Funzioni spline

Dato l'intervallo $[a, b]$, si consideri una successione finita di numeri reali (nodi) appartenenti all'intervallo, tali che $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} \leq b$ (a e b possono assumere i valori $+\infty$ e $-\infty$). Si individua in tal modo *una partizione* dell'intervallo $[a, b]$ in $m + 1$ sottointervalli $I_i = [x_i, x_{i+1})$, $I_m = [x_m, x_{m+1}]$.

Definizione. Si dice *funzione spline* di grado n o di ordine $n + 1$ relativa alla partizione $\{x_i\}_{i=0,\ldots,m+1}$ di $[a, b]$ una funzione $s(x)$ che soddisfa le seguenti due proprietà:

1. $s(x)$ è un polinomio $s_i(x)$ di grado non superiore a n in ciascun sottointervallo I_i della partizione, $i = 0, \ldots, m$;
2. $s(x) \in C^{n-1}[a, b]$, ossia la funzione e le sue derivate fino all'ordine $n - 1$ sono continue sull'intervallo $[a, b]$; ciò significa che per ogni nodo interno alla partizione valgono le seguenti condizioni:

$$s_i^{(k)}(x_{i+1}) = s_{i+1}^{(k)}(x_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, m-1; k = 0, 1, .., n-1$$

In altre parole, una spline $s(x)$ entro ciascun intervallo $I_i, i = 0, \ldots, m$ è un polinomio di grado al più n che in ogni punto interno all'intervallo è C^∞ (con valore diverso da 0 fino alla derivata n–esima) e agli estremi coincide con il polinomio relativo all'intervallo precedente (se esiste) e con quello dell'intervallo successivo (se esiste) fino alla derivata $n - 1$–esima.

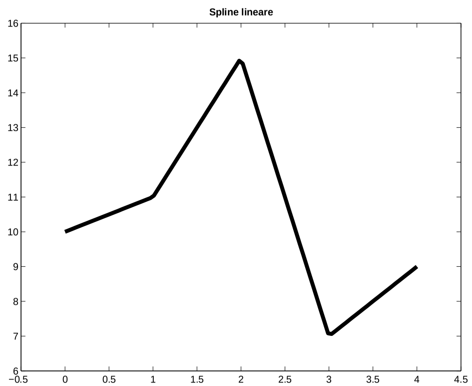
L'insieme delle spline di grado n relative alla partizione $\{x_i\}_{i=0,\dots,m+1}$ si denota con $S_n\{x_1, \dots, x_m\}$. Tale insieme contiene l'insieme dei polinomi di grado non superiore ad n.

Si osserva che la somma di funzioni spline è ancora una funzione spline e che il prodotto di uno scalare reale per una funzione spline è ancora una funzione spline. Pertanto l'insieme delle spline $S_n\{x_1, \dots, x_m\}$ è uno spazio funzionale lineare.

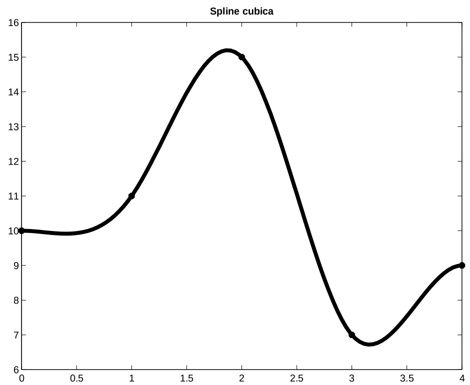
Inoltre, la derivata di una spline di grado n è una spline di grado $n-1$ relativa alla medesima partizione e l'integrale di una spline di grado n è una spline di grado $n+1$ relativa alla medesima partizione.

Ogni spline dipende da $(n+1)(m+1)$ parametri che devono soddisfare nm condizioni nei nodi interni (uguaglianza dei valori della funzione e delle derivate fino all'ordine $n-1$). Pertanto ogni spline dipende da $m+n+1$ parametri.

Esempio. Spline di grado 1: $s_i(x)$ è il segmento che unisce (x_i, y_i) con (x_{i+1}, y_{i+1}) e vale che $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$. E' una funzione di classe C^0 e dipende da $2.(m+1) - m = m+2$ parametri.



Esempio. Spline di grado 3 o cubica: $s_i(x)$ è un polinomio di grado al più 3 in $[x_i, x_{i+1}]$ e vale che $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$, ${s_i}'(x_{i+1}) = {s_{i+1}}'(x_{i+1})$, ${s_i}^{(2)}(x_{i+1}) = {s_{i+1}}^{(2)}(x_{i+1})$. Dipende da $4(m+1) - 3m = m + 4$ parametri.

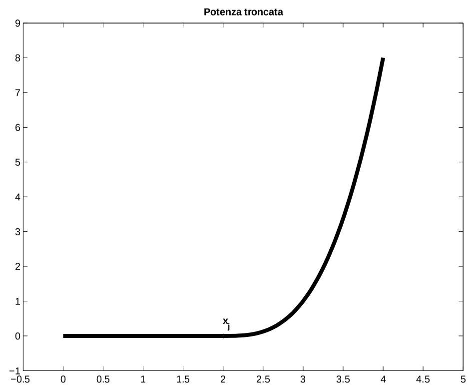


Teorema. Lo spazio delle funzioni spline $S_n\{x_1, ..., x_m\}$ è uno spazio lineare di dimensione $m+n+1$ e ogni funzione spline $s(x)$ è univocamente rappresentabile nella forma

$$s(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (x - x_j)^n{}_+$$

ove $p_n(x)$ è un polinomio di grado n e

$$(x - x_j)^n{}_+ = \begin{cases} (x - x_j)^n & \text{per } x \geq x_j \\ 0 & \text{per } x \leq x_j \end{cases}$$



Dimostrazione. Una combinazione lineare di funzione spline è una funzione spline: perciò lo spazio $S_n\{x_1, ..., x_m\}$ è lineare.

Per $j = 0, .., m$ sia $s_j(x)$ il polinomio di grado n che rappresenta la spline nell'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$. Si consideri la funzione $s_j(x) - s_{j-1}(x)$ che, nell'intervallo $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ è di classe C^{n-1}. Poichè in x_j questa funzione si annulla insieme a tutte le derivate fino all'ordine $n-1$, x_j è uno zero di molteplicità n. Inoltre, essendo la differenza tra polinomi di grado n, $s_j(x) - s_{j-1}(x)$ è un polinomio di grado n dato da

$$s_j(x) - s_{j-1}(x) = \alpha_j (x - x_j)^n, \quad j = 1, ..., m$$

Allora il polinomio che rappresenta la spline in un intervallo generico $[x_i, x_{i+1}]$ può essere scritto come:

$$s_i(x) = s_0(x) + (s_1(x) - s_0(x)) + (s_2(x) - s_1(x)) + ... + (s_i(x) - s_{i-1}(x))$$

Ponendo $s_0(x) = p_n(x)$, si ha:

$$s_i(x) = p_n(x) + \alpha_1 (x - x_1)^n + \alpha_2 (x - x_2)^n + ... + \alpha_i (x - x_i)^n$$

Poichè per $x > x_i$, $\sum_{j=i+1}^{m} \alpha_j (x - x_j)^n{}_+ = 0$, segue la tesi. Dunque ogni spline si scrive come il polinomio di grado n che rappresenta la spline nel primo sottointervallo più una combinazione di potenze troncate.

Resta da provare che la rappresentazione è unica, cioè che, per una assegnata spline, $p_n(x)$ e i coefficienti α_j, $j = 1, ..., m$ sono univocamente determinati. Per $x \leq x_1$ le potenze troncate sono nulle e dunque $s(x) = p_n(x)$. Questo polinomio è la rappresentazione della spline nel primo intervallo e quindi è univocamente determinato. Per $x > x_1$, consideriamo $s_j(x) - s_{j-1}(x) = \alpha_j (x - x_j)^n$. Differenziando n volte l'uguaglianza si ha:

$$s_j{}^{(n)}(x) - s_{j-1}{}^{(}n)(x) = n!\alpha_j.$$

Allora per $x = x_j$, $j = 1, 2, ..., m$, si ha:

$$\alpha_j = \frac{s_j{}^{(n)}(x_j+) - s_{j-1}{}^{(n)}(x_j-)}{n!}$$

Quindi α_j sono univocamente determinati.
Poichè allora ogni spline si scrive in modo unico come combinazione lineare delle funzioni:

$$1, (x - x_0), (x - x_0)^2, ..., (x - x_0)^n, (x - x_1)^n{}_+, ..., (x - x_m)^n{}_+$$

che sono linearmente indipendenti, segue che la dimensione dello spazio delle spline è $n + 1 + m$.

Definizione. Una funzione spline di grado n relativa ai nodi $x_1, \ldots, x_{m+1}$ si dice periodica di periodo $x_{m+1} - x_1$ se è una spline che soddisfa le ulteriori n condizioni:

$$s^{(k)}(x_1) = s^{(k)}(x_{m+1}), \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

Lo spazio delle funzioni spline periodiche è uno spazio lineare di dimensione m ($(n+1)m - mn = m$).

Definizione. Una funzione spline di grado dispari $n = 2k-1$ relativa ai nodi $x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}$ si dice naturale se è una spline che negli intervalli $[x_0, x_1]$ e $[x_m, x_{m+1}]$ diventa un polinomio di grado $k-1$. Di conseguenza $s^{(j)}(x_0) = s^{(j)}(x_{m+1}) = 0$, $j = k, k+1, \ldots, 2k-2$.

Per esempio una spline cubica è naturale se nel primo e nell'ultimo intervallo è un segmento. Pertanto $s''(x_0) = s''(x_{m+1}) = 0$.

Teorema. Una funzione spline naturale è univocamente rappresentabile nella forma

$$s(x) = p_{k-1}(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (x - x_j)^n{}_+$$

ove $p_{k-1}(x)$ è un polinomio di grado $k-1$ e i coefficienti α_j soddisfano le k condizioni:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j^r = 0, \quad r = 0, .., k-1$$

Dimostrazione. Poichè una spline naturale è una spline, si può rappresentare come:

$$s(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (x - x_j)^n{}_+$$

ove, in questo caso, $p_n(x)$ deve essere un polinomio di grado $k-1$, poichè è il polinomio che rappresenta la spline nel primo intervallo $[x_0, x_1]$. Dunque $p_n(x) = p_{k-1}(x)$. Inoltre per $x > x_m$, la spline deve essere un polinomio di grado $k-1$ e quindi tutti i coefficienti dei termini x^r, con $r = k, .., n$ devono essere nulli. Poichè $(x - x_j)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{n-r} (-1)^r x_j^r$, segue che deve essere nullo il coefficiente di x^{n-r}, $r = 0, ..., k-1$, ossia deve valere $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j^r = 0$.

La rappresentazione di una spline può essere fatta in modo analogo partendo da sinistra verso destra e considerando le potenze troncate $(x_j - x)^n{}_+$.

Interpolazione con Spline Lineari

Teorema Dati $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ nodi distinti in $[a,b]$ tali che $x_0 \geq a$, $x_{n+1} \leq b$ e $x_i < x_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$ e assegnati $y_0, \ldots, y_{n+1}$, esiste una e una sola spline lineare $s(x)$ tale che $s(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n+1$.

È

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+1} y_i l_i(x)$$

con

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

per $i = 1, \ldots, n$.

$$l_0(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases} \qquad l_{n+1} = \begin{cases} \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}, & x \in [x_n, x_{n+1}]; \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$$

Dimostrazione. Detta $s_i(x)$ la spline in $[x_i, x_{i+1}]$, deve essere $s_i(x) = m^{(i)}x + q^{(i)}$, $i = 0, \ldots, n$.
Inoltre deve essere $s(x_i) = y_i$, $s(x_{i+1}) = y_{i+1}$.

Da cui $\begin{cases} m^{(i)}x_i + q^{(i)} = y_i \\ m^{(i)}x_{i+1} + q^{(i)} = y_{i+1} \end{cases}$ e poinché $\begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

il sistema ammette una e una sola soluzione

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}x + \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{x - i - x_{i+1}} \\ &= y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = y_i l_i(x) + y_{i+1} l_{i+1}(x) \end{aligned}$$

per $x \in [x_i, x_{i+1}]$

Analisi dell'errore

In $[x_i, x_{i+1}]$, l'errore commesso è pari a quello di interpolazione con un polinomio di grado 1.

Se $f \in C^2([a,b])$,
$\left(f(x) - s_i(x) \right) = \frac{f^{'}(\xi_i)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad x_i < \xi < x_{i+1}.$
Se $|f^{''}(x)| \leq M$ per $x \in [a,b]$, segue $|f(x) - s_i(x)| \leq \frac{M}{2}\text{max}|(x - x_i)(x - x_{i+1})| = \frac{M}{2}\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4}$.
Posto $h = \text{max}_{i=0,\ldots,n}(x_{i+1} - x_i)$

$$\|f(x) - s(x)\|_\infty \leq \frac{M}{8}h^2$$

La complessità del metodo è di 4 prodotti e 4 addizioni.

Osservazione

L'insieme delle funzioni $l_0(x), \ldots, l_{n+1}(x)$ è una base per lo spazio vettoriale delle spline lineari.

Infatti si tratta di $n+2$ funzioni linearmente indipendenti, ove $n+2$ è la dimensione dello spazio delle spline.

$$\sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j l_j(x) = 0 \rightarrow x = x_k, \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j l_j(x) = \alpha_k = 0$$

Si consideri la matrice di Gram:

$$G = \begin{pmatrix} l_0(\xi_0) & l_1(\xi_0) & \ldots & l_{n+1}(\xi_0) \\ l_0(\xi_1) & l_1(\xi_1) & & l_{n+1}(\xi_1) \\ \vdots & & & \\ l_0(\xi_{n+1}) & & & l_{n+1}(\xi_{n+1}) \end{pmatrix} \text{ ove } \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{n+1}$$

Se $\xi_i = x_i$ nodi della partizione delle spline, $G = I$ e il problema ha una e una sola soluzione.

Ciò non vale per ξ_i qualunque.

$$G \text{ è non singolare} \Longleftrightarrow x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1},\ i = 0, \ldots, n+1$$

(**Lemma di Schoenberg Whitney**)

$\Longrightarrow$ tale base non è un sistema di Chebyshev.

Interpolazione di Hermite tramite polinomi cubici a tratti

Assegnati nodi $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} \leq b$, si vuol determinare una funzione $g(x)$ che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$ è un polinomio cubico e tale che, se $\widetilde{s}_i(x)$ rappresenta tale funzione in $[x_i, x_{i+1}]$ vale che

$$\begin{array}{ll} \widetilde{s}_i(x_i) = y_i & \widetilde{s}_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ \widetilde{s}_i^{\,'}(x_i) = z_i & \widetilde{s}_i^{\,'}(x_{i+1}) = z_{i+1} \end{array} \qquad i = 0, \ldots, n$$

Si assume che $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$ e $z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}$ siano assegnati.

Dall'interpolazione di Hermite, si ha

$$\begin{array}{llllll}
x_i \to y_i & & & & & \\
x_i \to y_i & \searrow\!\!\to & z_i & & & \\
x_{i+1} \to y_{i+1} & \searrow\!\!\to & f[x_i x_{i+1}] = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} & \searrow\!\!\to & \frac{f[x_i x_{i+1}]-z_i}{x_{i+1}-x_i} & \\
x_{i+1} \to y_{i+1} & \searrow\!\!\to & z_{i+1} & \searrow\!\!\to & \frac{z_{i+1}-f[x_i x_{i+1}]}{x_{i+1}-x_i} & \searrow\!\!\to \quad \frac{z_{i+1}+z_i-2f[x_i x_{i+1}]}{(x_{i+1}-x_i)^2}
\end{array}$$

Posto $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$

$$\widetilde{s}_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^2(x - x_{i+1})$$

$$\begin{aligned} a_i &= y_i \\ b_i &= z_i \\ c_i &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - z_i}{h_i} \\ d_i &= \frac{z_{i+1} - z_i - 2f[x_i x_{i+1}]}{h_i^2} \end{aligned}$$

Interpolazione cubica a tratti di Bessel

Si approssimano i valori delle derivate prime nei nodi con la formula

$$z_i = \frac{h_{i-1} f[x_i x_{i+1}] + h_i f[x_{i-1}, x_i]}{h_i + h_{i-1}}$$

ove si aggiungono due nodi

$$\begin{aligned} x_{-1} &= x_0 - h_0 \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + h_n \end{aligned}$$

È un modo per approssimare le derivate prime di una funzione incognita nei nodi.

Il polinomio si valuta in ξ con lo schema di Horner. Se $\xi \in (x_i, x_{i+1})$.

$$\begin{cases} p = d_i(\xi - x_{i+1}) + c_i \\ p = p(\xi - x_i) + b_i \\ p = p(\xi - x_i) + a_i \end{cases}$$

Osservazione

L'interpolazione mediante spline lineare determina una funzione di approssimazione non derivabile nei nodi x_i $(i = 0, \ldots, n+1)$.

Nelle applicazioni, spesso si richiede che l'approssimazione sia derivabile. Dunque si preferisce interpolare in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ con polinomi di Hermite di grado 3 essendo noti $f(x_i), f(x_{i+1}), f^{'}(x_i), f^{'}(x_{i+1})$, ottenendo una funzione continua e derivabile.

Tuttavia in questo caso è necessario conoscere $f^{'}(x_i)$, $i = 0, \ldots, n+1$, il che non è sempre possibile.

Ci si pone il problema di trovare un approssimante dato da un polinomio di grado 3 a tratti, che sia almeno continuo e derivabile senza conoscere i valori delle derivate prime nei nodi x_i.

Il problema è risolto dall'interpolazione mediante spline cubiche interpolanti.

Teorema. Sia data $\{x_i\}_{i=0,\dots,n+1}$ una partizione dell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ con $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} \leq b$ e siano y_0, y_1, y_{n+1} assegnati.

Esiste una e una sola spline cubica interpolante in $S\{x_1,\dots,x_n\}$ tale che $s(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n+1$ e tale che vale una delle seguenti condizioni:

a) $s^{'}(x_0) = z_0$, $s^{'}(x_{n+1}) = z_{n+1}$, con z_0, z_{n+1} assegnati (spline cubica)
b) $s^{''}(x_0) = s^{''}(x_{n+1}) = 0$ (spline Naturale)
c)

$$\begin{aligned} y_0 &= y_{n+1} = s(x_0) = s(x_{n+1}) \\ s^{'}(x_0) &= s^{'}(x_{n+1}) \\ s^{''}(x_0) &= s^{''}(x_{n+1}) \end{aligned}$$

(spline periodica di periodo $(x_{n+1} - x_0)$)

Sia $s_i(x)$ la funzione polinomiale di grado 3 definita in $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Sia $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Allora

$$s_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i(x - x_i)^2 + \delta_i(x - x_i)^3$$

$$\text{Deve valere che} \left\{ \begin{array}{l} s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s_i^{'}(x_{i+1}) = s_{i+1}^{'}(x_{i+1}) \\ s_i^{''}(x_{i+1}) == s_{i+1}^{''}(x_{i+1}) \end{array} \right. \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

Inoltre

$$\begin{aligned} s_i^{'}(x) &= \beta_i + 2\gamma_i(x - x_i) + 3\delta_i(x - x_i)^2 \\ s_i^{''}(x) &= 2\gamma_i + 6\delta_i(x - x_i) \end{aligned}$$

Se sono noti i valori di y_i e di z_i ($i = 0, \ldots, n+1$) nei nodi allora $s_i(x)$ è completamente determinato.

$$\begin{array}{l} s_i(x_i) = \alpha_i = y_i \\ s_i^{'}(x_i) = \beta_i = z_i \end{array} \qquad i = 0, \ldots, n+1$$

Vale che

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^2(x - x_{i+1})$$

Poichè $x - x_{i+1} = x - x_i + x_i - x_{i+1}$, vale che

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= a_i = y_i \\
\beta_i &= b_i = z_i \\
\gamma_i &= c_i - d_i h_i = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - z_i}{h_i} - d_i h_i \\
\delta_i &= d_i = \frac{z_{i+1} + z_i - 2f[x_i x_{i+1}]}{h_i^2}
\end{aligned}$$

Basta determinare z_i, $i = 0, \ldots, n+1$.

Vale che

$$\begin{aligned} s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) & \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 2\gamma_i + 6\delta_i h_i &= 2\gamma_{i+1} \\ c_i - d_i h_i + 3d_i h_i &= c_{i+1} - d_{i+1} h_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f[x_i x_{i+1}] - z_i}{h_i} \quad - & \quad \frac{z_i + z_{i+1} - 2f[x_i x_{i+1}]}{h_i} + 3\frac{z_i + z_{i+1} - 2f[x_i x_{i+1}]}{h_i} \\ = & \quad \frac{f[x_{i+1} x_{i+2}] - z_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{z_{i+1} + z_{i+2} - 2f[x_{i+1} x_{i+2}]}{h_{i+1}} \end{aligned}$$

$$\frac{z_i}{h_i} + 2z_{i+1}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) + \frac{z_{i+2}}{h_{i+1}} = \frac{3}{h_i} f[x_i x_{i+1}] + \frac{3}{h_{i+1}} f[x_{i+1}, x_{i+2}]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} h_{i+1} z_i + 2(h_i + h_{i+1}) z_{i+1} + h_i z_{i+2} = 3(h_{i+1} f[x_i x_{i+1}] + h_i f[x_{i+1} x_{i+2}]) = b_{i+1} \\ i = 0, \ldots, n-1 \end{array}}$$

Caso a: z_0, z_{n+1} assegnati.

$$Tz = b \qquad z = [z_1, \ldots, z_n]^T$$

$$T = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_0 & & & \\ h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ & & & h_n & 2(h_{n-1}+h_n) \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -h_1 z_0 + b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ -h_{n-1} z_{n-1} + b_n \end{pmatrix}$$

T è di ordine n, strettamente diagonale dominante e quindi non singolare $\longrightarrow$ esiste una e una sola spline cubica interpolante.

Caso b:

$$
\begin{array}{rcl}
s''(x_0) & = & 0 \quad s''(x_{n+1}) = 0 \\
2\gamma_0 & = & 0 \quad 2\gamma_n + 6\delta_n h_n = 0
\end{array}
$$

$$
\frac{f[x_0x_1] - z_0}{h_0} - \frac{z_0 + z_1 - 2f[x_0x_1]}{h_0} = 0
$$

$$
\frac{f[x_nx_{n+1}] - z_n}{h_n} + 2\frac{z_n + z_{n+1} - 2f[x_nx_{n+1}]}{h_n} = 0
$$

Allora

$$
\begin{array}{rcl}
2z_0 + z_1 & = & 3f[x_0x_1] \\
z_n + 2z_{n+1} & = & 3f[x_nx_{n+1}]
\end{array}
$$

$$
Tz = b \qquad z = [z_0, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}]^T
$$

$$
T = \begin{pmatrix}
2 & 1 & & & \\
h_1 & 2(h_1 + h_0) & h_0 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & h_n & 2(h_{n-1} + h_n) & h_{n-1} \\
 & & & 1 & 2
\end{pmatrix}
\qquad
b = \begin{pmatrix}
3f[x_0x_1] \\
b_1 \\
\vdots \\
b_n \\
3f[x_nx_{n+1}]
\end{pmatrix}
$$

T è di ordine $n+2$, strettamente diagonale dominante e dunque non singolare.

Esiste una e una sola spline naturale.

Caso c:

$$\begin{aligned} y_0 &= y_{n+1} \quad s^{'}(x_0) = s^{'}(x_{n+1}) = z_0 = z_{n+1} \\ s^{''}(x_0) &= s^{''}(x_{n+1}) \\ \gamma_0 &= \gamma_n + 3\delta_n h_n \end{aligned}$$

$$\frac{f[x_0 x_1] - z_0}{h_0} - \frac{z_0 + z_1 - 2f[x_0 x_1]}{h_0} = \frac{f[x_n x_{n+1}] - z_n}{h_n} + 2\frac{z_n + z_{n+1} - 2f[x_n x_{n+1}]}{h_n}$$

$$2(h_0 + h_n)z_0 + h_n z_1 + h_0 z_n = \underbrace{3h_0 f[x_n x_{n+1}] + 3h_n f[x_0 x_1]}_{=b_0}$$

$$Tz = b \qquad z = [z_0, z_1, \ldots, z_n]^T$$

$$T = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_n) & h_n & & & h_0 \\ h_1 & 2(h_1+h_0) & h_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ h_{n-1} & & & h_n & 2(h_{n-1}+h_n) \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

T è di ordine $n+1$ ed è strettamente diagonale dominante e non singolare.

Esiste una sola spline periodica.