Calcolo Numerico

Il Calcolo Numerico si occupa di progettare ed analizzare metodi numerici per la risoluzione di problemi del mondo reale, sfruttando al meglio le risorse di un sistema di calcolo (non necessariamente un calcolatore).

L'uso di una strumento di calcolo presuppone limitazioni che riguardano:

TEMPO Analisi della Complessità Computazionale:
numero di operazioni necessarie

SPAZIO Memoria limitata:
analisi della quantità di memoria,
numeri finiti e analisi dell'errore

La maggior parte dei problemi può essere decomposta in sottoproblemi riconducibili all'insieme dei problemi fondamentali del Calcolo Scientifico.

I numeri e la rappresentazione posizionale

A causa della natura fisica a due stati degli elementi di base che costituiscono la memoria di un calcolatore, indipendentemente dalla tecnologia con cui essi sono costituiti, si conviene di rappresentare ogni elemento di base con una cifra binaria (BINARY DIGIT o BIT).

L'unico alfabeto compreso da una macchina è il binario.

In una macchina o nei manuali capita di vedere sistemi di numerazione differenti da quello decimale.

Perciò conviene ricordare alcuni elementi sulla rappresentazione posizionale dei numeri.

NUMERO

ENTITA' ASTRATTA	RAPPRESENTAZIONE
"sette"	(7, VII, 111_2, ...)
univocamente determinata	molteplice a seconda dei criteri di rappresentazione adottati.

- RAPPRESENTAZIONE UNARIA: non conveniente

- RAPPRESENTAZIONE POSIZIONALE: dato un numero naturale $\beta > 1$ (base) e una lista di β simboli ordinati (corrispondenti alla rappresentazione dei primi β naturali), ogni numero naturale è univocamente rappresentabile come combinazione di questi simboli.

SIMBOLO

VALORE INTRINSECO

(compreso tra 0 e $\beta - 1$)

posizione occupata entro la lista dei simboli

VALORE PESO (dato da β^j)

posizione occupata entro il numero ed equivalente
alla potenza della base corrispondente,
contando le posizioni a partire da 0
da destra verso sinistra.

Per convenzione, si adotta il sistema di numerazione decimale, con base $\beta = 10$ e 10 simboli dati dalle cifre arabiche $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Ogni naturale N in notazione decimale si esprime come

$$N = d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + d_1 10^1 + d_0 10^0 = (d_n d_{n-1} \ldots d_0)_{10}$$

ove $0 \leq d_i \leq 9$ e $(d_n d_{n-1} \ldots d_0)_{10}$ si dice forma sintetica. Ogni d_i ha un valore intrinseco, pari a $\text{ord}(d_i) \equiv d_i$, e un valore peso dato da 10^i.

Esempio. $327 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$.

In generale, in un sistema di numerazione in base $\beta > 1$, ogni naturale N si rappresenta come:

$$N = (d_n d_{n-1} \ldots d_0)_\beta = \text{ord}(d_n)\beta^n + \text{ord}(d_{n-1})\beta^{n-1} + \ldots + \text{ord}(d_1)\beta^1 + \text{ord}(d_0)\beta^0$$

ove $\text{ord}(d_i)$ è il valore dell'i–esimo naturale; se si usano come simboli le cifre arabiche e se $\beta \leq 10$, $\text{ord}(d_i) = d_i$. Vale che:

$\text{ord}(d_i)$	VALORE INTRINSECO
β^i	VALORE PESO

$(d_n d_{n-1} \dots d_0)_\beta$ è la forma sintetica di N in base β.

BASE	SIMBOLI
2	$0, 1$
8	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
16	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$

ESEMPIO. "trecentosettantadue" =

$$\begin{aligned}
(372)_{10} &= 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \\
(174)_{16} &= 1 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 \\
(564)_{8} &= 5 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\
(101110100)_{2} &= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + \\
&+ 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0
\end{aligned}$$

"duecentoottantasette" =

$$(287)_{10} = (100011111)_2 = (10133)_4$$

$$(437)_8 = (11F)_{16} = (8V)_{32}.$$

SCELTA DELLA BASE

- numero dei simboli
- lunghezza delle stringhe
- complessità dell'aritmetica

ESERCIZIO.

$$\begin{aligned} N &= (a_n a_{n-1} \ldots a_0)_{\beta_1} & &= (b_m b_{m-1} \ldots b_0)_{\beta_2} \\ \beta_1^n &\le N < \beta_1^{n+1} & \beta_2^m &\le N < \beta_2^{m+1} \\ n &\le \log_{\beta_1} N < n+1 & m &\le \log_{\beta_2} N < m+1 \end{aligned}$$

Poichè $\log_{\beta_1} N = \log_{\beta_2} N \log_{\beta_1} \beta_2$, si ha che

$$\frac{n}{m} \simeq \log_{\beta_1} \beta_2.$$

Se $\beta_1 = 2$ e $\beta_2 = 10$, $\log_{\beta_1} \beta_2 = \log_2 10 \simeq 3.32$. Pertanto per rappresentare un numero in base 2 ci vogliono circa il triplo del numero di cifre necessarie in base 10.

OPERAZIONI ARITMETICHE NELLE DIFFERENTI BASI

Valgono le stesse regole e proprietà formali dell'aritmetica decimale, ma si devono usare tavole diverse da quelle pitagoriche per addizione e moltiplicazione. La somma può dare un riporto 1; il prodotto può dare un riporto compreso tra 1 e $\beta - 2$.

Base 2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Base 8

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

CASO BINARIO

L'aritmetica binaria è particolarmente semplice.

Somma: $(25)_{10} + (19)_{10} = (44)_{10}$.

		1	1	0	0	1	+
		1	0	0	1	1	=
Riporto	1			1	1		
	1	0	1	1	0	0	

Differenza: $(24)_{10} - (13)_{10} = (11)_{10}$.

1	1	0	0	0	-
0	1	1	0	1	=
0	1	0	1	1	

Prodotto: $(13)_{10} \cdot (14)_{10} = (182)_{10}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdot \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & = \\
\cline{5-9}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Quoziente: $(28)_{10} : (9)_{10} = (3)_{10}$ con resto 1.

$$
\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{6-9}
1 & 0 & 0 & 1 & & 1 & 1 & & \\
\cline{1-4}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
\cline{1-5}
 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Quoziente e prodotto sono riportati a differenze o somme e traslazioni di numeri. La scelta della base 2 comporta la manipolazione di lunghe stringhe di numeri ma la complessità dell'aritmetica è bassa. Le operazioni possono essere realizzate con semplici circuiti elettronici.

ESEMPIO

La somma di due cifre con riporto fornisce il risultato e il successivo riporto. Il numero delle possibili combinazioni degli impulsi in entrata è basso.

c_1	c_0	riporto	s	riporto
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Teorema di rappresentazione dei numeri reali

Teorema. Sia $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$; fissato un intero $\beta > 1$, α si rappresenta in modo unico come:

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{segno}(\alpha)(a_1\beta^{-1} + a_2\beta^{-2} + a_3\beta^{-3} + \ldots)\beta^p \\ &= \text{segno}(\alpha)\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\beta^{-i})\beta^p \\ &= \text{segno}(\alpha)\ m\beta^p\end{aligned}$$

ove segno$(\alpha) = \pm 1$ (a seconda che $\alpha >, < 0$), $0 \leq a_i \leq \beta - 1$, con a_i interi e $a_1 \neq 0$ e p è un intero; può esistere un indice k tale che $a_i = 0, k \leq i$ (rappresentazione degli interi o dei razionali finiti), ma non esiste un indice k tale che $a_i = \beta - 1, k \leq i$.

- Il numero reale 0 si rappresenta con 0.
- Poichè $\beta > 1$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\beta^{-i})$ è convergente.
- m si dice **mantissa** e vale che $\frac{1}{\beta} \leq m < 1$.
- β^p si dice **parte esponente**; p si dice **esponente o caratteristica**.
- $\cdot$ si dice **punto radice**, $+$ o $-$ si dice **segno** del numero e può essere omesso se il numero è positivo.

- In **forma sintetica** ogni numero reale $\alpha \neq 0$ si rappresenta come

$$\alpha = \pm(.a_1 a_2 a_3 ...)_\beta \beta^p$$

Se $a_1 \neq 0$, questa si dice **forma normalizzata**.

Un numero reale $\alpha \neq 0$ si esprime in notazione posizionale in base $\beta > 1$ nel seguente modo:

1. **forma mista**:

$$\alpha = \begin{cases} \underbrace{\pm .000..0}_{-p \text{ zeri}} a_1 a_2 ... & p \leq 0 \\ \pm a_1 a_2 ... a_p . a_{p+1} a_{p+2} ... & p > 0 \end{cases}$$

Si distingue la parte intera $[\alpha]$ (corrispondente a un polinomio in β di grado $p-1$, a sinistra del punto radice) e la parte frazionaria $\alpha - [\alpha]$ (corrispondente a una serie in $1/\beta$ senza termine corrispondente alla potenza nulla). Se $p > 0$ e $\alpha - [\alpha] = 0$, il numero è intero e si usa rappresentarlo come:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm a_1 a_2 ... a_p = \pm c_{p-1} c_{p-2} ... c_0 \\ &= \pm(c_{p-1}\beta^{p-1} + ... + c_0 \beta^0) \end{aligned}$$

con $a_i = c_{p-i}, i = 1, ..., p$.

2. **forma scientifica**: $\alpha = \pm .a_1 a_2 ... \beta^p$; si dice normalizzata se $a_1 \neq 0$. In base 2 , in forma normalizzata, $a_1 = 1$.

ESEMPI.

$(372)_{10}$	mista
$.372\ 10^3$	normalizzata
$.0372\ 10^4$	scientifica
$(3.141592...)_{10}$	mista
$.3141592\ 10^1$	normalizzata
$.3243F...\ 16^1$	normalizzata
$(3.243F...)_{16}$	mista

Algoritmi di conversione di base

Conversione di un intero positivo α da base 10 a base $\beta > 1$.

Le incognite del problema sono il numero di cifre $m+1$ della nuova rappresentazione e le cifre stesse $a_m, a_{m-1}, \ldots a_0$. Illustriamo il METODO DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE:

$$\begin{aligned}
\alpha &= (a_m a_{m-1} \ldots a_0)_\beta = a_m\beta^m + a_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + a_1\beta + a_0 = \\
&= (a_m\beta^{m-1} + a_{m-1}\beta^{m-2} + \ldots + a_1)\beta + a_0 = \gamma_1\beta + a_0
\end{aligned}$$

a_0, ossia la cifra meno significativa della rappresentazione cercata, è il resto della divisione intera di α per β.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (a_m\beta^{m-2} + a_{m-1}\beta^{m-3} + \ldots + a_3\beta + a_2)\beta + a_1 = \gamma_2\beta + a_1 \\
\gamma_2 &= (a_m\beta^{m-3} + a_{m-1}\beta^{m-4} + \ldots + a_4\beta + a_3)\beta + a_2 = \gamma_3\beta + a_2 \\
&\ldots \\
\gamma_{m-1} &= a_m\beta + a_{m-1} = \gamma_m\beta + a_{m-1} \\
\gamma_m &= 0\beta + a_m
\end{aligned}$$

$m+1$ è il numero delle divisioni successive eseguite fino ad avere un quoziente 0. Dopo aver eseguito $m+1$ divisioni, i resti in ordine inverso (rappresentati con i simboli della nuova base) forniscono la rappresentazione del numero.

Metodo delle divisioni successive

Si ottengono le cifre di rappresentazione di α in base β dalla meno significativa alla più significativa. Pertanto, scrivendo i resti delle divisioni nell'ordine inverso a quello in cui sono stati ottenuti si ottiene la rappresentazione in forma sintetica di α in base β. Le cifre ottenute vanno convertite nei simboli della base.

ESEMPIO. $(1972)_{10}$

base 2	$1972 : 2 = 986$	resto 0
	$986 : 2 = 493$	resto 0
	$493 : 2 = 246$	resto 1
	$246 : 2 = 123$	resto 0
	$123 : 2 = 61$	resto 1
	$61 : 2 = 30$	resto 1
	$30 : 2 = 15$	resto 0
	$15 : 2 = 7$	resto 1
	$7 : 2 = 3$	resto 1
	$3 : 2 = 1$	resto 1
	$1 : 2 = 0$	resto 1

$$(1972)_{10} = (11110110100)_2$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{base } 8 & 1972 : 8 = 264 & \text{resto } 4 \\
 & 246 : 8 = 30 & \text{resto } 6 \\
 & 30 : 8 = 3 & \text{resto } 6 \\
 & 3 : 8 = 0 & \text{resto } 3
\end{array}$$

$$(1972)_{10} = (3664)_8$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{base } 16 & 1972 : 16 = 123 & \text{resto } 4 \\
 & 123 : 16 = 7 & \text{resto } 11 = B \\
 & 7 : 16 = 0 & \text{resto } 7
\end{array}$$

$$(1972)_{10} = (7B4)_{16}$$

Esiste un modo più efficiente per eseguire la conversione. Esso consiste dei seguenti passi. Sia α il numero da convertire in base β e s la sua conversione:

- determinare la più grande potenza β^j della base β che non supera il numero α, contando quante volte questa potenza sta in α; se i è il numero di volte, convertire $i\beta^j$ nella base e sommarla a s;
- togliere da α il numero $i\beta^j$ e ripetere fino a che $\alpha = 0$.

L'algoritmo è particolarmente efficiente in base 2 ($i = 1$ sempre).

Per esempio, se $\alpha = 1972$, la potenza di 2 più grande che non supera il numero vale 1024. Quindi, $s = 10000000000$ e $\alpha = 948$; ripetendo:

- $512 < 948$; $\alpha = 436,\ s = 11000000000$;
- $256 < 436$; $\alpha = 180,\ s = 11100000000$;
- $128 < 180$; $\alpha = 52,\ s = 11110000000$
- $32 < 52$; $\alpha = 20,\ s = 11110100000$
- $16 < 20$; $\alpha = 4,\ s = 11110110000$
- poichè la conversione di 4 vale 100, $s = 11110110100$.

Conversione di un reale positivo $\alpha < 1$ da base 10 a base $\beta > 1$.

Le incognite del problema sono il numero di cifre della nuova rappresentazione e le cifre stesse $a_1, a_2, \ldots$. A priori non si sa se il numero ha rappresentazione finita, poichè non è detto che se un numero ha rappresentazione finita in base 10 altrettanto accade in base β. Si può dimostrare che: un numero $\alpha > 0$ ha rappresentazione finita in base $\beta \Leftrightarrow$ esistono interi positivi m, n tali che $\alpha = \frac{m}{\beta^n}$.
Altrimenti il numero nella nuova base ha rappresentazione periodica.
Illustriamo il METODO DELLE MOLTIPLICAZIONI SUCCESSIVE:

$$\begin{aligned} \alpha &= (.a_1 a_2 a_3 \ldots)_\beta = \\ &= a_1\beta^{-1} + a_2\beta^{-2} + a_3\beta^{-3} \ldots \end{aligned}$$

- $$\alpha\beta = a_1 + a_2\beta^{-1} + a_3\beta^{-2} + a_4\beta^{-3} \ldots = a_1 + n_1$$
  a_1 è la parte intera del risultato e n_1 la parte frazionaria.
  $$n_1 = a_2\beta^{-1} + a_3\beta^{-2} + \ldots$$
- $$n_1\beta = a_2 + a_3\beta^{-1} + a_4\beta{-2} + \ldots = a_2 + n_2$$

- $$n_2\beta = a_3 + a_4\beta^{-1} + a_5\beta^{-2} + \ldots = a_3 + n_3$$

Ci si arresta o perchè la parte frazionaria diventa nulla o perchè si è raggiunto un numero di cifre sufficienti.

Metodo delle moltiplicazioni successive

ESEMPIO. $(0.1)_{10}$

base 2	$0.1 \times 2 = 0.2$	p. intera 0
	$0.2 \times 2 = 0.4$	p. intera 0
	$0.4 \times 2 = 0.8$	p. intera 0
	$0.8 \times 2 = 1.6$	p. intera 1
	$0.6 \times 2 = 1.2$	p. intera 1
	$0.2 \times 2 = 0.4$	p. intera 0
	$\dots$	

$$(0.1)_{10} = (0.000\overline{1100})_2$$

base 5	$0.1 \times 5 = 0.5$	p. intera 0
	$0.5 \times 5 = 2.5$	p. intera 2
	$0.5 \times 5 = 2.5$	p. intera 2
	$\dots$	

$$(0.1)_{10} = (0.0\overline{2})_5$$

base 7

$$
\begin{array}{ll}
0.1 \times 7 = 0.7 & \text{p. intera } 0 \\
0.7 \times 7 = 4.9 & \text{p. intera } 4 \\
0.9 \times 7 = 6.3 & \text{p. intera } 6 \\
0.3 \times 7 = 2.1 & \text{p. intera } 2 \\
0.1 \times 7 = 0.7 & \text{p. intera } 0 \\
\cdots &
\end{array}
$$

$$(0.1)_{10} = (0.\overline{0462})_7$$

Conversione di un reale α da base 10 a base $\beta > 1$.

1. Determinare $|\alpha|$, ricordando il segno.
2. Determinare $[|\alpha|]$ e eseguire la conversione con l'algoritmo delle divisioni successive.
3. Determinare $|\alpha| - [|\alpha|]$ e eseguire la conversione con l'algoritmo delle moltiplicazioni successive.
4. Scrivere il segno, la conversione della parte intera, il punto radice, la conversione della parte frazionaria.

ESEMPIO. $\alpha = (-25.375)_{10}$. Convertire in base 2.

1. $|\alpha| = 25.375$; segno='-'.
2. $[|\alpha|] = 25$; $(25)_{10} = (11001)_2$.
3. $|\alpha| - [|\alpha|] = .375$; $(.375)_{10} = (.011)_2$.
4. $\alpha = (-11001.011)_2$.

Conversione di un reale da base $\beta > 1$ a base 10.

Ci sono due modi:

- Si sfrutta la rappresentazione posizionale ($p > 0$):

$$\begin{aligned}\alpha &= \pm(a_1 a_2 \dots . a_p . a_{p+1} a_{p+2} \dots a_q)_\beta \\ &= \pm(a_1 \beta^{p-1} + a_2 \beta^{p-2} + \dots + a_p \beta^0 + \\ &+ a_{p+1}\beta^{-1} + a_{p+2}\beta^{-2} + \dots + a_q \beta^{p-q})\end{aligned}$$

  Si tratta di calcolare:
  $f(x) = a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \dots + a_p$ in $x = \beta$,
  $g(x) = a_q x^{-p+q} + a_{q-1} x^{-p+q-1} + \dots + a_{p+1} x$ in $x = 1/\beta$.
  $(\alpha)_{10} = \pm(f(\beta) + g(1/\beta))$.
  Occorre un algoritmo conveniente per fare il calcolo di un polinomio a coefficienti reali in corrispondenza di un certo valore.

- Per convertire da base β a base 10 il numero reale α si può usare gli algoritmi delle divisioni e delle moltiplicazioni successive, purchè si lavori con aritmetica in base β. Le cifre ottenute si convertono ai simboli di base 10.

Conversione di un reale α da base β_1 a base β_2.

1. Si converte da base β_1 a base 10 (usando la rappresentazione posizionale) e da base 10 a base β_2 (con gli algoritmi delle divisioni e delle moltiplicazioni successive).
   $\alpha = (1221)_7$. Conversione a base $\beta_2 = 2$.

$$\alpha = 1.7^3 + 2.7^2 + 2.7^1 + 1.7^0 = (456)_{10}$$

$$(456)_{10} = (111001000)_2 \text{ DIVISIONI SUCCESSIVE}$$

2. Si può eseguire la conversione da base β_1 a base β_2 usando l'algoritmo delle divisioni successive e/o delle moltiplicazioni successive con aritmetica in base β_1, convertendo le cifre ottenute ai simboli della base β_2. β_2 va espresso in base β_1.
   ESEMPIO. $\alpha = (111001000)_2$. Si converte a base $\beta_2 = 7 = (111)_2$.

$$\begin{array}{cl} 111001000 : 111 = 1000001 & \text{resto } 1 \\ 1000001 : 111 = 1001 & \text{resto } (10)_2 = 2 \\ 1001 : 111 = 1 & \text{resto } (10)_2 = 2 \\ 1 : 111 = 0 & \text{resto } 1 \end{array}$$

$\alpha = (1221)_7$.

Conversione di un reale da base β_1 a base β_2.– Caso particolare

Nel caso in cui $\beta_2 = \beta_1^k$, nella rappresentazione in base β_1 di un numero α reale, si staccano gruppi di k cifre a partire dal punto radice verso destra e verso sinistra, completando eventualmente il primo e l'ultimo gruppo con zeri. Ogni gruppo è convertito a un simbolo della base β_2.

ESEMPIO. $\beta_1 = 2; \beta_2 = 8 (k = 3)$.

$$\alpha = (-1101110.01)_2 = (-156.2)_8$$

$$\begin{array}{c} 001\ 101\ 110\ .\ 010 \\ 1 \quad 5 \quad 6 \quad\ 2 \end{array}$$

$\beta_1 = 2; \beta_2 = 16 (k = 4)$.

$$\alpha = (-1101110.01)_2 = (-6E.4)_{16}$$

$$\begin{array}{c} 0110\ 1110\ .\ 0100 \\ 6 \quad E \quad 4 \end{array}$$

Viceversa, se $\beta_1 = \beta_2^k$, si espande ogni simbolo della rappresentazione di α in base β_1 sostituendolo con un gruppo di k cifre che sono la conversione del simbolo nella base β_2.
ESEMPIO. $\beta_1 = 9; \beta_2 = 3(k = 2)$.

$$\alpha = (37.47)_9 = (1021.1121)_3$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 7 & . & 4 & 7 \\ 10 & 21 & . & 11 & 21 \end{array}$$

Si usa la seguente tabella di conversione dei simboli.

$$\begin{array}{cc} (00)_3 & 0_9 \\ (01)_3 & 1_9 \\ (02)_3 & 2_9 \\ (10)_3 & 3_9 \\ (11)_3 & 4_9 \\ (12)_3 & 5_9 \\ (20)_3 & 6_9 \\ (21)_3 & 7_9 \\ (22)_3 & 8_9 \end{array}$$

Valutazione di un polinomio reale in $x = \alpha$.

$$p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad a_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$$

ALGORITMO 1.

$p \leftarrow 1;$
$s \leftarrow a_n;$
for i $\leftarrow n-1$ to 0 step -1 do
begin
$p \leftarrow p * \alpha;$
$s \leftarrow p * a_i + s;$
end;
stampare s;

La COMPLESSITA' COMPUTAZIONALE dell'algoritmo (ossia il numero totale di operazioni aritmetiche che devono essere fatte) è $2n$ moltiplicazioni e n addizioni.

ALGORITMO 2. Si basa sulla seguente riscrittura del polinomio:

$$p_n(x) = (\ldots(((a_0 x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \ldots)x + a_n$$

$s \leftarrow a_0;$
for $i \leftarrow 1$ to n do
$s \leftarrow s * \alpha + a_i;$
stampare s;

La COMPLESSITA' COMPUTAZIONALE è pari a n moltiplicazioni e n addizioni. L'algoritmo prende il nome di SCHEMA di RUFFINI-HORNER.

Lo schema di Horner si può riscrivere in modo da tener conto dei risultati intermedi:

$b_0 \leftarrow a_0$;
for $i \leftarrow 1$ to n do
    $b_i \leftarrow b_{i-1} * \alpha + a_i$;
stampare b_n;

In questo caso, lo schema di Horner fornisce i coefficienti $(b_i, i = 0, ..., n-1)$ del polinomio quoziente $p_n(x)/(x-\alpha)$:

$$p_n(x) = (x-\alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}) + b_n$$

b_n è una costante che rappresenta il resto della divisione di $p_n(x)$ per $x-\alpha$. Infatti, in base al Teorema di Ruffini, il valore di un polinomio in α è uguale al resto della divisione di $p_n(x)$ per $x-\alpha$. La regola di Ruffini che calcola i coefficienti del polinomio quoziente e il resto di tale divisione coincide con lo schema di Horner.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_0 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ & & & & & \\ \alpha & & b_0\alpha & b_1\alpha & ... & b_{n-1}\alpha \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & & b_n \end{array}$$

Applicazione: calcolo del valore di un polinomio e delle sue derivate in $x = \alpha$

Lo schema di Horner permette di valutare un polinomio in $x = \alpha$, calcolando il resto (r_1) della divisione di $p_n(x)$ per $x - \alpha$ e i coefficienti del quoziente di tale divisione ($q_1(x)$):

$$p_n(x) = (x - \alpha)q_1(x) + r_1$$

Poichè vale che:

$$p_n'(x) = q_1(x) + (x - \alpha)q_1'(x)$$

segue che $p_n'(\alpha) = q_1(\alpha)$. Pertanto applicando lo schema di Horner (seconda volta) a $q_1(x)$ si ottiene $q_2(x)$ ed $r_2 = q_1(\alpha) = p_n'(\alpha)$.

$$q_1(x) = (x - \alpha)q_2(x) + r_2$$

Di nuovo, vale che:

$$p_n''(x) = 2.q_1'(x) + (x-\alpha)q_1''(x)$$

Pertanto $p_n''(\alpha) = 2q_1'(\alpha) = 2q_2(\alpha)$.
Applicando lo schema di Horner a $q_2(x)$ (III volta), si ottiene $q_3(x)$ e il resto $r_3 = q_2(\alpha) = q_1'(\alpha) = p_n''(\alpha)/2$:

$$q_2(x) = (x-\alpha)q_3(x) + r_3$$

Ancora:

$$p_n'''(x) = 3q_1''(x) + (x-\alpha)q_1'''(x)$$

Pertanto $p_n'''(\alpha) = 3q_1''(\alpha) = 3.2.q_3(\alpha) = 3!q_3(\alpha)$.
Applicando lo schema di Horner (IV volta) a $q_3(x)$ si ottiene $q_4(x)$ e $r_4 = q_3(\alpha) = p_n'''(\alpha)/3!$.
In generale, applicando la $i+1$–esima volta lo schema di Horner si ottiene: $p_n^{(i)}(\alpha)/i! = q_i(\alpha)$.