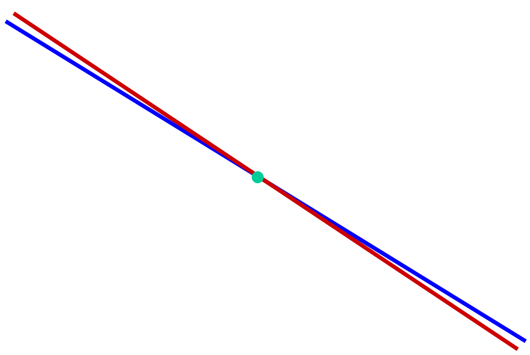
Condizionamento di un sistema lineare

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ .499x_1 + 1.001x_2 &= 1.5 \end{aligned}$$

La soluzione esatta è $x = (1, 1)^T$
Perturbando la matrice dei coefficienti o il termine noto

$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ .5x_1 + 1.002x_2 &= 1.5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ .499x_1 + 1.001x_2 &= 1.4985 \end{aligned}$
$(3, 0)^T$	$(2, 0.5)^T$

Interpretazione geometrica



- Le rette che rappresentano le equazioni sono quasi parallele.

Norme vettoriali

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Norma euclidea

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Norma 1

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- Norma ∞

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Norme matriciali

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

- Norme matriciali indotte

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

  - Norma 1

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,..,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

  - Norma ∞

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,..,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

  - Norma 2

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

dove λ_{max} indica l'autovalore massimo

$$Ax = b$$

$$x = (1,1)^T$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(A + \Delta A)\ \hat{x} = b \\ \hat{x} = (3,0)^T\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}A\tilde{x} = (b + \Delta b) \\ \tilde{x} = (2, 0.5)^T\end{array}}$$

Possiamo pensare che $\Delta A, \Delta b$ siano perturbazioni dei dati dovuti all'approssimazione dei numeri con i numeri di macchina.

$\hat{x}, \tilde{x}$ sono le soluzioni calcolate in aritmetica esatta a partire da dati perturbati.

- Valutiamo le soluzioni ottenute a partire dai dati perturbati rispetto alla soluzione esatta.
  - Errore $\hat{e} = x - \hat{x}$ $\quad \tilde{e} = x - \tilde{x}$
  - Residuo $\hat{r} = b - A\hat{x}$ $\quad \tilde{r} = b - A\tilde{x}$

Nell'esempio precedente

$\|\hat{r}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0.003 \end{pmatrix} \right\| = 3 \cdot 10^{-3}$	$\|\tilde{r}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0.00015 \end{pmatrix} \right\| \simeq 2 \cdot 10^{-4}$
$\|\hat{e}\| = \|(1,1)^T - (3,0)^T\| = \sqrt{5} \simeq 10^1$	$\|\tilde{e}\| = \|(1,1)^T - (2,0.5)^T\| = \sqrt{5}/2 \simeq 10^1$

Residuo piccolo ma errore grande

E' una caratteristica tipica dei sistemi malcondizinati

- Quando calcoliamo la soluzione numerica di un sistema lineare e i nostri dati sono affetti da errore, noi in realtà otteniamo un vettore $\widehat{x}$. Per valutare la "bontà" della soluzione ottenuta, noi non conosciamo la soluzione esatta del sistema, quindi non conosciamo $\widehat{e}$ ma possiamo calcolare il residuo.

- Per sistemi malcondizionati però il residuo non dà indicazioni affidabili.

Relazioni tra residuo ed errore

$$
\begin{aligned}
\widehat{r} &= b - A\widehat{x} \\
&= Ax - A\widehat{x} \\
&= A(x - \widehat{x})
\end{aligned}
$$

$$\boxed{A\widehat{e} = \widehat{r}}$$

$$\widehat{e} = A^{-1}\widehat{r}$$

Passando alle norme e usando la disuguaglianza di Schwartz

$$\boxed{\|\widehat{e}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\widehat{r}\|}$$

Stima dell'errore relativo

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{\|\widehat{e}\|}{\|x\|} = \frac{\|\widehat{x}-x\|}{\|x\|} \\
&\leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\widehat{r}\|}{\|x\|}
\end{aligned}
$$

$$Ax = b \rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\widehat{r}\|}{\|b\|}$$

$$\boxed{E_r \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\widehat{r}\|}{\|b\|}}$$

- Se il residuo è piccolo ma la quantità è grande, allora l'errore relativo può essere grande.
- Si definisce numero di condizionamento della matrice la quantità
$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$
- Se $k(A)$ è piccolo e il residuo è piccolo, allora la soluzione calcolata $\widehat{x}$ è effettivamente vicina alla soluzione esatta.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ .499 & 1.001 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.001 & -2 \\ -.499 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1.001 - .998}$$

$$\|A\|_\infty = 3 \qquad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{3.001}{.003} = 1000.333$$

$$k_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \simeq 3 \cdot 10^3$$

Proprietà

- Per le proprietà delle norme matriciali si ha $k(A) \geq 1$
- Se $k(A) \gg 1$ la matrice si dice malcondizionata.
- Se $k(A) \simeq 1$ la matrice si dice bencondizionata.
- Il numero di condizionamento esprime quanto una matrice è "vicina" alla singolarità.

Osservazioni

- In norma 2 si ha

$$k_2(A) = \frac{\sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}}{\sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}}$$

Condizionamento

Autovalori

- Si dimostra che

$$E_r \leq \frac{k(A)}{1 - k(A)e_A}(e_A + e_b)$$

dove e_A, e_b sono gli errori relativi sui dati (matrice e termine noto)

Metodi iterativi per sistemi lineari

- Generare una successione di vettori

$$\left\{x^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

convergente alla soluzione del sistema

$$Ax = b$$

Convergenza in norma

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

Per una qualche norma vettoriale

- Si dimostra che si ha convergenza in norma se e solo se si ha convergenza per componenti.

$$\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j \quad j = 1, ..., n$$

Costruzione di un metodo iterativo

$$Ax = b$$

- Se M è non singolare si ha il sistema equivalente

$$Mx = Mx + (b - Ax)$$

$$x = \underbrace{(I - M^{-1}A)}_{G}x + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$$

Relazione di ricorrenza

- Se x è la soluzione del sistema allora

$$x = Gx + c$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c}$$

A partire da un $x^{(0)}$ qualunque

Analisi di convergenza

- Cercare condizioni su G (su M) per avere convergenza alla soluzione x^*
- Errore di troncamento al passo k

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$$

- Residuo al passo k

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{(k)} &= x^{(k)} - x^* \\ &= Gx^{(k-1)} + c - Gx^* - c \\ &= G(x^{(k-1)} - x^*) \\ &= Ge^{(k-1)} \end{aligned}}$$

$$= G^2 e^{(k-2)}$$

$$\vdots$$

$$= G^k e^{(0)}$$

dove $G^k = \underbrace{G \cdot \ldots \cdot G \cdot G}_{k}$

- Si ha convergenza quando

$$0 = \lim_{k \to \infty} e^{(k)} = \lim_{k \to \infty} G^k e^{(0)}$$

- Si dimostra che è verificata se e solo se

$$\rho(G) < 1$$

dove $\rho(G) = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(G)|$ Raggio spettrale

- Condizione sufficiente

$$\|G\| < 1$$

Criteri d'arresto

- Si deve stabilire un criterio soddisfatto il quale si può arrestare il procedimento ottenendo un'approssimazione della soluzione di sufficiente accuratezza.
- Il criterio ideale sarebbe

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \epsilon$$

per un valore piccolo di ϵ ma la soluzione esatta x^* non è nota.

Criteri d'arresto

- Si osserva che

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^{(k)} &= Gx^{(k)} + c - x^{(k)} \\ &= Gx^{(k)} + c + \underbrace{(x^* - Gx^*)}_{0} - x^{(k)} \\ &= (G - I)(x^{(k)} - x^*) \end{aligned}$$

$$(G - I)(x^{(k)} - x^*) = x^{(k+1)} - x^{(k)}$$

Criteri d'arresto

$$(x^{(k)} - x^*) = (G - I)^{-1}(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$
$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|(G - I)^{-1}\| \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

- Se $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ è piccola e anche $\|(G - I)^{-1}\|$ è piccola, allora l'errore è piccolo.

$$\boxed{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon}$$

Criteri d'arresto

- Vale la relazione

$$E_r^{(k)} = k(A)\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}$$

se la matrice A non è troppo malcondizionata si può usare il seguente criterio d'arresto

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} < \epsilon$$

Metodi particolari

- Fissata M cercare una decomposizione di A

$$A = M - N$$

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(I - M^{-1}A)}_{G}x^{(k)} + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$$

Si tratta di trovare una matrice M nonsingolare "facile".

Decomposizione di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \ddots & \\ a_{n-11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D = (a_{ii})$$

$$L = (-a_{ij}) \quad i > j$$

$$U = (-a_{ij}) \quad i < j$$

$$\boxed{A = D - L - U}$$

Metodo di Jacobi

$$A = M - N = \underset{M}{\underset{\downarrow}{D}} - \underset{N}{\underset{\downarrow}{(L + U)}}$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{J} x^{(k)} + D^{-1}b$$

Matrice di Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & -\frac{a_{43}}{a_{44}} & 0 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{\left(-\sum_{j=1,n;j\neq i} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i\right)}{a_{ii}}}$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6\\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25\\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11\\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
\end{aligned}
$$

La soluzione esatta vale $x^* = (1, 2, -1, 1)^T$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} + \frac{3}{5}\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k)} - \frac{3}{11}x_4^{(k)} + \frac{25}{11}\\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k)} - \frac{11}{10}\\
x_4^{(k+1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8}
\end{aligned}
$$

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 & -1/5 & 0\\ 1/11 & 0 & 1/11 & -3/11\\ -1/5 & 1/10 & 0 & 1/10\\ 0 & -3/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3/5\\ 25/11\\ -11/10\\ 15/8 \end{pmatrix}
$$

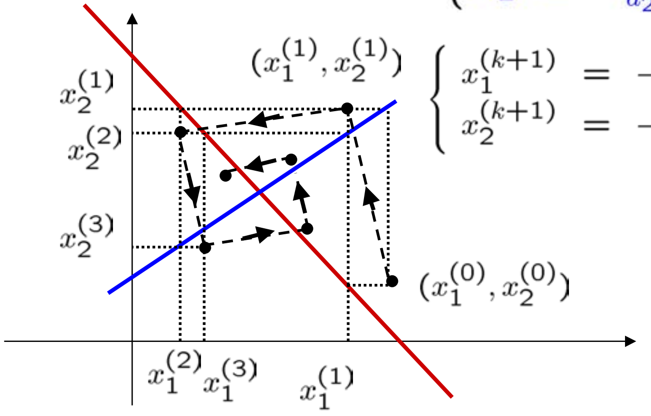
$(x^{(0)} = \vec{0})$

k	0	1	2	3	...	10
x_1	0	0.6000	1.0473	0.9326		1.0001
x_2	0	2.2727	1.7159	2.0533	...	1.9998
x_3	0	-1.1000	-0.8052	-1.0493		-0.9998
x_4	0	1.8750	0.8852	1.1309		0.9998

Il costo computazionale è pari a un prodotto matrice vettore per ogni iterazione ($\mathcal{O}(n^2)$).

Interpretazione geometrica

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{a_{22}}{a_{11}}x_2 + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{a_{22}}{a_{11}}x_2^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$