$$

- La regolarità della funzione f ;
- Il numero di punti su cui si interpola e quindi il grado del polinomio di intepolazione;
- La funzione $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ che dipende solo dai punti x_i

Possibili strategie per minimizzare l'errore

1. Aumentare il numero di punti
   – Significa aumentare il grado del polinomio di interpolazione

2. Rendere la quantità $\omega(x)$ più piccola possibile.
   – significa cercare i nodi che rendono la funzione $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ più piccola possibile

Primo caso

- E' vero che se aumentiamo il grado del polinomio noi rendiamo più piccolo l'errore?

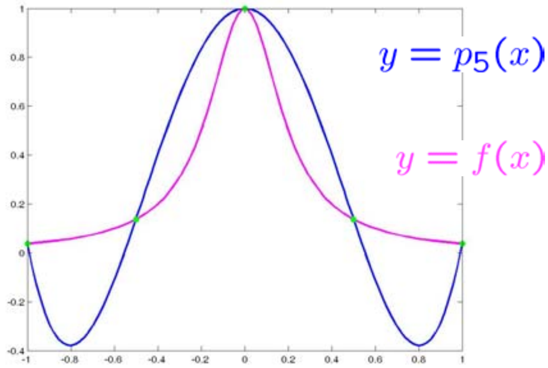
- La risposta è NO

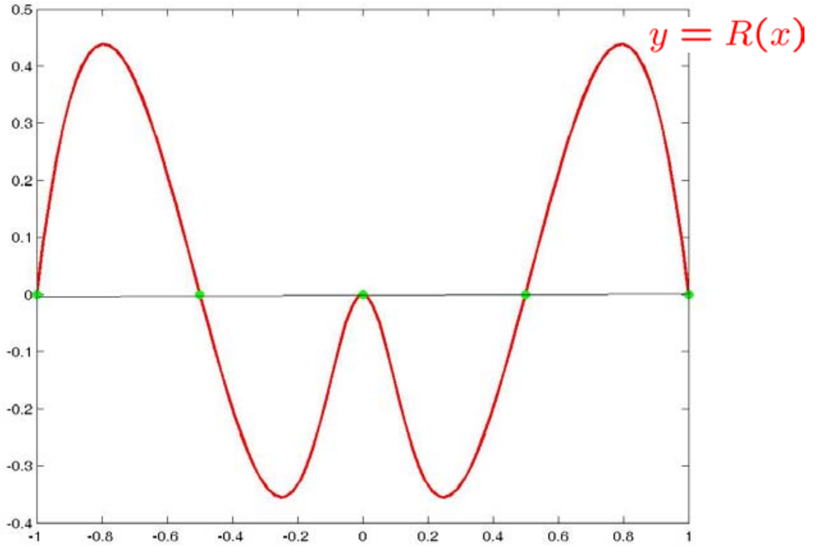
Controesempio

- Funzione di Runge $\boxed{f(x) = \frac{1}{1+25x^2}}$

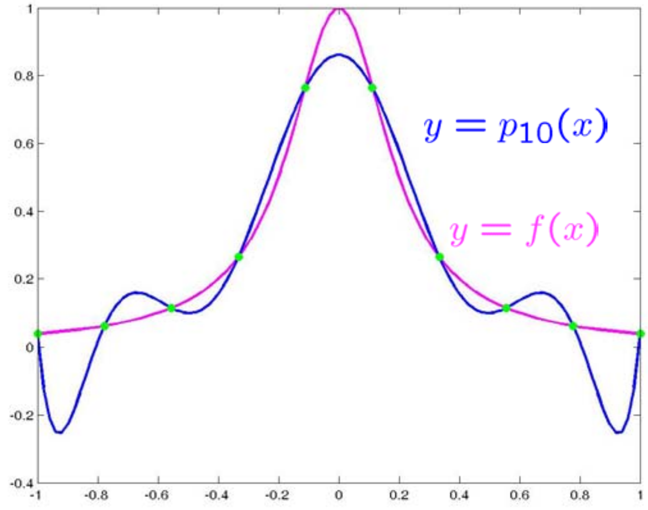
$$x \in [-1, 1] \quad x_i = -1 + \frac{i}{\;} \quad i = 0, ..., n$$

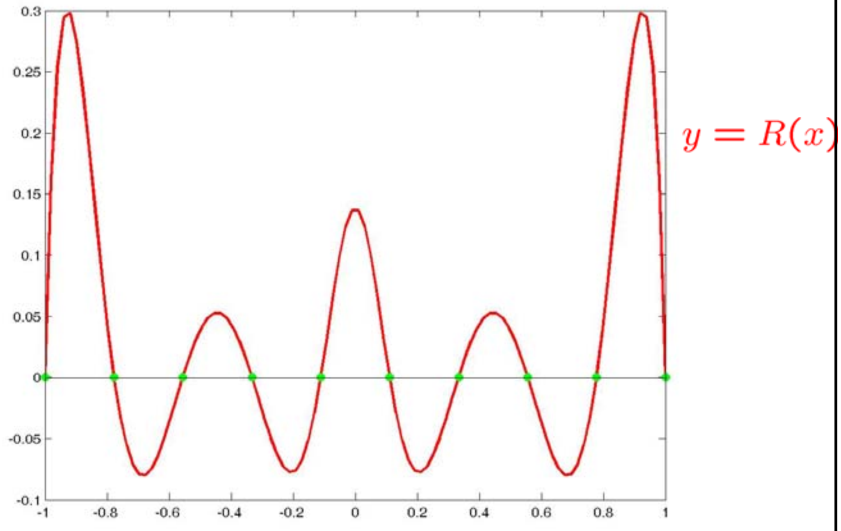
$n = 5$



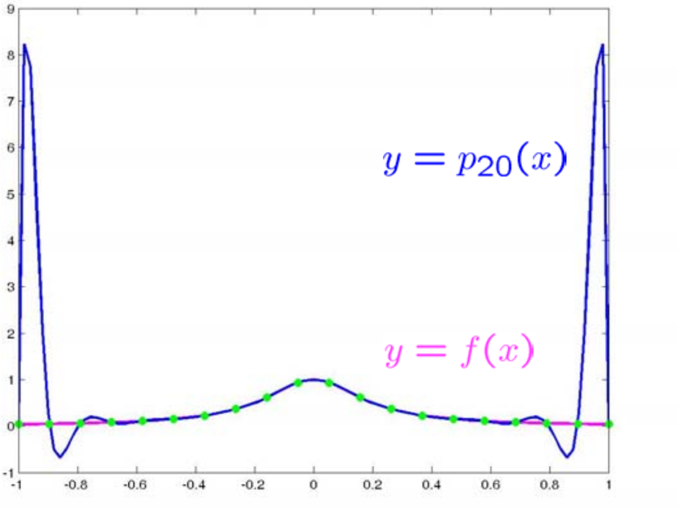


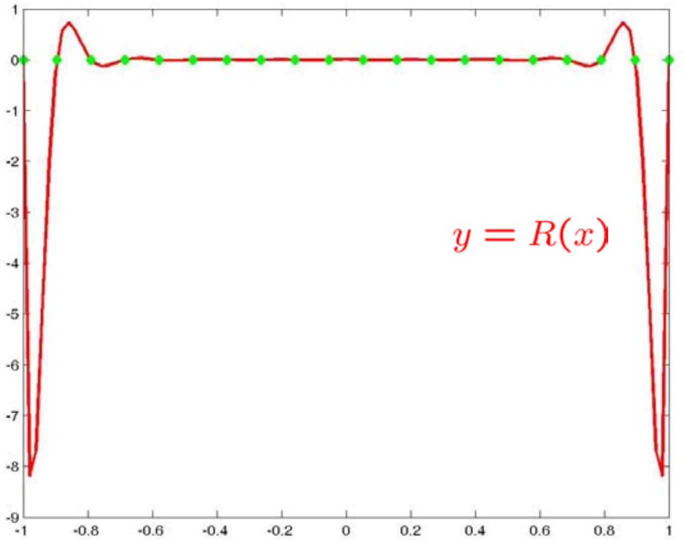
$n = 10$





$n = 20$





- Quindi non si può affermare che aumentando il grado del polinomio di interpolazione la funzione venga approssimata con più accuratezza

Secondo caso

- Cerchiamo di rendere minima la quantità

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

$$R(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

$$|R(x)| \leq \frac{M\omega^*}{(n+1)!}$$

Polinomi di Chebychev

- Sono polinomi di grado crescente definiti in [-1,1]

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \arccos(x))}$$

- Per n=0

$$T_0(x) = 1$$

- Per n=1

$$T_1(x) = x$$

Formule ricorsive

Si ottengono dalle formule di somma e sottrazione del coseno. Posto $\theta = \arccos(x)$, $T_n(\theta(x)) = \cos(n\theta)$,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\theta) &= \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ T_{n-1}(\theta) &= \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ \Rightarrow &\quad T_{n+1}(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) - T_{n-1}(\theta) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)}$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$
$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$

⬇

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

...

Osservazione

- Il coefficiente della x di grado massimo per il ploinomio di Chebychev di grado n è

$$2^{n-1}$$

Zeri dei polinomi di Chebychev

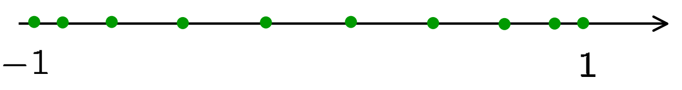
$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} \qquad k = 0, ..., n-1$$



Estensione dei polinomi di Chebychev

- Abbiamo definito i polinomi di Chebychev in [-1,1]
- Li possiamo definire in qualunque intervallo [a,b]

$$\boxed{[a, b] \xrightarrow{\mu} [-1, 1] \qquad x \rightarrow t = \frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}}$$

$$\boxed{[a, b] \xleftarrow{\mu^{-1}} [-1, 1] \qquad t \rightarrow x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}}$$

$$t_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \qquad k = 0, ..., n-1$$

$$x_k = \frac{(b-a)}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + \frac{a+b}{2}$$

Teorema

Se $s_n(x)$ è un polinomio monico (ossia con coefficiente di x^n uguale a 1) di grado n definito in $[-1, 1]$, si ha che

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| \leq \max_{x\in[-1,1]} |s_n(x)|$$

e vale che

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Osservazione

- Il polinomio $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ ha le seguenti proprietà:
  - È di grado n;
  - È monico (il coefficiente di x^n del polinomio $T_n(x)$ è proprio 2^{n-1});
  - Si annulla negli n zeri di Chebychev

$$t_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \qquad k = 0, ..., n-1$$

$$\boxed{\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = (x-t_0)(x-t_1)...(x-t_{n-1})}$$

Conclusione

- Il polinomio $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$ è monico. Per il teorema precedente si ha

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| \le \max_{x\in[-1,1]} |\omega(x)| = \omega^*$$

$$(x-t_0)(x-t_1)...(x-t_{n-1}) \qquad (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$$

Per rendere ω^* più piccola possibile dobbiamo scegliere come nodi gli zeri dei polinomi di Chebycev. In questo caso si ha anche

$$\omega^* = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Esempio di Runge