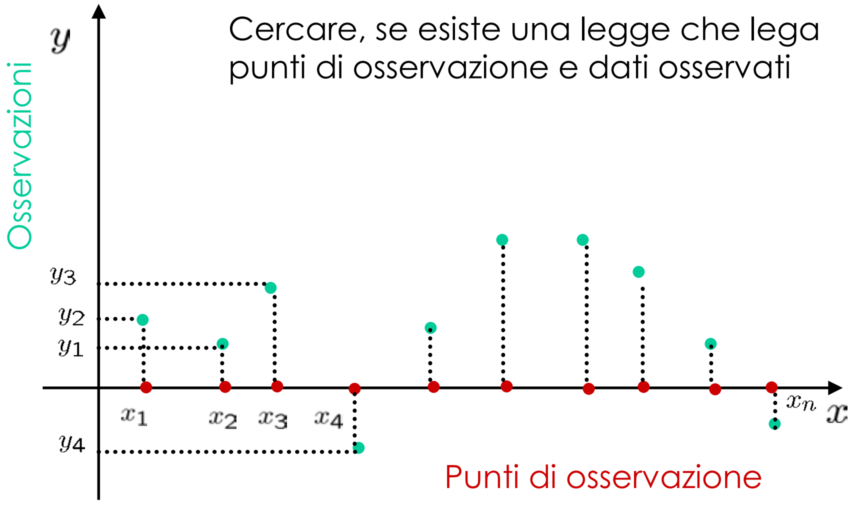
Approssimazione di dati e di funzioni

- Sostituire una funzione “complicata” con un’altra più “semplice”.
- Applicazioni
  - Non è nota l’espressione analitica della funzione ma si conoscono solo alcuni valori
  - Si deve applicare un operatore (derivata, integrale,…) ad una funzione di cui è nota l’espressione analitica o alcuni valori

Approssimazione di dati sperimentali

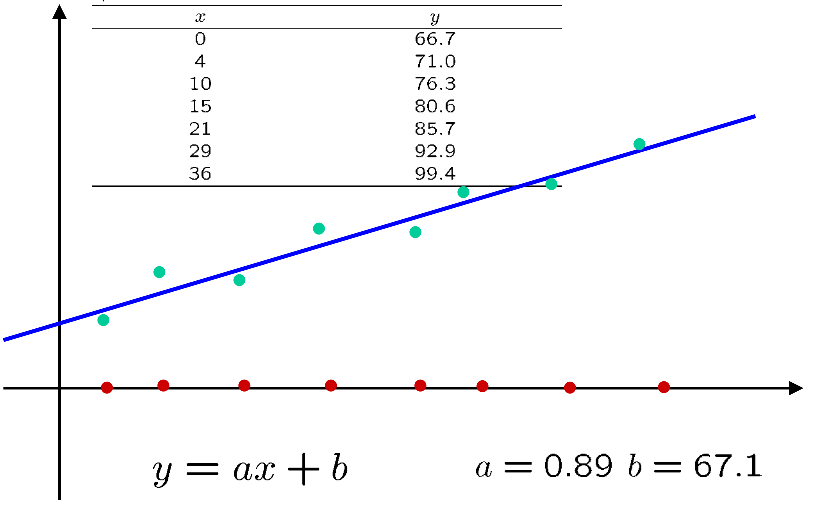
Cercare, se esiste una legge che lega punti di osservazione e dati osservati



- Si vuole costruire un modello matematico che descrive il fenomeno e permetta di fare previsioni su punti diversi da quelli di osservazione.
- La scelta del criterio di approssimazione dipende:
  - Dal tipo di problema (dai dati);
  - Da questioni numeriche.
- Vogliamo che il modello sia descritto da una funzione "semplice", facile da calcolare

Esempio

Temperatura dell'acqua	Parti di $NaNO_3$ disciolte in 100 parti d'acqua
punti di osservazione	osservazioni
x	y
0	66.7
4	71.0
10	76.3
15	80.6
21	85.7
29	92.9
36	99.4



$$y = ax + b \qquad a = 0.89 \;\; b = 67.1$$

Approssimazione di funzioni

- Sostituire una funzione di cui si conosce l'espressione analitica con una più semplice.
- Es: calcolo di derivate ed integrali

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Applicazioni pratiche

- CAD(Computer Aided Design)
- Compressione di immagini (formato JPEG)
- Ricostruzione di dati, immagini.

Approssimazione

dati

funzioni

Scegliere il tipo di modello o il tipo di funzioni "semplici" in cui cercare l'approssimazione

Definire metodi numerici con cui calcolare l'approssimazione cercata

Funzioni “semplici”:

- I polinomi:

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

- Sono semplici da derivare e da integrare.
- La valutazione di un polinomio ha basso costo computazionale (schema di Horner).
- Costruire modelli di tipo polinomiale per approssimare dati o funzioni.

Un criterio di approssimazione

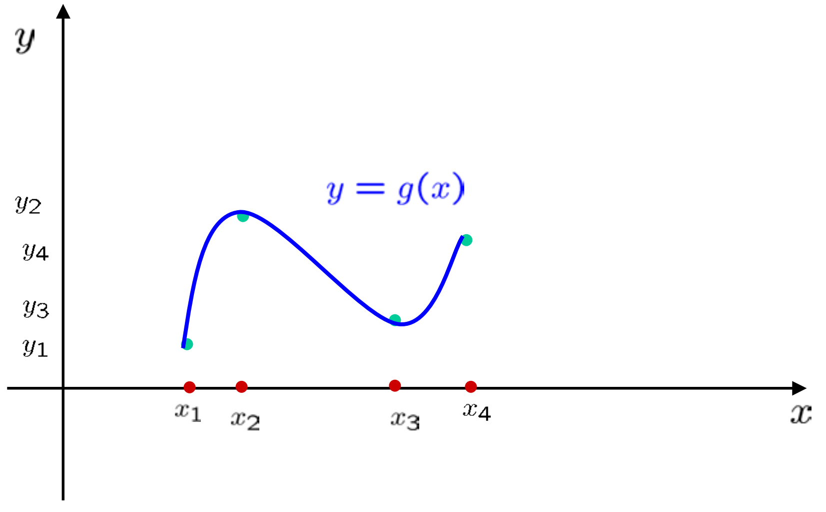
- Una prima strada per ottenere un’approssimazione g di
  - Dati (x_i, y_i)
  - Funzioni $(x_i, f(x_i))$

  è di cercare una funzione che interpoli i dati (oppure la funzione), cioè cerchiamo g tale che

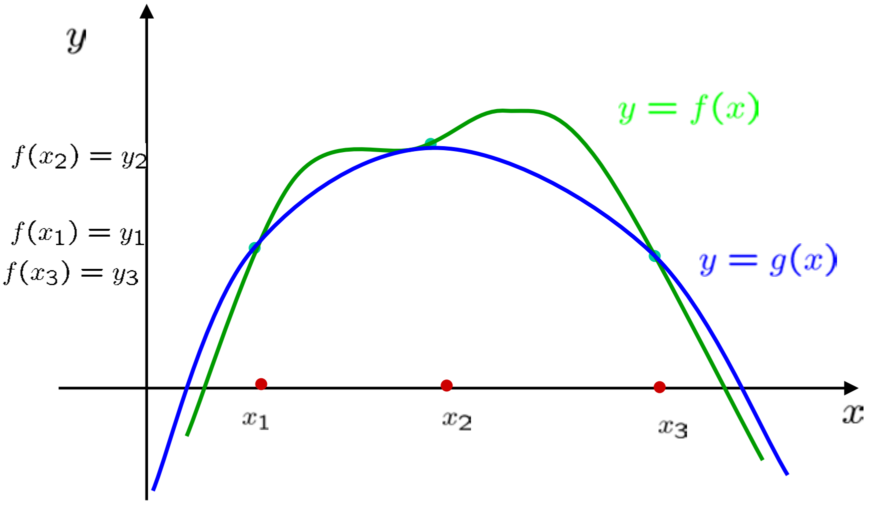
$$g(x_i) = y_i$$

$$g(x_i) = f(x_i)$$

Interpolazione di dati



Interpolazione di funzioni



Interpolazione polinomiale

- Dati n+1 punti $(x_i, f(x_i))$ esiste uno ed un solo polinomio di grado n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

tale che

$$p_n(x_i) = y_i$$

Metodo dei coefficienti indeterminati

- Le condizioni di interpolazione

$$p_n(x_i) = y_i$$

determinano un sistema nelle n+1 incognite $a_0, ..., a_n$

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n &= y_1 \\ &... \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}$$

- La matrice del sistema viene detta matrice di Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & & ... & & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix}$$

e il suo determinante vale

$$det(V) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Quindi se i punti sono distinti, la matrice V è non singolare

- se i punti sono distinti, la matrice V è non singolare e i coefficienti del polinomio di interpolazione sono le soluzioni del sistema Va=y dove

$$a = (a_0, ..., a_n)^T \quad y = (y_0, ..., y_n)^T$$

- tuttavia la matrice di Vandermonde è malcondizionata, e perciò si cercano altri metodi per calcolare il polinomio di interpolazione.

Osservazione

- Un polinomio espresso nella forma canonica

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

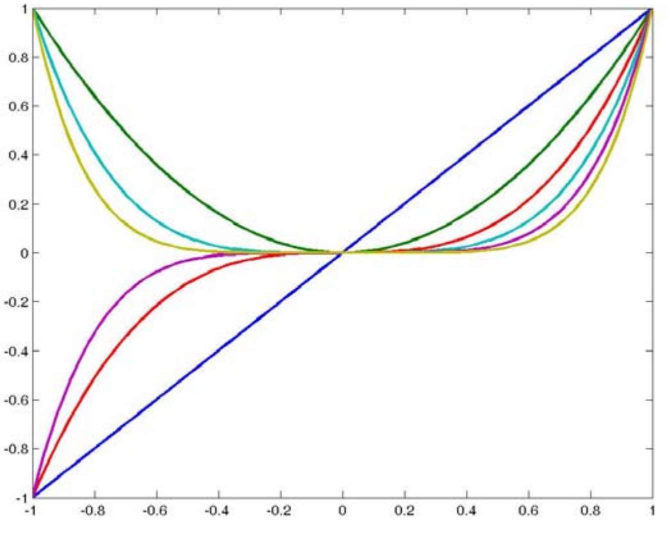
può essere visto come combinazione lineare dei monomi

$$x^0, x^1, ..., x^i, ..., x^n$$

mediante i coefficienti

$$a_0, a_1, ..., a_i, ..., a_n$$

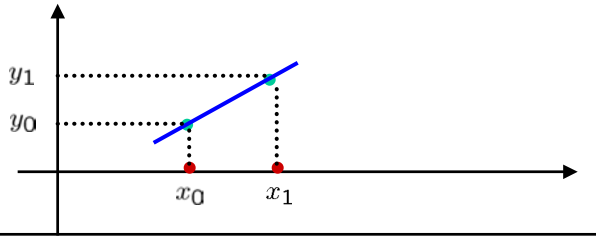
Grafico



- Cerchiamo un’altra base per rappresentare i polinomi in modo diverso.

Rappresentazione con i polinomi di Lagrange

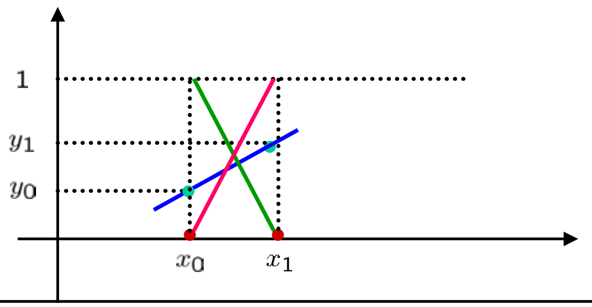
- Se n = 1
  - Abbiamo 2 punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$
  - Il polinomio cercato è la retta passante per i due punti
- Si ha $p_1(x) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$



$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

- Lo posso scrivere anche come

$$p_1(x) = \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{L_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{L_1(x)} y_1$$



Proprietà

- $p_1(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1$
- $\begin{cases} L_0(x_0) = 1 & L_1(x_0) = 0 \\ L_0(x_1) = 0 & L_1(x_1) = 1 \end{cases}$
- $L_0(x), L_1(x)$ sono polinomi di grado 1

In generale

- Cerchiamo n+1 polinomi di grado n tali che
  - Valgono 1 in uno dei punti e 0 in tutti gli altri
  - Il polinomio di interpolazione può essere espresso mediante una combinazione lineare di questi polinomi.

Base di Lagrange

$$L_k(x) = \alpha(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$L_k(x_j) = 0 \;\; j = 0, ..., n \;\; j \neq k$$

$$\alpha = \frac{1}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$L_k(x_k) = 1$$

Base di Lagrange

$$\boxed{L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}} \quad k = 0, ..., n$$

Esempio

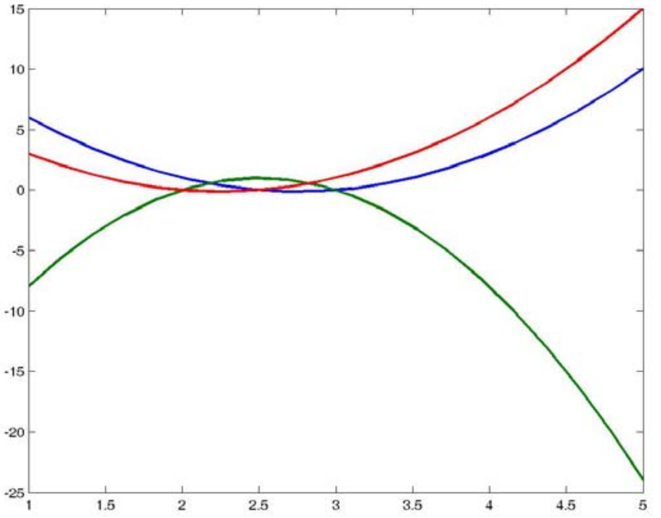
x_0, x_1, x_2 $\qquad$ $2, 2.5, 3$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2.5)(x - 3)}{(2 - 2.5)(2 - 3)}$$
$$= 2x^2 - 11x + 15$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(2.5 - 2)(2.5 - 3)}$$
$$= -4x^2 + 20x - 24$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 2)(x - 2.5)}{(3 - 2)(3 - 2.5)}$$
$$= 2x^2 - 9x + 5$$

Grafico



$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ $\quad$ $2, 2.5, 3, 4, 5, 5.5$