Approssimazioni di dati e funzioni

In molti problemi applicativi e nella costruzione stessa di alcuni metodi numerici di base emerge l'esigenza di dover **approssimare** una funzione.
Approssimare una funzione vuol dire sostituire a un funzione "complicata" una funzione semplice, "facilmente calcolabile", scelta in uno spazio di dimensione finita e quindi esprimibile come combinazione di un numero finito di funzioni che sia facile calcolare, derivare, integrare,..., mediante algoritmi robusti ed efficienti.
Esaminiamo due casi in cui una funzione appare "complicata":

- una funzione può essere nota solo per punti perchè deriva da misurazioni sperimentali oppure è soluzione numerica di un problema matematico *(funzione empirica)*. *In altre parole non si ha una espressione analitica della funzione.*
  Ad esempio, se si vuole studiare la solubilità del nitrato di sodio $NaNO_3$ rispetto alla temperatura dell'acqua, si può effettuare un esperimento da cui si ottiene una tabella che descrive il comportamento del nitrato di sodio in funzione della temperatura dell'acqua. Effettuando m misurazioni del fenomeno si costruisce una tabella con due colonne, nella prima delle quali si riportano i *punti di osservazione*, ossia le temperature dell'acqua scelte per rilevare il fenomeno, e nella seconda le parti di nitrato di sodio disciolto in 100 parti di acqua alla temperatura assegnata, ossia le *osservazioni*.

Temperatura dell'acqua	Parti di $NaNO_3$ disciolte in 100 parti d'acqua
punti di osservazione	osservazioni
x	y
0	66.7
4	71.0
10	76.3
15	80.6
21	85.7
29	92.9
36	99.4

Se si assume che esista una legge quantitativa che lega i punti di osservazione e le osservazioni, si può descrivere tale relazione quantitativa con

$$y = f(x)$$

ove

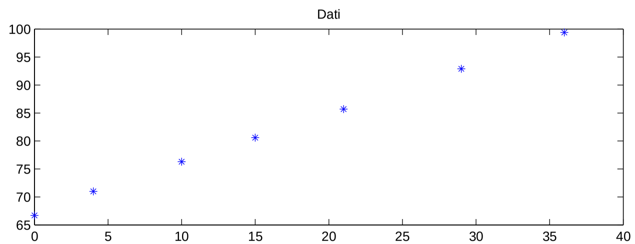
- x è la *variabile indipendente* che assume i valori x_i corrispondenti ai punti di osservazione ed esprime la variazione di temperatura;
- y è la *variabile dipendente*, che corrisponde alle osservazioni, ossia ai valori osservati di parti di $NaNO_3$ disciolte in acqua.

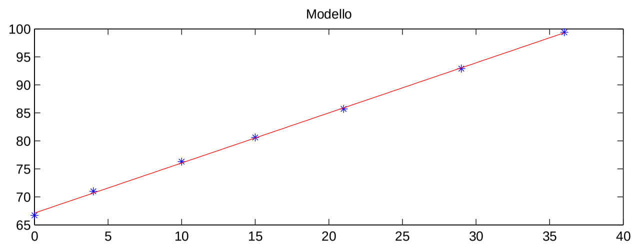
Si dice che y è funzione di x. Si vuole costruire un **modello matematico** che descrive sufficientemente bene il fenomeno e consente di fare delle **previsioni** per valori di x diversi dai punti di osservazione.
La scelta del modello è condizionata da considerazioni legate al problema da risolvere, ma anche da considerazioni numeriche dovute al fatto che la funzione deve essere facilmente calcolabile.
In questo caso il fenomeno può essere descritto con sufficiente accuratezza da una funzione lineare

$$y = ax + b$$

con $a = .89$ e $b = 67.10$. In tal modo si ottiene

x	$f(x)$
0	67.1
4	70.7
10	76.0
15	80.5
21	85.9
29	93.0
36	99.3





- nel secondo caso si suppone di dover operare su una funzione $f(x)$ *nota analiticamente* ma con una espressione tale che è difficile da calcolare in un qualsiasi x appartenente al dominio di definizione, o per cui è difficile calcolare l'integrale o la derivata con i soli strumenti dell'analisi. Allora si "sostituisce" $f(x)$ con una funzione più semplice $f_n(x)$ appartenente a uno spazio di dimensione finita su cui è possibile operare analiticamente e dedurre una approssimazione del risultato richiesto entro i *limiti di una tolleranza prefissata*. Questo tipo di approssimazione è richiesto anche per scrivere routine di calcolo che valutino una funzione nei punti del suo dominio di definizione oppure la sua derivata o il suo integrale (librerie scientifiche e compilatori).

  Esempio. Calcolo di $\int_{-1}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Interpolazione polinomiale

Polinomio di interpolazione di Lagrange. Assegnati $n+1$ punti di osservazione distinti $x_0, x_1, \dots, x_n$ entro $[a, b]$ chiuso e limitato e $n+1$ osservazioni $y_0, y_1, \dots, y_n$, si vuole determinare il polinomio di grado al più n tale che (condizioni di interpolazione):

$$p_n(x_i) = y_i \qquad i = 0, \dots, n$$

ove $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ (rappresentazione di un polinomio nella base delle potenze di x: forma canonica di un polinomio).
Nel linguaggio della Geometria Analitica si vuole determinare la curva algebrica di equazione $y = p_n(x)$ che "onora" gli $n+1$ punti distinti del piano cartesiano (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$.
Usando la base delle potenze, si tratta di determinare $a_0, \dots, a_n$, risolvendo un sistema di $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite, ottenuto dalle condizioni di interpolazione (**metodo dei coefficienti indeterminati**):

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= y_1 \\
&\dots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti è la matrice di Vandermonde. Essa è non singolare $\leftrightarrow$ $x_0, \ldots, x_n$ sono distinti.

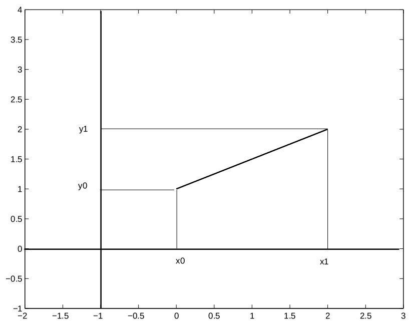
$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

ove $det(V) = \Pi_{i>j}(x_i - x_j)$.

Se gli x_i sono distinti esiste una e una sola soluzione, ossia esiste uno e un solo polinomio di interpolazione di grado al più n ($a_0, \ldots, a_n$ sono unici).

Tuttavia la matrice di Vandermonde è mal condizionata. Pertanto si calcola il polinomio di interpolazione di grado al più n relativo a $n+1$ punti distinti, usando una rappresentazione del polinomio diversa da quella canonica. Una di queste rappresentazioni è il polinomio di Lagrange.

Esempio. Dati (x_0, y_0), (x_1, y_1) distinti, si vuole calcolare il polinomio di grado 1 tale che $p_1(x_i) = y_i$, $i = 0, 1$, ossia l'equazione della retta passante per i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1).



$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

Vale $p_1(x_0) = y_0, p_1(x_1) = y_1$.

Generalizziamo il caso $n = 1$. Per $n = 1$, se si pone $L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$, $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, si ha

$$\begin{array}{ll} L_0(x_0) = 1 & L_1(x_0) = 0 \\ L_0(x_1) = 0 & L_1(x_1) = 1 \end{array}$$

$$p_1(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1$$

Nel caso generale si deve costruire per ogni punto k–esimo, $k = 0, \ldots, n$, un polinomio $L_k(x)$ di grado n tale che $L_k(x_i) = 0$ per $i \neq k$, $L_k(x_k) = 1$.
Allora $x_0, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n$ sono zeri di $L_k(x)$:

$$L_k(x) = \alpha(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)$$

e, poichè $L_k(x_k) = 1$, deve essere

$$\alpha = \frac{1}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

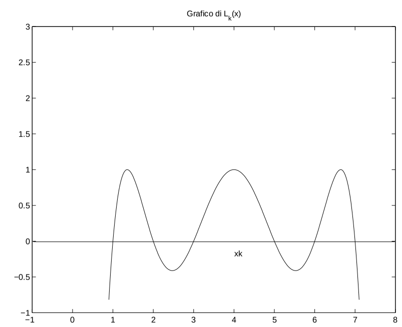
Allora

$$L_k(x) = \Pi_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Polinomio di interpolazione di Lagrange

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

con $L_k(x) = \Pi_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$.



Teorema. Assegnati $n+1$ numeri distinti $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, chiuso e limitato e $n+1$ valori $y_0, \ldots y_n$, esiste uno e un solo polinomio di grado al più n tale che $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$. Esso si può esprimere come polinomio di Lagrange e vale che $L_0(x) + L_1(x) + \ldots + L_n(x) = 1$.

Dimostrazione. Il polinomio di Lagrange è combinazione lineare di polinomi di grado n, $L_k(x)$, e dunque è un polinomio di grado al più n. Poichè $L_k(x_i) = 0$, $i \neq k$ e $L_k(x_k) = 1$, si ha che il polinomio di Lagrange è polinomio di interpolazione ossia:

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + \ldots + y_i L_i(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i) = 1.y_i = y_i$$

$i = 0, \ldots, n$. Il polinomio di Lagrange è l'unico polinomio di interpolazione. Supposto che esista un altro polinomio di grado al più n, $g_n(x)$ tale che $g_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, allora $p_n(x) - g_n(x)$ è un polinomio di grado al più n che si annulla in $n+1$ valori x_i, $i = 0, \ldots, n$; per il teorema fondamentale dell'algebra $p_n(x) - g_n(x) \equiv 0$. Questo implica per il principio di indentità dei polinomi che $g_n(x)$ e $p_n(x)$ coincidono.

Per dimostrare che $1 = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$, basta osservare che, se $\phi(x)$ è un polinomio di grado al più n, tale che $\phi(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, segue che $\phi(x) = p_n(x)$, per $x \in [a,b]$. Se $\phi(x) = 1$ e $\phi(x_i) = 1 = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, allora, per ogni $x \in [a,b]$, vale che

$$1 = p_n(x) = 1.L_0(x) + \ldots + 1.L_n(x)$$

$$1 = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$$

Osservazione. Il polinomio di interpolazione di grado n di un polinomio di grado minore o uguale a n è esso stesso. Se infatti (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$, sono i dati su cui si basa il polinomio di interpolazione $p_n(x)$, $p_n(x)$ coincide con il polinomio dato $f(x)$. Se così non fosse, esisterebbe un polinomio di grado n, $f(x) - p_n(x)$ non nullo, che si annulla in $n + 1$ punti distinti. Il che è assurdo per il teorema fondamentale dell'algebra che afferma che un polinomio non identicamente nullo di grado n si annulla in al più n punti distinti del piano complesso.

$L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ sono una base per l'insieme dei polinomi di grado n.

Basta dimostrare che sono linearmente indipendenti. Considerata una combinazione lineare, si ha

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x) = 0$$

Per x_j, $j = 0, \ldots, n$, si ha

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j L_j(x_j) = \alpha_j = 0$$

Pertanto $\{L_i(x)\}$, $i = 0, \ldots, n$ è una base, detta base di Lagrange.

Se si rappresenta $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j L_j(x)$, ossia come combinazione lineare della base di Lagrange, imponendo le condizioni di interpolazione $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, il problema dell'interpolazione lineare si esprime mediante il seguente sistema

$$\sum_{j=0}^{n} a_j L_j(x_i) = y_i$$

$i = 0, \ldots, n$, ove la matrice dei coefficienti è l'identità e $a_j = y_j$, $j = 0, \ldots, n$.

Esempio. $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$. Si vuole trovare il polinomio di interpolazione di secondo grado di $f(x) = 1/x$.

$$\Rightarrow y_0 = 1/x_0 = 0.5 \quad y_1 = 1/x_1 = 0.4 \quad y_2 = 1/x_2 = 0.25$$

$p_2(x)$ è una parabola.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10 \\
L_1(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = (-4x^2 + 24x - 32)/3 \\
L_2(x) &= \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = (x^2 - 4.5x + 5)/3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= 0.5.(x^2 - 6.5x + 10) + 0.4.(-4x^2 + 24x - 32)/3 + \\
&+ 0.25(x^2 - 4.5x + 5)/3 = \\
&= 0.05x^2 - 0.425x + 1.15
\end{aligned}$$

I coefficienti di $p_2(x)$ si possono ottenere anche risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2.5 & 6.25 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$p_2(3) = 0.05 \times 9 - 0.425 \times 3 + 1.15 = 0.325$$

invece di $1/3 = 0.3333\ldots$. Si è commesso un errore detto errore di interpolazione.

Generalmente, a meno di non interpolare un polinomio di grado non superiore a n, il polinomio $p_n(x)$ assume valori diversi dalla funzione $f(x)$, tale che $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, che si vuole interpolare con il polinomio di Lagrange. Si dice **errore di interpolazione** la funzione

$$R(x) = f(x) - p_n(x) \qquad x \in [a, b]$$

che è tale che $R(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$, ma è $R(x) \neq 0$, per $x \neq x_i$. Se non si sa nulla della $f(x)$, non si può dire nulla su $R(x)$. Ci sono infinite funzioni $f(x)$, tali che $f(x_i) = y_i$ e sono interpolate dal medesimo polinomio. Se si possiede una conoscenza qualitativa delle derivate di $f(x)$, allora è possibile calcolare $R(x)$, $x \in [a, b]$.

Teorema. Sia $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$. Siano $x_0, \ldots, x_n$ punti distinti in $[a, b]$ e sia $p_n(x)$ il polinomio di grado al più n che interpola $f(x)$ in $[a, b]$. Allora esiste un punto $\xi \in [a, b]$, dipendente da $x, x_0, \ldots, x_n$ e da $f(x)$ tale che

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - p_n(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) = \\ &= \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \end{aligned}$$

ove $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

Poichè il punto $\xi \in [a, b]$ dipendente da x, per $x_0, \ldots, x_n$ fissati è incognito, la formula dell'errore di interpolazione ha significato teorico. Tuttavia, poichè $f^{n+1}(x)$ è continua in $[a, b]$ chiuso e limitato, esiste una costante M tale che

$$|f^{n+1}(x)| \le M \qquad x \in [a, b]$$

Pertanto

$$|R(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

Inoltre, poichè $\omega(x)$ è continua in $[a, b]$, esiste ω^* tale che

$$|\omega(x)| \le \omega^* \qquad x \in [a, b]$$

Pertanto

$$|R(x)| \le \frac{M\omega^*}{(n+1)!}$$

Assegnata $\epsilon > \frac{M\omega^*}{(n+1)!}$, $p_n(x)$ è una approssimazione di $f(x)$ entro la tolleranza ϵ.

(Se x non appartiene all'intervallo $[a, b]$, si parla di estrapolazione anzichè di interpolazione. In tal caso occorre ampliare $[a, b]$ al più piccolo intervallo che contiene anche x e richiedere che $f(x)$ sia di classe C^{n+1} anche in tale intervallo. L'errore di estrapolazione è comunque maggiore o uguale a quello di interpolazione. In tal caso infatti $(x - x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, può essere molto più grande).

Polinomi di Chebyshev

Sono polinomi di grado crescente $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ definiti nell'intervallo $[-1, 1]$ nel seguente modo:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

per ogni $x \in [-1, 1]$. Allora:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \end{aligned}$$

Inoltre, posto $\theta = \arccos(x)$, $T_n(\theta(x)) = \cos(n\theta)$,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\theta) &= \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ T_{n-1}(\theta) &= \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ \Rightarrow &\quad T_{n+1}(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) - T_{n-1}(\theta) \end{aligned}$$

Pertanto vale la relazione di ricorrenza (tornando alla variabile x):

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Allora:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
&\dots
\end{aligned}$$

Si tratta di polinomi di grado crescente tali che

- il coefficiente di x^n vale 2^{n-1} in $T_n(x)$;
- sono funzioni pari per n pari e dispari per n dispari.

Poichè $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, segue che $T_n(x)$ ha n zeri reali distinti dati da

$$n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \qquad k = 0, \dots, n-1$$

$T_n(x)$, essendo un coseno, assume valore massimo 1 e minimo -1 quando

$$n \arccos(x) = k\pi \qquad k = 0, 1, ..., n$$

$$x_k = \cos(\frac{k\pi}{n}) \qquad k = 0, 1, ..., n$$

Vale che $T_n(x_k) = (-1)^k$.

E' possibile esprimere un polinomio $p_n(x)$ definito in $[a, b]$ mediante polinomi di Chebyshev usando la seguente mappa:

$$\begin{array}{rcl} \mu : [a, b] & \rightarrow & [-1, 1] \\ x & \rightarrow & t = \dfrac{2x}{b-a} - \dfrac{a+b}{b-a} \end{array}$$

$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$.

$$p_n(x) = a_0T_0(\mu(x)) + a_1T_1(\mu(x)) + ... + a_nT_n(\mu(x))$$

Si tratta comunque di determinare $n + 1$ coefficienti.

Ricordiamo che è possibile esprimere un polinomio $p_n(x)$ definito in $[a, b]$ mediante polinomi di Chebyshev usando la seguente mappa:

$$\begin{aligned} \mu : [a, b] \quad &\longrightarrow \quad [-1, 1] \\ x \quad &\longrightarrow \quad t = \frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{b-a} \end{aligned}$$

$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}$.

$$p_n(x) = a_0 T_0(\mu(x)) + a_1 T_1(\mu(x)) + ... + a_n T_n(\mu(x))$$

Si tratta comunque di determinare $n + 1$ coefficienti.

Teorema. Tra tutti i polinomi monici (ossia con coefficiente di x^n uguale a 1) di grado n definiti in $[-1,1]$, il polinomio per cui è minima la norma infinito è $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ e vale che

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| = \|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$$

La distribuzione dei nodi $x_0, \ldots, x_n$ che rende minima la quantità

$$\omega^* = \max_{x\in[a,b]}|\omega(x)| = \|\omega(x)\|_\infty$$

corrisponde a trovare un polinomio di grado $n+1$ per cui in $[a,b]$ è minima la norma del massimo. In tal modo nella maggiorazione dell'errore di interpolazione ω^* ha il valore minimo possibile.

Allora si consideri la mappa $\mu : [a,b] \longrightarrow [-1,1]$, definita da $t = \frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}$.
Presi gli zeri di un polinomio di Chebyshev di grado $n+1$, $t_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)$, si ha che

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$x_i = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{a+b}{2}$$

$i = 0, \ldots, n$. Allora

$$x - x_i = \frac{b-a}{2}(t - t_i)$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= (x - x_0)\ldots(x - x_n) = \\
&= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} (t - t_0)\ldots(t - t_n) = \\
&= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{2^n} T_{n+1}(t)
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\|\omega(x)\|_\infty = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{2^n} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

Esempio. Sia $f(x) = \ln(x)$, $[a, b] = [0.4, 0.8]$. Dati $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.7, x_3 = 0.8$ e

$$\begin{aligned} y_0 &= \ln(x_0) = -0.916291 \\ y_1 &= \ln(x_1) = -0.693147 \\ y_2 &= \ln(x_2) = -0.356675 \\ y_3 &= \ln(x_3) = -0.223144 \end{aligned}$$

si vuole determinare il polinomio di interpolazione di grado 3 di $\ln(x)$ in $[0.4, 0.8]$.

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)(0.4-0.8)} \\ L_1(x) &= \frac{(x-0.4)(x-0.7)(x-0.8)}{0.006} \\ L_2(x) &= \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.8)}{-0.006} \\ L_3(x) &= \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)}{0.012} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -0.916291L_0(x) - 0.693147L_1(x) + \\ &\quad -0.356675L_2(x) - 0.223144L_3(x) \end{aligned}$$

Per $x = 0.6$, $p_3(0.6) = -0.509975$ invece di -0.510826. $R(0.6) = \ln(0.6) - p_3(0.6) = -0.000851$.

Dalla formula dell'errore di interpolazione si può trovare una maggiorazione di $R(0.6)$ se si conosce la derivata quarta di $\ln(x)$ ($D^4(\ln(x)) = -6/x^4$).

$$R(x) = \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)}{4!}(-\frac{6}{\xi^4})$$

con ξ dipendente da x appartiene a $(0.4, 0.8)$. Poichè $6/x^4$ è decrescente in tale intervallo con valore massimo in 0.4, si ha

$$|-6/x^4| \leq 6/(0.4)^4 = 234.4$$

$$|R(x)| \leq |(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)|\frac{234.4}{24}$$

Per $x = 0.6$,

$$|R(0.6)| \leq 0.0039$$

che è una sovrastima di 0.000851.

Sia $f(x)$ una funzione di classe C^2. Se si considera il polinomio di interpolazione $p_1(x)$ di $f(x)$ tale che $p_1(x_0) = f(x_0)$, $p_1(x_1) = f(x_1)$, $x_0 < x_1$, quali sono i valori ammissibili della tolleranza ϵ per poter considerare $p_1(x)$ una approssimazione di $f(x)$ in $[x_0, x_1]$?

$$R(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi) \qquad \xi \in (x_0, x_1)$$

Sia M tale che $|f''(x)| \leq M$, $x \in [x_0, x_1]$ e sia $\omega^* = \max_{x \in [x_0, x_1]} |(x - x_0)(x - x_1)|$. Deve essere

$$\epsilon \geq \frac{\omega^* M}{2}$$

$(x - x_0)(x - x_1)$ è una parabola che interseca l'asse x in x_0, x_1, e ha vertice in $\frac{x_0 + x_1}{2}$. In tale punto la parabola assume valore $-(x_0 - x_1)^2/4$. Allora $\omega^* = \frac{(x_0 - x_1)^2}{4}$. Pertanto

$$\epsilon \geq \frac{(x_1 - x_0)^2 M}{8}$$

.