Differenze divise e polinomio di interpolazione di Newton

Si deriva una **diversa rappresentazione** del polinomio di interpolazione di Lagrange che consenta di calcolarlo con una minore complessità e di derivare da un polinomio di grado n uno di grado superiore se si aggiungono coppie di dati (x_i, y_i) usando i calcoli eseguiti.

Esempio. Dato (x_0, y_0), $p_0(x) = y_0$.
Se si considera oltre (x_0, y_0) anche (x_1, y_1), si ha

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x_1 y_0 - x y_0 + x y_1 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 \\
&= \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1 + x_0 y_1 - y_0 x_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \\
&= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) = p_0(x) + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)
\end{aligned}$$

Si dice **differenza divisa** di $f(x)$ relativa ai nodi x_0, x_1 la quantità

$$f[x_0 x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1 x_0]$$

Si dice **differenza divisa di ordine 2** di $f(x)$ relativa agli argomenti x_0, x_1, x_2 la quantità

$$f[x_0 x_1 x_2] = \frac{f[x_0 x_1] - f[x_1 x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{f[x_2 x_1] - f[x_1 x_0]}{x_2 - x_0} = f[x_2 x_1 x_0]$$

Detta **differenza divisa di ordine 0** relativa all'argomento x_0 di $f(x)$ la quantità $f[x_0] = f(x_0)$, si definisce **differenza divisa di ordine** m $(m \geq 1)$ di $f(x)$ relativa a $m+1$ argomenti $x_0, x_1, \ldots, x_m$ la quantità

$$f[x_0 x_1 \ldots x_m] = \frac{f[x_0 x_1 \ldots x_{m-1}] - f[x_1 x_2 \ldots x_m]}{x_0 - x_m}.$$

Questi risultati si riassumono nella seguente

Tabella delle differenze divise

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 \longrightarrow f[x_0] & & & & \\
x_1 \longrightarrow f[x_1] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_0x_1] & & & \\
x_2 \longrightarrow f[x_2] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_1x_2] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_0x_1x_2] & & \\
x_3 \longrightarrow f[x_3] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_2x_3] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_1x_2x_3] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_0x_1x_2x_3] & \\
x_4 \longrightarrow f[x_4] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_3x_4] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_2x_3x_4] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_1x_2x_3x_4] \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & f[x_0x_1x_2x_3x_4]
\end{array}
$$

Esempio. $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3;\ f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 3,\ f(x_2) = 2$

$$
\begin{array}{lll}
0 \longrightarrow 1 & & \\
1 \longrightarrow 3 \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & 2 & \\
3 \longrightarrow 2 \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & -\dfrac{1}{2} \begin{smallmatrix}\searrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & -\dfrac{5}{6}
\end{array}
$$

$f[x_0x_1] = \frac{1-3}{0-1} = 2$

$f[x_1x_2] = \frac{3-2}{1-3} = -\frac{1}{2}$

$f[x_0x_1x_2] = \frac{2-\frac{1}{2}}{0-3} = -\frac{5}{6}$

Teorema. Le differenze divise sono funzioni simmetriche dei loro argomenti, ossia se $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ è una permutazione di $\{0, 1, \ldots, m\}$,

$$f[x_{i_0} x_{i_1} \ldots x_{i_m}] = f[x_0 x_1 \ldots x_m].$$

Inoltre

$$f[x_0 x_1 \ldots x_m] = \sum_{j=0}^{m} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i\neq j}^{m} (x_j - x_i)}$$

Dati $n + 1$ nodi distinti $x_0, x_1, \ldots, x_m$ e assegnati valori di $f(x)$ in x_i, $i = 0, \ldots, n$, $f(x_i) = y_i$, è noto che esiste uno e un solo polinomio di interpolazione di grado al più n tale che $f(x_i) = y_i = p_n(x_i)$.

Nella rappresentazione di Lagrange, il coefficiente di x^n di $p_n(x)$ è

$$\frac{f(x_0)}{\prod_{i=1}^{n} (x_0 - x_i)} + \frac{f(x_1)}{\prod_{i=0, i\neq 1}^{n} (x_1 - x_i)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x_j - x_i)} = f[x_0 \ldots x_n]$$

Osservazione. Sia $f(x) = p_n(x)$ polinomio di grado al più n.

$f[xx_0] = \frac{p_n(x) - p_n(x_0)}{x - x_0} = q(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$ al più.

$f[xx_0x_1] = \frac{q(x) - q(x_1)}{x - x_1} = r(x)$ è un polinomio di grado al più $n - 2$.

Pertanto, la differenza divisa di ordine n $f[xx_0 \dots x_{n-1}]$ di un polinomio di grado n è una costante; le differenze divise di ordine maggiore di n sono nulle.

Sia $f(x) = p_n(x)$.
$f[xx_0] = \frac{p_n(x) - p_n(x_0)}{x - x_0} = q_{n-1}(x)$ quoziente di $\frac{p_n(x)}{x - x_0}$
$f[xx_0x_1] = \frac{f[x_1x_0] - f[x_0x_1]}{x - x_1} = \frac{q_{n-1}(x) - q_{n-1}(x_1)}{x - x_1} = q_{n-2}(x)$
$\vdots$
$f[xx_0x_1 \dots x_{n-1}] =$costante
$f[xx_0x_1 \dots x_n] = 0$
Differenze divise di ordine $\geq n + 1$ sono nulle.

Polinomio di Newton

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0x_1](x-x_0) + f[x_0x_1x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ &\quad \dots f[x_0x_1\dots x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Teorema. Sia $p_k(x)$ in polinomio di grado k tale che $p_k(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, k$.
Allora

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + f[x_0x_1\dots x_{k+1}](x-x_0)\dots(x-x_k)$$

è un polinomio di grado $k+1$ tale che $p_{k+1}(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, k+1$.

Dimostrazione. Sia $g(x)$ il polinomio di grado $k+1$ di interpolazione in $x_0, \dots, x_k$.
Vale che $p_{k+1}(x_i) = p_k(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, k$.
Inoltre il coefficiente di x^{k+1} di $p_{k+1}(x)$ è

$$f[x_0\dots x_{k+1}] = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i\neq j} (x_j - x_i)}$$

come quello di $g(x)$. Allora $p_{k+1} - g(x)$ è un polinomio di grado k che si annulla in $k+1$ punti $x_0, x_1, \ldots, x_k \Longrightarrow$ il polinomio $p_{k+1}(x)$ coincide con $g(x)$ ossia è polinomio di interpolazione relativo ai punti $x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$.

Polinomio di Newton

$$f[xx_0x_1 \dots x_n] = \frac{f[xx_0 \dots x_{n-1}] - f[x_0 \dots x_n]}{x - x_n}$$

$$f[xx_0 \dots x_{n-1}] = \frac{f[xx_0 \dots x_{n-2}] - f[x_0 \dots x_{n-1}]}{x - x_{n-1}}$$

$$f[xx_0 \dots x_{n-2}] = \frac{f[xx_0 \dots x_{n-3}] - f[x_0 \dots x_{n-2}]}{x - x_{n-2}}$$

$$\vdots$$

$$f[xx_0x_1x_2] = \frac{f[xx_0x_1] - f[x_0x_1x_2]}{x - x_2}$$

$$f[xx_0x_1] = \frac{f[xx_0] - f[x_0x_1]}{x - x_1}$$

$$f[xx_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Allora

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f[x x_0] \\
&= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0 x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x x_0 x_1] \\
&= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0 x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0 x_1 x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x x_0 x_1 x_2] \\
& \quad \dots \\
&= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0 x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0 x_1 x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0 x_1 x_2 x_3] + \\
&+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) f[x_0 x_1 x_2 x_3 x_4] + \dots + \\
&+ f[x_0 \dots x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + f[x x_0 x_1 \dots x_n] + \omega(x)
\end{aligned}$$

con $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

Detto $p_0(x) = f(x_0)$ e $p_1 = p_0(x) + f[x_0 x_1](x - x_0)$ si ha

$$\boxed{p_k(x) = p_{k-1}(x) + f[x_0 x_1 \dots x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})}$$

e inoltre

$$f(x) = p_n(x) + f[x x_0 \dots x_n]\omega(x)$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f[x_0x_1](x-x_0) + f[x_0x_1x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \\ &+ f[x_0 \ldots x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f[x_0 \ldots x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \end{aligned}$$

$p_n(x)$ si dice **polinomio di Newton** ed è il polinomio di interpolazione di grado al più n di $f(x)$ in $x_0 \ldots x_n$. Infatti se $f(x)$ fosse un polinomio di grado al più n, $f[xx_0 \ldots x_n]$ essendo una differenza divisa di ordine $n+1$ di un polinomio di grado n, sarebbe 0.
Pertanto $p_n(x)$ è un polinomio di grado al più n. Inoltre è un polinomio di interpolazione in $x_0 \ldots x_n$ poiché

$$f(x_i) = p_n(x_i) + f[x_ix_0 \ldots x_n]\underbrace{\omega(x_i)}_{=0} = p_n(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n$$

Poiché il polinomio di interpolazione di grado al più n è unico, il **polinomio di Newton** è il polinomio di interpolazione di $f(x)$ in $x_0, \ldots, x_n$. I punti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ possono essere ordinati come si vuole.

La formula di Newton può essere scritta come

$$p_n(x) = d_0 + (x-x_0)[d_1 + (x-x_1)[d_2 + \ldots [d_{n-1} + (x-x_{n-1})d_n]] \ldots]$$

con $d_i = f[x_0 \ldots x_i]$, $i = 0, n$
Si può valutare $p_n(\xi)$, note le differenze divise di ordine k relative a $k+1$ argomenti di $f(x)$ usando lo schema di Horner.
Complessità: n prodotti, $2n$ somme. Poiché la tabella delle differenze divise richiede $\frac{n(n+1)}{2}$ prodotti e $n(n+1)$ somme, la complessità è la metà di quella necessaria a calcolare il polinomio di Lagrange.

Esempio. Si calcola il polinomio di interpolazione di Newton per i dati utilizzati nell'ultimo esempio relativo al polinomio di Lagrange.

x	f(x)	Tavola delle differenze divise			
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	−0.4837057			
1.6	0.4554022	−0.5489460	−0.1087339		
1.9	0.2818186	−0.5786120	−0.0494433	0.0658784	
2.2	0.1103623	−0.5715210	0.0118183	0.0680685	0.0018251

$$\begin{aligned} p_4(x) &= 0.7651977 + (x-1)(-0.4837057) + (x-1)(x-1.3)(-0.1087339) \\ &+ (x-1)(x-1.3)(x-1.6)(0.0658784) \\ &+ (x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)(0.0018251) \end{aligned}$$

$p_4(1.5) = 0.5118200$
$R(1.5) = \omega(1.5) f[1.5, 1, 1.3, 1.6, 1.9, 2.2]$
Tuttavia $f[1.5, \ldots]$ non è calcolabile.

Se si deve aggiungere una osservazione $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ e calcolare $p_{n+1}(x)$, basta aggiungere un nuovo punto alla tabella delle differenze divise, calcolare la nuova riga

$$x_{n+1}\ f(x_{n+1})\ f[x_n x_{n+1}]\ f[x_{n-1} x_n x_{n+1}] \dots f[x_0 \dots x_{n+1}]$$

e poi

$$p_{n+1}(\xi) = p_n(\xi) + f[x_0 \dots x_{n+1}](\xi - x_0)\dots(\xi - x_n)$$

Si osservi che **l'errore di interpolazione** è

$$R(x) = f(x) - p_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n]\omega(x).$$

La formula è generale e fornisce una caratterizzazione di $R(x)$ anche per funzioni $f(x) \notin C^{n+1}[a, b]$.
<u>Tuttavia</u> poiché $R(x)$ è univocamente determinato, se $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, dati $x_0, x_1, \dots, x_n$ distinti, segue che esiste ξ dipendente da x e da $x_0, x_1, \dots x_n$ tale che

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x x_0 x_1 \dots x_n].}$$

Il concetto di differenza divisa è una generalizzazione della definizione di derivata.

Formula di Taylor

La differenza divisa di ordine 1 di $f(x)$ è indeterminata se i due argomenti coincidono.
Tuttavia ricordando che se $f \in C^1[a, b]$, la differenza divisa di ordine 1 di $f(x)$ relativa a x_0, x_1 è tale che

$$f[x_0 x_1] = f^{'}(\xi) \qquad x_0 < \xi < x_1$$

segue che ha senza definire la **differenza divisa di ordine 1 di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$** con argomenti coincidenti come

$$f[x_0 x_0] = f^{'}(x_0).$$

In modo analogo si definisce **la differenza divisa di ordine $\mathbf{n}$** di $f(x)$ relativa a $n+1$ argomenti coincidenti (se $f(x) \in C^n$ in un intorno di x_0) come

$$f[x_0 x_0 \dots x_0] = \frac{f^n(x_0)}{n!}.$$

Con tale assunzione, la formula di Newton relativa a $n+1$ argomenti coincidenti x_0 di una funzione f tale che $f(x) \in C^n$ in un intorno I di x_0 ed esiste la derivata $(n+1)$-esima in I, diventa la formula di Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

con ξ appartenente al più piccolo intervallo di estremi x e x_0.
Allora

$$\boxed{f(x) = p_n(x) + R_n.}$$

Ogni funzione $f(x) \in C^n$ in un intorno di x_0 e per cui esiste la derivata $(n+1)$-esima in tale intorno si può scrivere come polinomio di grado n in $(x - x_0)$, detto polinomio di Taylor, e un termine resto.

Teorema. Sia $f(x) \in C^n[x_0, x]$ ed esiste la derivata $(n+1)$-esima in un intorno di x di $f(x)$. Allora, per ogni x appartenente a un intorno di x_0 esiste ξ contenuto nel più piccolo intervallo che contiene $I(x, x_0)$ (aperto) tale che

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Si può ottenere una maggiorazione dell'errore. Se $|f^{n+1}(x)| \leq M$, $x \in I(x_0)$

$$|R(x)| \leq \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pertanto preso $\epsilon \geq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$, il polinomio di Taylor $p_n(x)$ approssima la funzione $f(x)$ entro la tolleranza ϵ per $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, ossia per $|x - x_0| \leq h$.
Se $f(x)$ è un polinomio digrado n, $f(x) \equiv p_n(x)$.
Si osservi che la funzione $f(x)$ e il polinomio di Taylor coincidono in x_0, non solo per quanto riguarda il valore della funzione ma anche per i valori delle derivate fino all'ordine n

$$f^k(x_0) = p_n^k(x_0) \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Tuttavia l'approssimazione di Taylor è solo locale, esatta solo nel punto x_0 e tanto peggiore quanto più ci si allontana da x_0.
Infatti **tutte le informazioni usate nell'approssimazione sono concentrate nel punto** x_0.
Pertanto si limita l'uso del polinomio di Taylor alle situazioni in cui occorre approssimare una funzione vicina ad x_0.
Inoltre si può usare solo per funzioni estremamente regolari e il calcolo delle derivate può essere estremamente costoso.

Se $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor viene designato come formula di *Mac Laurin*.

Esempio.

$$
\begin{aligned}
\exp^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1 \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos(\theta' x), \quad 0 < \theta' < 1 \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(\theta'' x), \qquad 0 < \theta'' < 1
\end{aligned}
$$

Se si vuole approssimare $\sin x$ entro una tolleranza ϵ in un intervallo, tale intervallo deve essere tale che

$$|R_{2n+1}| \leq \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)!} \leq \epsilon$$

Sia $\epsilon = 10^{-5}$ e $p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $(n = 2)$, allora $p_5(x)$ approssima $\sin x$ entro $\|x\| \leq h$ con h tale che

$$|\frac{x^7}{7!}| \leq 10^{-5} \Rightarrow x \leq \sqrt[7]{10^{-5} \cdots 7!} = 0.6525$$

$\underline{h = 0.65}$
$\sin(0.5) = 0.4794255$
$p_5(0.5) = 0.4794270$
l'errore è $0.15 \cdot 10^{-5}$.

Esempio. Si calcoli il polinomio di Mac Laurin in $f(x) = \sqrt{1+x}$ di grado 3 e si trovi una approssimazione di $f(0.1)$ e una stima dell'errore.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} \\ f^{I}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ f^{II}(x) &= -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \\ f^{III}(x) &= \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \\ f^{IV}(x) &= -\frac{15}{16(1+x)^{7/2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_3(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3}$$

$p_3(0.1) \cong f(0.1) = \sqrt{1.1} \cong 1 + \frac{1}{2}0.1 - \frac{1}{8}(0.1)^2 + \frac{1}{16}(0.1)^3 = 1.0488125$

$R_3 = \frac{x^4}{4!}(-\frac{15}{16(1+\xi)^{7/2}})$

$|R_3| \leq \dfrac{(0.1)^4 15}{24 \cdot 16} \max_{[0,0.1]} \dfrac{1}{(1+\xi)^{7/2}} = \dfrac{0.0005}{128} 1 \cong 3.9 \cdot 10^{-6}$

$\sqrt{1.1} - p_3(0.1) = 3.7 \cdot 10^{-6}$

Si usa il polinomio $p_3(x)$ per calcolare $\displaystyle\int_0^{0.1} \sqrt{1+x}dx$

$$\int_0^{0.1} \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right) dx = \underline{0.102459858}.$$

L'errore $E = -\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{x^4}{4!}\frac{15}{16}\frac{1}{(1+\xi(x))^{7/2}}dx$, $|E| \le \int_0^{0.1} \frac{x^4 5}{128}dx = 7.82 \cdot 10^{-8}$

Poiché E è negativa segue

$$0.1024598958 - 7.8 \cdot 10^{-8} \le \int_0^{0.1} \sqrt{1+x}dx \le 0.1024598958$$

L'errore effettivo è $7.4 \cdot 10^{-8}$ poiché $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x}dx \le 0.1024598958$.

Tavola di $p_3(x)$: l'errore cresce al crescere della distanza di x da 0.

x	0.1	0.5	1	2	10
$p_3(x)$	1.048813	1.2266	1.438	2.00	56.00
errore	4.10^{-6}	$1.9\ 10^{-3}$	$2.4\ 10^{-2}$	$2.7\ 10^{-1}$	52.68

Interpolazione di Birkoff Hermite

È una generalizzazione dei polinomi di Taylor e di Lagrange (o Newton).
Si impongono condizioni sui valori che deve assumere un polinomio in punti prefissati e condizioni sui valori delle derivate.
È essenziale che se si impone il valore di una derivata del polinomio in un punto siano assegnati anche i valori di tutte le derivate di ordine inferiore in quel punto e il valore della funzione in quel punto.
Solo se vale tale condizione l'interpolazione di Birkoff Hermite ha una e una sola soluzione.

Esempio. Siano assegnate le condizioni $f(x_0) = p(x_0)$, $f^{'}(x_1) = p^{'}(x_1)$, $f(x_2) = p(x_2)$ e $x_0 < x_2$ e $x_1 = (x_0 + x_2)/2$.
Si volgono trovare i coefficienti di un polinomio di grado 2

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \\ a_1 + 2a_2 \frac{(x_0 - x_2)}{2} = f^{'}(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2) \end{cases}$$

$$\det = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & x_0 + x_2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

Il sistema non ha una sola soluzione.
In casi come questi non si sa nè se esiste la soluzione, né se è unica.

Si assume che la funzione f da approssimare sia sufficientemente regolare in $[a, b]$, ossia sia di classe $C^m[a, b]$ con m =massimo ordine delle derivate per cui si impongono le condizioni.

Teorema. Dati $n + 1$ punti distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ e $n + 1$ interi non negativi $m_0, m_1, \dots, m_n$, assegnati $n + 1 + \sum_{i=0}^{n} m_i$ valori $\{f_i^k\}$, $i = 0, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, m_i$ esiste uno e un solo polinomio di grado $M = n + \sum_{i=0}^{n} m_i$ tale che

$$p_M^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)}, \quad i = 0, \dots, n, \quad k = 0, \dots, m_i$$

Tale polinomio si dice polinomio di Hermite.

Se $n = 0$ e $m_0 = M$, il polinomio di Hermite è il polinomio di Taylor di grado M in x_0.
Se $m_i = 0$ $(i = 0, \dots, n)$, il polinomio di Hermite è il polinomio di Lagrange di grado $n \equiv M$ nei punti $x_0, \dots, x_n$.

Particolarmente interessante è il caso in cui $m_i = 1$ $(i = 0, \dots, n)$. In tal caso $p_M(x)$ e $f(x)$ hanno la stessa "forma", poiché in modi $p_M(x)$ e $f(x)$ coincidono e coincidono anche le rette tangenti ai grafici delle due funzioni in $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, \dots, n$.

In tal caso $M = 2n + 1$ e

$$\begin{aligned} p_{2n+1} &= \sum_{i=0}^{n} f_i H_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f_i^{'} K_i(x) \\ H_i(x) &= L_i(x)^2 (1 - 2(x - x_i) L^{'}(x_i)) \\ K_i(x) &= L_i(x)^2 (x - x_i) \end{aligned}$$

Infatti si osserva che $H_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ $\qquad H_i^{'}(x_j) = 0$

$K_i(x_j) = 0 \qquad K_i^{'}(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

$$\begin{aligned} H_i^{'} &= L_i(x)[2L_i^{'}(x) + 4(x - x_i)L_i^{'}(x)L_i^{'}(x_i) - 2L_i(x)L_i^{'}(x_i)] \\ K_i^{'} &= L_i(x)[L_i(x) + 2(x - x_i)L_i^{'}(x)] \end{aligned}$$

Dunque, per $i = 0, \ldots, n$

$$\begin{aligned} p_{2n+1} &= f_i, \\ p_{2n+1}^{'} &= f_i^{'}. \end{aligned}$$

Tale polinomio è unico. Assunto che esista un altro polinomio $q(x)$ di grado $2n+1$ tale che $q(x_i) = f_i$, $q^{'}(x_i) = f_i^{'}$; il polinomio di grado al più $2n+1$ dato da $p_{2n+1}(x) - q(x)$ ha x_i come zeri di molteplicità 2 e pertanto si annulla $2n+2$ volte. Segue $p_{2n+1} \equiv q$.

Teorema. Sia $f \in C^{2n+2}[a,b]$ e sia $p_{2n+1}(x)$ il polinomio di Hermite relativo a f nei nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ distinti.
Allora esiste ξ dipendente da $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tale che

$$f(x) - p_{2n+1}(x) = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2 \ldots (x-x_n)^2 = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!}\omega(x)^2$$

È complesso ricavare il polinomio di Hermite dalla sua formula.
Se si ricorda che $f[x_i, x_i] = f^{'}(x_i)$, si può ricavarlo come un polinomio di Newton di grado $2n+1$ relativo a argomenti $x_0x_0x_1x_1 \ldots x_nx_n$.
Si può dimostrare che

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0x_0](x-x_0) + f[x_0x_0x_1](x-x_0)^2 + f[x_0x_0x_1x_1](x-x_0)^2(x-x_1) + \\ &+ \ldots + f[x_0x_0 \ldots x_nx_n](x-x_0)^2 \ldots (x-x_{n-1})^2(x-x_n) \\ &+ f[xx_0x_0 \ldots x_nx_n](x-x_0)^2 \ldots (x-x_n)^2 \end{aligned}$$

$f(x) = p_{2n+1}(x) + f[x, x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n](x-x_0)^2 \ldots (x-x_n)^2$
Poiché $f(x_i) = p_{2n+1}(x_i)$, $f^{'}(x_i) = p^{'}_{2n+1}(x_i)$ e il polinomio di Hermite è l'unico che soddisfa

tali condizioni segue che $p_{2n+1}(x)$ è tale polinomio.

Per calcolare $p_{2n+1}(x)$ si costruisce la seguente tavola delle differenze divise

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 \longrightarrow f(x_0) & & & & & \\
x_0 \longrightarrow f(x_0) \overset{\searrow}{\longrightarrow} & \mathbf{f_0'}, f[x_0x_0] & & & & \\
x_1 \longrightarrow f(x_1) \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_0x_1] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_0x_0x_1] & & & \\
x_1 \longrightarrow f(x_1) \overset{\searrow}{\longrightarrow} & \mathbf{f_1'}, f[x_1x_1] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_0x_1x_1] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_0x_0x_1x_1] & & \\
x_2 \longrightarrow f(x_2) \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_1x_2] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_1x_1x_2] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_0x_1x_1x_2] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_0x_0x_1x_1x_2] & \\
x_2 \longrightarrow f(x_2) \overset{\searrow}{\longrightarrow} & \mathbf{f_2'}, f[x_2x_2] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_1x_2x_2] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_1x_1x_2x_2] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_0x_1x_1x_2x_2] \overset{\searrow}{\longrightarrow} & f[x_0x_0x_1x_1x_2x_2]
\end{array}
$$

Algoritmo

<u>begin</u> <u>for</u> $i \leftarrow 0$ <u>to</u> n <u>do</u>

<u>begin</u>

$z_{2i} \leftarrow x_i;$
$z_{2i+1} \leftarrow x_i;$
$a_{2i,0} \leftarrow f_i;$
$a_{2i+1,0} \leftarrow f_i;$
$a_{2i+1,1} \leftarrow f_i';$

<u>end</u>

<u>for</u> $i \leftarrow 1$ <u>to</u> n <u>do</u>

$$a_{2i,1} = \frac{a_{2i,0} - a_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}};$$

<u>for</u> $j \leftarrow 2$ <u>to</u> $2n+1$ <u>do</u>

<u>for</u> $i \leftarrow j$ <u>to</u> $2n+1$ <u>do</u>

$$a_{i,j} = \frac{a_{i-1,j-1} - a_{i,j-1}}{z_{i-j} - z_i};$$

<u>end</u>

$O(2n^2)$ quozienti e $O(4n^2)$ differenze.

Calcolo del polinomio di Hermite con lo schema di Horner in $x = \xi$

Algoritmo

begin

$p \leftarrow a_{2n+1,2n+1}$

for $i \leftarrow 2n$ to 0 do

  $p \leftarrow p(\xi - x_{\frac{i}{2}}) + a_{i,i}$

stampare p

end

Bastano $2n + 1$ prodotti e $4n + 2$ somme.

Esempio. $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.6$, $x_2 = 1.9$

$$
\begin{array}{lll}
f_0 = 0.6200860 & f_1 = 0.4554022 & f_2 = 0.2818186 \\
f_0^{'} = -05220232 & f_1^{'} = -0.5698959 & f_2^{'} = -0.5811571
\end{array}
$$

Polinomio di Hermite di grado 5

1.3	0.6200860					
1.3	0.6200860	−0.5220232				
1.6	0.4554022	−0.5489460	−0.0897427			
1.6	0.4554022	−0.5698959	−0.0698330	0.0663657		
1.9	0.2818186	−0.5786120	−0.0290537	0.0679655	0.0026663	
1.9	0.2818186	−0.5811571	−0.0084837	−0.0685667	0.0010020	0.0027738

$$
\begin{aligned}
p_5(1.5) &= 0.6200860 - 0.5220232(1.5-1.3) - 0.0897427(1.5-1.3)^2 + \\
&+ 0.0663657(1.5-1.3)^2(1.5-1.6) + 0.0026663(1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2 + \\
&- 0.0027738(1.5-1.3)^2(1.5-1.6)(1.5-1.9) = 0.5118277
\end{aligned}
$$

Condizione del problema dell'interpolazione polinomiale

Dati $x_0, x_1, \ldots, x_n$ punti distinti di $[a, b]$ e siano $y_0, y_1, \ldots, y_n$ valori assunti da $f(x)$ in $x = x_i$.
Sia $p_n(x)$ il polinomio di Lagrange di grado n per $f(x)$ relativo ai nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $\widetilde{p}_n(x)$ quello relativo agli stessi nodi e a valori $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_n$.

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_n(x) - p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} L_i(x)(\widetilde{y}_i - y_i) \qquad \epsilon_i = \widetilde{y}_i - y_i \\ |\widetilde{p}_n(x) - p_n(x)| &\leq \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| \max_{i=0,\ldots,n} |\widetilde{y}_i - y_i| \end{aligned}$$

$\sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$ è la funzione di Lebesgue.
$\Lambda_n = \max_{[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| = \|L\|_\infty$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{p}_n(x) - p_n(x)\|_\infty &\leq \Lambda_n \max_{i=0,\ldots,n} |\widetilde{y}_i - y_i| \\ &= \Lambda_n \|\underline{\widetilde{y}} - \underline{y}\|_\infty \end{aligned}$$

Λ_n è un "indicatore" della condizione del problema.

Poiché $\|p_n(x)\|_\infty = \text{max}_{[a,b]}|p_n(x)| \geq \text{max}_{x_i, i=0,\ldots,n}|p_n(x_i)| = \text{max}_{i=0,\ldots,n}|y_i| = \|\underline{y}\|_\infty$

$$\frac{\|\widetilde{p}_n - p_n\|_\infty}{\|p_n\|_\infty} \leq \Lambda_n \frac{\|\widetilde{\underline{y}} - \underline{y}\|_{infty}}{\|\underline{y}\|_{infty}}$$

Se $a_0 \leq x_0 < x_1 \ldots < x_n \leq b$, $\Lambda_n \leq 2^n(\frac{h}{h^*})^n \; h = \text{max}_{i=0,\ldots,n-1}(x_{i+1} - x_i), \; h^* = \text{min}_{i=0,\ldots,n-1}(x_{i+1} - x_i)$.
Se $x_i = x_0 + i\frac{(b-a)}{n}$, $\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{2n\log n}$, $n \to \infty$.

Se i nodi sono scelti come zeri di polinomi di Chebyshev di grado crescente, ossia

$$x_k = (\frac{\cos(2k+1)\pi}{2(n+1)})\frac{(b-a)}{2} + \frac{a+b}{2} \qquad k = 0, \ldots, n$$

allora $\Lambda_n \cong \frac{2}{\pi}\log n \qquad n >>$.
Ricordiamo che, per queste distribuzione di nodi, si ha anche che

$$\text{max}_{x\in[a,b]}|\omega(x)| = \|\omega(x)\|_\infty = \omega^*$$

è minima possibile e vale $(\frac{b-a}{4})^{n+1}2$.

Si noti inoltre che $\Lambda_n = \max_{f \in C^0[a,b]} \frac{\|p_n(x)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ ove $p_n(x)$ è il polinomio che interpola $f(x)$ in $n+1$ nodi distinti. Infatti

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \rightarrow \max_{x \in [a,b]} |p_n(x)| \leq \Lambda_n \max_{x \in [a,b] | f(x)|} \rightarrow \frac{\|p_n(x)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \Lambda_n$$

passando al massimo da ambo i membri su tutte le $f \in C^0[a,b]$ si ha l'uguaglianza.

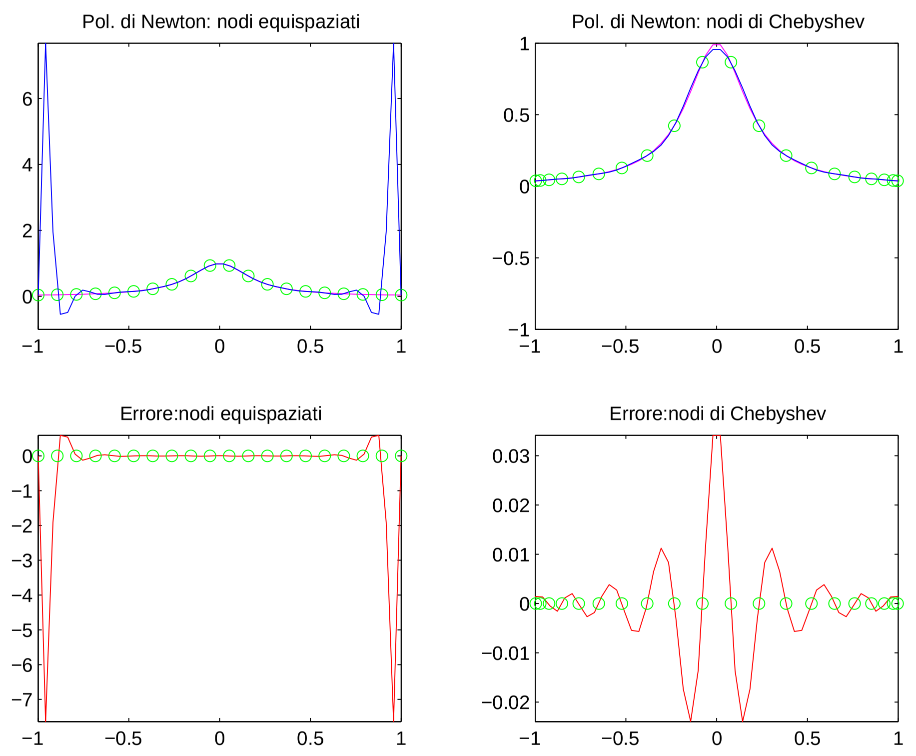
Matrice di interpolazione

$$\begin{array}{llll}
x_0^0 & & & \\
x_0^1 & x_1^1 & & \\
x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \\
\ldots & & & \\
x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n
\end{array}$$

Data $f(x) \in [a, b]$ e data la successione dei polinomi di interpolazione $\{p_n(x)\}$ costruiti a partire da x_i^n vale il seguente

Teorema di Faber. Per ogni matrice di interpolazione esiste una funzione $C^0[a, b]$ per cui $\{p_n(x)\}$ non converge uniformemente a $f(x)$.

Esempio. $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$
Se si considera $x_i^{(n)} = -1 + i\frac{b-a}{n}$, $\{p_n(x)\}$ non converge a $f(x)$.
Negli estremi per $n = 20$ ci sono forti oscillazioni.
Solo al centro dell'intervallo l'approssimazione è buona.
Se $x_i^{(n)} = \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)})$, $\{p_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$.




```
n. di nodi di interpolazione:20
n. dei punti di tabulazione:50
Errore nodi uniformi=7.63684, Errore nodi Chebyshev=0.0341464
```

Teorema di Bernstein. Sia $f \in C^{'}[a,b]$. Se $\{p_n(x)\}$ è la successione di polinomi di interpolazione a partire dagli zeri di una successione di polinomi di Chebyshev, allora $\|f - p_n\|_\infty \longrightarrow 0$ ossia $\{p_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$.
Se $f \in C^2[a,b]$, $O(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \|f - p_n\|_\infty$.

Teorema di Hermite-Féjèr. Sia $f \in C^0[a,b]$.
Se $\{p_n(x)\}$ è la successione dei polinomi di Hermite costruiti su nodi di Chebyshev e tali che $p_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$, $p^{'}_{2n+1} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\{p_n(x)\} \longrightarrow f(x)$ uniformemente per $n \longrightarrow \infty$.