Esercizi sui metodi diretti per la risoluzione di sistemi lineari

1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
determinare la sua fattorizzazione $PA = LR$. Risolvere il sistema $Ax = b$ con $b = (3, 5, 6)^T$ mediante la fattorizzazione ottenuta. Calcolare il determinante di A.

2. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale il seguente sistema lineare:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$
Indicare gli elementi delle matrici L, R e P della fattorizzazione $PA = LR$ usata per risolvere il sistema. Calcolare il determinante di A.

3. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
determinare la sua fattorizzazione $PA = LR$. Risolvere il sistema $Ax = b$ con $b = (1, 0, 1)^T$ mediante la fattorizzazione ottenuta. Calcolare il determinante di A.

4. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$
risolvere il sistema $Ax = b$ con $b = (2, 7, 7)^T$ mediante l'algoritmo di Gauss con pivoting parziale. Calcolare i fattori L, R, P e il determinante di A.

5. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare la sua fattorizzazione QR mediante trasformazioni elementari di Givens. Risolvere il sistema $Ax = b$ con $b = (1, 0, 1)^T$ mediante la fattorizzazione ottenuta. Controllare la soluzione risolvendo il sistema anche con l'algoritmo di Gauss con pivoting parziale.

6. Ridurre a forma triangolare mediante trasformazioni di Givens la seguente matrice, calcolando la matrice Q.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Dati i vettori $A = (3, 4)$ e $B = (1, 0)$, determinare una base ortonormale a partire da essi per R^2 mediante la fattorizzazione QR della matrice costituita dalle colonne dei due vettori.

8. Calcolare la soluzione del seguente sistema mediante l'algoritmo di Gauss con pivoting parziale:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fornire anche le matrici P, L, R della fattorizzazione $PA = LR$.

9. Calcolare la fattorizzazione di Choleski della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 45 & 80 \\ 30 & 80 & 171 \end{pmatrix}$$

La matrice è definita positiva?

10. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dire se essa definita positiva. In tal caso, determinare la soluzione del sistema con termine noto $b = (3\ 4\ 3)'$.

11. Calcolare l'inversa della seguente matrice, usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Dato il sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 1.001x_2 &= 2.001 \\ x_1 + x_2 &= 1.9999 \end{aligned}$$

(soluzione esatta $(.8999, 1.1)^T$), la soluzione calcolata del sistema con $\beta = 10$ e $t = 4$ cifre decimali è $\tilde{x}_1 = 1$ e $\tilde{x}_2 = 1$ con residuo $r = (0, -10^{-4})^T$. Fornire una stima del numero di condizione del sistema. (*Suggerimento*: nell'aritmetica finita considerata, il sistema è perturbato, assumendo come secondo termine noto 2 al posto di 1.9999).

13. Dato il sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3.00001 \\ 10 & 8 & 4.00003 \\ 6 & 4 & 2.00002 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 30.00002 \\ 42.00006 \\ 22.00004 \end{pmatrix}.$$

verificare che la sua soluzione è $x = (1, 3, 2)^T$. Inoltre per $w = (1, 4, 0)^T$, calcolare il vettore residuo ed ottenere una sottostima della norma di A^{-1}. Mostrare che il sistema assegnato è mal condizionato.

Controllare i risultati ottenuti negli esercizi utilizzando Matlab.

Esercizi proposti sulla risoluzione di sistemi con metodi diretti da svolgere in ambiente Matlab

1. Scrivere una M–function che usando la function *rtrisol.m* (risoluzione di un sistema triangolare con l'algoritmo di sostituzione all'indietro) risolve r sistemi associati alla stessa matrice R con termini noti uguali alle colonne della matrice B. Se B l'identità, la soluzione ottenuta cosa rappresenta?

2. Sia A una matrice fattorizzabile (ossia con tutti minori principali primi non nulli). Scrivere una M-function che determini la fattorizzazione di Crout usando una tecnica compatta. Controllare la correttezza della function, determinando la risoluzione di un sistema associato alla matrice.

3. Sia una matrice fattorizzabile (ossia con tutti minori principali primi non nulli). Scrivere una M-function che determini la fattorizzazione di Doolittle usando una tecnica compatta. Controllare la correttezza della function, determinando la risoluzione di un sistema associato alla matrice.

4. Scrivere una M–function che determini la fattorizzazione di Cholesky della matrice A simmetrica definita positiva nella forma $A = LDL^T$, senza estrazioni di radici quadrate. Controllare la correttezza della function, determinando la risoluzione di un sistema associato alla matrice.

5. Sia A una matrice fattorizzabile a banda con banda r. Si modifichi l'algoritmo di fattorizzazione di Gauss (*gauss1.m*) in modo da evitare operazioni inutili. Suggerimento: se A ha banda r, la matrice L ha essa pure banda inferiore r e la R ha banda superiore r. Non devono essere calcolati gli elementi fuori dalle bande perchè sono nulli.

6. Costruire un M-function che modifichi *gauss2.m* in modo da ottenere la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale anche per matrici qualunque $m \times n$.

7. Costruire un M-function che modifichi *gauss2.m* in modo da ottenere la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale con scalatura per colonne. Si usi la norma infinito per scalare.

8. Costruire un M-function che modifichi *gauss2.m* in modo da ottenere la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale usando la tecnica di scelta del pivot di Swartz. Controllare la correttezza della function, determinando la risoluzione di un sistema associato alla matrice con la function standard e la nuova function.

9. Costruire una M-function che implementa l'algoritmo di Gauss con pivoting totale per il calcolo della fattorizzazione PAQ=LR; usare l'algoritmo per calcolare la soluzione del sistema. Controllare la correttezza della function, determinando la risoluzione di un sistema associato alla matrice.

10. Costruire una M-function che calcoli la fattorizzazione QR di una matrice di Hessemberg superiore. Suggerimento: basta azzerare gli elementi di posizione $(2, 1), (3, 2), .(n, n - 1)$ con rotazioni di Givens.

11. Sia A una matrice tridiagonale fattorizzabile mediante l'algoritmo di Gauss senza pivoting. Supponiamo che le tre diagonali non nulle di A siano memorizzate in tre vettori e sia g il vettore che contiene il termine noto di un sistema. Scrivere una M-function che calcoli la soluzione del sistema.

12. Calcolare l'inversa di una matrice non singolare tridiagonale strettamente diagonale dominante, usando la fattorizzazione delle matrici tridiagonali.

13. Calcolare l'inversa di una matrice definita positiva, usando la fattorizzazione di Gauss senza pivoting (gauss1.m).

14. Dopo aver calcolato l'inversa di una matrice con l'algoritmo di Gauss–Jordan, calcolare il residuo $R = I - A * X$, ove X è l'inversa calcolata.

15. Implementare l'algoritmo di raffinamento iterativo di una soluzione, dopo aver risolto un sistema lineare con il metodo di Gauss con pivoting parziale.