Soluzione di sistemi tridiagonali

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & & & & & \\ c_2 & d_2 & b_2 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & c_i & d_i & b_i & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & c_{n-1} & d_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

$$c_i = A_{i,i-1}, \qquad d_i = A_{i,i}, \qquad b_i = A_{i,i+1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ l_2 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & l_i & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & l_{n-1} & 1 & \\ & & & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & s_1 & & & & & \\ & u_2 & s_2 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & u_i & s_i & & \\ & & & & u_{i+1} & s_{i+1} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & u_{n-1} & s_{n-1} \\ & & & & & & u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= b_i \\ &= \text{i-esima riga di L} \cdot \text{(i+1)-esima colonna di U} \\ &= s_i \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow s_i = b_i \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} &= c_i \\ &= \text{i-esima riga di L} \cdot \text{(i-1)-esima colonna di U} \\ &= l_i u_{i-1} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow l_i = \frac{c_i}{u_{i-1}} \quad i = 2, \cdots, n$$

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= d_i \\ &= \text{i-esima riga di L} \cdot \text{(i-esima colonna di U} \\ &= l_i * b_{i-1} * l_i + u_i \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} u_1 &= d_1 \\ u_i &= d_i - b_{i-1} l_i \quad i = 2, \cdots, n \end{aligned}$$

$$Ax = f$$

$$Ly = f \qquad Rx = y$$

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & f_1 \\ l_i y_{i-1} + y_i & = & f_i \end{array} \Longrightarrow y_i = f_i - l_i y_{i-1} \quad i = 2, \cdots, n$$

$$\begin{array}{rcl} u_n x_n & = & y_n \\ u_i x_i + b_i x_{i+1} & = & y_i \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_n & = & \frac{y_n}{u_n} \\ x_i & = & \frac{y_i - b_i x_{i+1}}{u_i} \end{array} \quad i = 1, \cdots, n-1$$

Soluzione di sistemi di Hessemberg

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & \cdots & a_{in} \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ & & & & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ l_1 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & l_{i-1} & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & l_{n-2} & 1 & \\ & & & & & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & r_{24} & \cdots & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & & & & \\ & & & r_{ii} & r_{ii+1} & \cdots & r_{in} \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & r_{n-1n-1} & r_{n-1n} \\ & & & & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Ax = f$$

$Ly = f$	$Rx = y$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
soluzione sist. bidiagonale	soluzione sist.triangolare sup

Residuo di un sistema

Definizione Dato un sistema

$$Ax = b$$

e un vettore w si definisce *residuo del sistema* il vettore

$$r = b - Aw$$

Stabilità del metodo di Gauss con pivoting parziale

$$A = \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{cases} \delta x_1 + x_2 = 1 + \delta \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \delta x_1 + 2 - x_1 = 1 + \delta \\ x_2 = 2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

Calcolo dell'inversa di una matrice usando il metodo di Gauss

Per definizione l'inversa di una matrice (quadrata, invertibile) A é una matrice X tale che

$$XA = AX = I$$

$e_i = (0 \cdots 010 \cdots 0)^t$i-esima colonna della matrice identità

Risolvo n sistemi

$$Ax_i = e_i$$

e definisco la matrice X in questo modo: la i-esima colonna di X é il vettore soluzione dell' i-esimo sistema x_i.
Allora si ha

$$AX = I \Longrightarrow X \text{ é l'inversa di } A$$

Stategia di pivoting totale

Al passo k si sceglie come perno l'elemento di modulo massimo della sottomatrice A_k.

$$|a_{ii}^{(k)}| = \max_{r,s} |a_{rs}^{(k)}|$$