Metodi particolari

- Fissata M cercare una decomposizione di A $A = M - N$

$$Mx = Mx + (b - Ax)$$

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(I - M^{-1}A)}_{G}x^{(k)} + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$$

Si tratta di trovare una matrice M nonsingolare "facile".

Decomposizione di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \ddots & \\ a_{n-11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D = (a_{ii})$$

$$L = (-a_{ij}) \quad i > j$$

$$U = (-a_{ij}) \quad i < j$$

$$\boxed{A = D - L - U}$$

Metodo di Jacobi

$$A = M - N = \underbrace{D}_{M} - (\underbrace{L + U}_{N})$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{J} x^{(k)} + D^{-1} b$$

Matrice di Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -\frac{a_{43}}{a_{44}} & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{\left(-\sum_{j=1,n;j\neq i} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i\right)}{a_{ii}}}$$

Esempio

$$
\left\{\begin{array}{ccccccccc}
10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\
-x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\
3x_2 & - & x_3 & + & & & 8x_4 & = & 15
\end{array}\right.
$$

La soluzione esatta vale $x^* = (1, 2, -1, 1)^T$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} + \frac{3}{5} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k)} - \frac{3}{11}x_4^{(k)} + \frac{25}{11} \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k)} - \frac{11}{10} \\
x_4^{(k+1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8}
\end{aligned}
$$

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 & -1/5 & 0 \\ 1/11 & 0 & 1/11 & -3/11 \\ -1/5 & 1/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & -3/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 25/11 \\ -11/10 \\ 15/8 \end{pmatrix}
$$

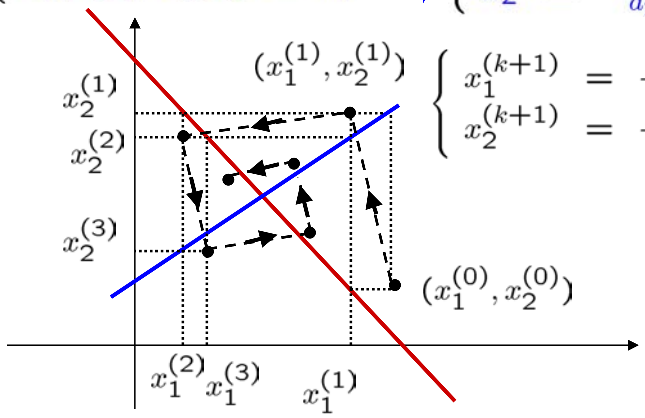
$(x^{(0)} = \vec{0})$

k	0	1	2	3	...	10
x_1	0	0.6000	1.0473	0.9326		1.0001
x_2	0	2.2727	1.7159	2.0533	...	1.9998
x_3	0	-1.1000	-0.8052	-1.0493		-0.9998
x_4	0	1.8750	0.8852	1.1309		0.9998

Il costo computazionale è pari a un prodotto matrice vettore per ogni iterazione ($\mathcal{O}(n^2)$).

Interpretazione geometrica

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{a_{22}}{a_{11}}x_2 + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{a_{22}}{a_{11}}x_2^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$

Metodo di Gauss-Seidel

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N} = (\underbrace{\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}}_{M}) - \underbrace{\boldsymbol{U}}_{N}$$

$$(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \underbrace{(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}}_{\mathcal{G}}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

$\mathcal{G}$ Matrice di Gauss-Seidel

$$\sum_{j=1,i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1,n} a_{ij}x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1,i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1,n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Esempio

$$\begin{cases} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ 3x_2 & - & x_3 & + & & & 8x_4 & = & 15 \end{cases}$$

La soluzione esatta vale $x^* = (1, 2, -1, 1)^T$

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \frac{3}{5} \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \frac{25}{11} \\ x_3^{(k)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \frac{11}{10} \\ x_4^{(k)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

$$\mathcal{G} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 10 & & & \\ -1 & 11 & & \\ 2 & -1 & 10 & \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 0 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

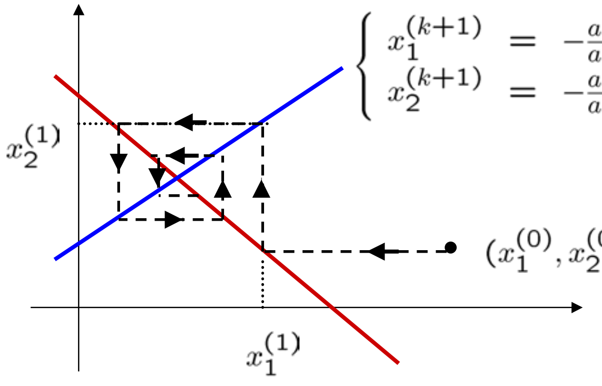
k	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0.6000	1.030	1.0065	1.0009	1.0001
x_2	0	2.3272	2.037	2.0036	2.0003	2.0000
x_3	0	-0.9873	-1.014	-1.0025	-1.0003	-1.0000
x_4	0	0.8789	0.9844	0.9983	0.99999	1.0000

Il costo computazionale è pari a un prodotto matrice vettore per ogni iterazione ($\mathcal{O}(n^2)$).

Interpretazione geometrica

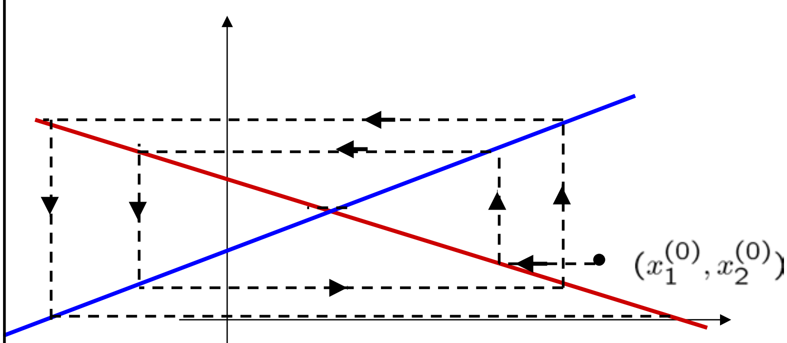
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{a_{22}}{a_{11}}x_2 + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{a_{22}}{a_{11}}x_2^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$



Osservazione

- Fallimento dei metodi. (Es. Gauss-Seidel



Trovare condizioni su A tali da garantire la convergenza dei metodi

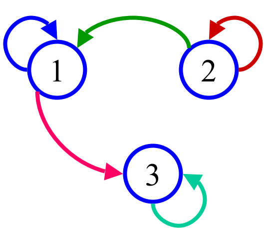
Condizioni sufficienti per la convergenza

- A strettamente diagonale dominante per righe o per colonne.
- A irriducibilmente diagonale dominante

Definizione

- Grafo associato ad una matrice di ordine n: è costituitito da n nodi e da archi orientati che collegano il nodo i al nodo j se $a_{ij} \neq 0$
- Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

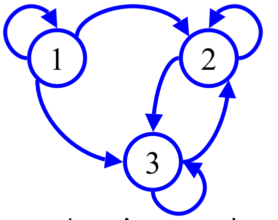


Definizioni

- Un grafo orientato si dice strettamente connesso se per ogni i, j esiste un cammino orientato (successione di archi consecutivi) che li connette.
- Una matrice A si dice irriducibile se il grafo associato ad A è strettamente connesso.

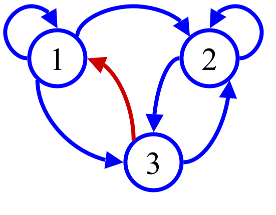
Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$



Partendo dal nodo 2 non si riesce ad arrivare al nodo 1: la matrice è riducibile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$



Tutti i nodi sono connessi: la matrice è irriducibile.

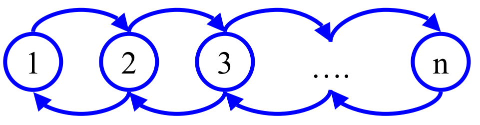
Proprietà

- Matrici tridiagonali

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Sono irriducibili se e solo se

$$\boxed{\beta_i = a_{ii+1} \neq 0} \; i = 1, n-1, \; \boxed{\gamma_i = a_{ii-1} \neq 0} \; i = 2, n$$



Definizione

- Una matrice A si dice irriducibilmente diagonale dominante per righe o per colonne se è irriducibile e diagonale dominante con almeno una riga o una colonna per cui vale la disuguaglianza in senso stretto.
- Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

E' irriducibile e diagonale dominante con la disuguaglianza in senso stretto per la seconda riga. E' irriducibilmente diagonale dominante

Proprietà

- Per le matrici irriducibilmente diagonali dominanti i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.
- Se una matrice è irriducibilmente diagonale dominante, allora è non singolare.

Conclusioni

- La complessità di un metodo iterativo è di un prodotto matrice-vettore per ogni passo.
- La struttura delle matrici non viene distrutta.
- La convergenza può essere lenta.
- Si usano per sistemi con matrice sparsa quando non è richiesta molta accuratezza nella soluzione (p. es. metodi inesatti).