Laurea Triennale in Informatica.
Fac-simile II Parziale
Scegliere almeno un esercizio per ciascun gruppo.

Gruppo 1

1. (4 punti) Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale il seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

   Indicare gli elementi delle matrici L, R, e P della fattorizzazione $PA = LR$ usata per risolvere il sistema. Calcolare il determinante di A.

2. (4 punti)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   determinare la sua fattorizzazione di QR mediante trasformazioni elementari di Givens. Se $b = (2, 0, 2)^T$ è il termine noto di un sistema di cui A la matrice dei coefficienti, trovare la soluzione.

3. (4 punti) Dire se la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   definita positiva (usare la fattorizzazione di Cholesky).

4. (4 punti) Trovare l'inversa della matrice (usare Gauss-Jordan)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gruppo 2

5. (3 punti) Scrivere un M-file che calcoli la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0; \\ -2 + 2x, & 0 < x < 1; \\ -1, & x \geq 1. \end{cases}$$

   e poi ne disegni il grafico. Aggiungendo anche la legenda e le etichette per gli assi.

6. (3 punti) Scrivere un M-file che esegue il grafico della funzione $f(x) = sin(2 * x) * x$, della sua derivata e della sua primitiva nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$, usando due diversi piani cartesiani nella stessa finestra grafica. La funzione e la sua derivata devono essere realizzate mediante due M-function file.

7. (3 punti) Costruire un M-file per la rappresentazione della superficie $z(x, y) = sin(x * y)$ nel rettangolo $[-3, 3] \times [-3, 3]$ mediante una superficie in modo tale che sul piano $x - y$ compaiano le linee di livello.

Gruppo 3

8. (4 punti) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ con quale metodo iterativo è possibile risolvere il sistema lineare associato, supponendo che il termine noto sia $b = (1, 3, 6)^T$? Fare almeno un passo del metodo che risulta convergere più rapidamente.

9. (4 punti) Il metodo di Gauss-Seidel converge per tale matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}?$$

   Confrontare la velocità di convergenza di Gauss Seidel con quella del metodo di Jacobi.

10. (3 punti) Scrivere un M-file che definisca la seguente matrice A come matrice sparsa:

```
 A=[3 0 0 3 0; -2
3 -1 0 0; 0,-2,3,-1,0; 0,0,-2,3,-1; 0,0,0,-2,3]
```

e poi esegua le seguenti operazioni

- definizione di una matrice sparsa di ordine 5 con elementi diagonali uguali a 6;
- definizione di una matrice sparsa simmetrica con elementi tutti nulli eccetto sulle diagonali 1 e -1 che devono avere tutti gli elementi uguali a -2.
- costruzione di un vettore con 10 elementi tutto nullo eccetto nelle posizioni 1 e 10 ove vale 6.

Gruppo 4

11. (4 punti) Si calcoli il polinomio di interpolazione di $f(x) = sin(2*x+1)$ relativo ai punti $0, \pi/8, \pi/4$, sia con la rappresentazione di Lagrange che con quella di Newton. Si determini un valore maggiorante dell'errore di interpolazione commesso valutando il polinomio in $x = 0.2$.

12. (3 punti) Considerata la spline lineare che interpola $f(x) = sin(2*x+1)$ relativamente ai punti $0, \pi/8, \pi/4$, calcolare il suo valore in $x = \pi/16$ e dare una stima dell'errore commesso.

13. (3 punti) Usando la funzione dell'esercizio precedente, costruire il polinomio di Hermite relativo agli estremi dell'intervallo $[0, \pi/4]$ e stimare l'errore commesso, valutando tale polinomio in $x = 0.3$.

14. (3 punti) Considerata la funzione $f(x) = cos(x)$, calcolare l'ampiezza dell'intervallo $[-h, h]$ entro cui si può approssimare la funzione con il polinomio di Mac Laurin di grado 4, commettendo un errore non superiore a 10^{-5}.