Teoremi sulle spline cubiche

Teorema. Tra tutte le funzioni $f \in C^2[a,b]$ tali che

$$f(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n+1, \quad x_0 \equiv a, x_{n+1} \equiv b$$

e tali che vale una di queste condizioni

a) $f^{'}(x_0) = z_0, \qquad f^{'}(x_{n+1}) = z_{n+1}$
b) $f^{''}(x_0) = f^{''}(x_{n+1}) = 0$
c) $f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_{n+1}) \qquad k = 0, 1, 2$

la spline cubica di interpolazione per cui vale $a)$ o $b)$ o $c)$ è quella per cui vale la proprietà di minimo

$$\int_a^b (s^{''}(x))^2 dx \leq \int_a^b (f^{''}(x))^2 dx$$

l'uguaglianza vale se e solo se $f \equiv s$.

Dimostrazione.

$$\int_a^b (f^{''}(x) - s^{''}(x))^2 dx = \int_a^b (f^{''}(x))^2 dx - \int_a^b (s^{''}(x))^2 dx - 2 \int_a^b s^{''}(x)(f^{''}(x) - s^{''}(x)) dx$$

$$\begin{aligned}\int_a^b s''(x)(f''(x)-s''(x))dx &= \underbrace{s''(x)(f'(x)-s'(x))\Big|_a^b}_{=0 \quad per \quad a)b)c)} - \int_a^b s'''(x)(f'(x)-s'(x))dx \\ &= -\sum_{k=0}^{n} s'''(x)\underbrace{(f(x)-s(x))}_{=0}\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_a^b \underbrace{s^{IV}(x)}_{=0}(f(x)-s(x))dx\end{aligned}$$

$$\int_a^b (s''(x))^2dx \le \int_a^b (s''(x))^2dx + \int_a^b (f''(x)-s''(x))^2dx \le \int_a^b (f''(x))^2dx$$

Inoltre, se $f = s \to$ vale l'uguaglianza.

Viceversa, se vale l'uguaglianza $\to \int_a^b(f''(x)-s''(x))^2dx = 0$ e dunque

$f(x) = s(x) + mx + q$.

Poiché $f(x_0) = s(x_0)$ e $f(x_{n+1}) = s''(x_{n+1}) \to \begin{cases} mx_0 + q = 0 \\ mx_{k+1} + q = 0 \end{cases} \to m = q = 0.$

Teorema. Sia $f \in C^2[a,b]$ e sia $s(x)$ la spline cubica interpolante f.

$$|f(x) - s(x)| \leq h^{3/2}\left(\int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

$$x \in [a,b]$$

$$|f'(x) - s'(x)| \leq h^{1/2}\left(\int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

$h = \max_{i=0,\ldots,n}(x_{i+1} - x_i)$.

Dimostrazione. Dato l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, $f(x) - s(x)$ si annulla in x_{k-1} e x_k. Dunque esiste un punto c in cui $f'(x) - s'(x) = E'(x)$ è nullo.

$$\int_c^x E''(t)dt = E'(x) - E'(c) = E'(x)$$

$$|E'(x)|^2 = \left| \int_c^x E''(t)dt \right|^2 \leq \int_c^x (E''(t))^2 \int_c^x 1dt = \int_c^x (f''(t) - s''(t))^2 dt (x-c)$$

$$\begin{aligned} \int_c^x (f''(t) - s''(t))^2 dt \quad &\leq \quad \int_a^b (f''(t) - s''(t))^2 dt = \int_a^b (f''(t))^2 dt - \int_a^b (s''(t))^2 dt \\ &\leq \quad \int_a^b (f''(t))^2 dt \end{aligned}$$

$$|f'(x) - s'(x)| \leq \sqrt{\mathrm{max}_k(x_k - x_{k-1})}\left(\int_a^b (f''(t))^2 dt\right)^{1/2} = h^{1/2}\left(\int_a^b (f''(t))^2 dt\right)^{1/2}$$

con $h = \mathrm{max}_k(x_k - x_{k-1})$

Inoltre

$$\int_{x_{k-1}}^{x} E'(t)dt = E(x) - E(x_{k-1}) = E(x)$$

$$|f(x) - s(x)| \leq \int_{x_{k-1}}^{x} |E'(t)|dt \leq \mathrm{max}|E'(t)|\mathrm{max}_k|x_k - x_{k-1}| \leq h^{3/2}\left(\int_a^b (f''(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

Poiché $|f''(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, $\forall f \in C^2[a, b]$, segue che

$$|f(x) - s(x)| \leq h^{3/2} M \sqrt{b-a}$$

Pertanto fissato $\epsilon \geq h^{2/3} M \sqrt{b-a}$, $s(x)$ è approssimazione di $f(x)$ in $[a, b]$ entro la tolleranza ϵ.