Caso particolare: matrici tridiagonali

- Supponiamo non sia necessario il pivoting.

$$Ax = f$$

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & d_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

$$A = LR$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & d_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & s_1 & & \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & s_{n-1} \\ & & & u_n \end{pmatrix}$$

Si sfruttano le uguaglianze matriciali per ottenere la fattorizzazione

$$b_i = a_{ii+1} = \begin{array}{c} i \\ (0 \ldots l_i \ 1 \ 0 \ \ldots) \end{array} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ s_i \\ u_{i+1} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \\ \end{array} = s_i \Rightarrow s_i = b_i$$

i-esima riga di L

(*i* +1)-esima colonna di R

$$A = LR$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & d_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & s_1 & & \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & s_{n-1} \\ & & & u_n \end{pmatrix}$$

$$c_i = a_{ii-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & & \\ (0\ldots & l_i & 1 & 0 & \ldots) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ s_{i-2} \\ u_{i-1} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} \end{array} = l_i u_{i-1} \Rightarrow \quad l_i = \frac{c_i}{u_{i-1}}$$

i-esima riga di L

(*i* -1)-esima colonna di R

$$A = LR$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & d_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & s_1 & & \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & s_{n-1} \\ & & & u_n \end{pmatrix}$$

$$d_1 = u_1$$

$$d_i = a_{ii} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & & \\ (0\ldots & l_i & 1 & 0 & \ldots) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ s_{i-1} \\ u_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = l_i s_{i-1} + u_i$$

$$\downarrow$$

$$u_i = d_i - l_i s_{i-1}$$

$$\downarrow$$

$$u_i = d_i - l_i b_{i-1}$$

i-esima riga di L

i-esima colonna di R

Algoritmo di fattorizzazione per matrici tridiagonali

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& u_1 = d_1 \\
& \text{for } k = 2, n \\
& \quad \left| \begin{aligned} & s_{i-1} = b_i \\ & l_i = \frac{c_i}{u_{i-1}} \\ & u_i = d_i - l_i s_{i-1} \end{aligned} \right.
\end{aligned}
}
$$

- Complessità computazionale

$n-1$ divisioni, $n-1$ somme, $n-1$ prodotti

Osservazione

- Le tecniche che sfruttano le uguaglianze matriciali sono dette tecniche di pavimentazione.

- Si possono usare quando non sono previsti scambi tra le righe della matrice.

Soluzione di un sistema

$$Ax = f \qquad LRx = f$$

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = f \rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1 \\ y_i = f_i - l_i y_{i-1} \\ \quad i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$Rx = \begin{pmatrix} u_1 & s_1 & & \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & s_{n-1} \\ & & & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y \rightarrow \begin{cases} x_n = y_n / u_n \\ x_i = (y_i - s_i x_{i+1}) / u_i \\ \quad i = n-1, \ldots 1 \end{cases}$$

Complessità computazionale

n divisioni, $2(n-1)$ somme, $2(n-1)$ prodotti

Osservazione

- La complessità computazionale della fattorizzazione e soluzione di un sistema tridiagonale è

$$\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(2n)$$

Osservazione

- Non è più vero se si effettuano scambi
- Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1/10 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 100 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1/10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/20 & 0 & -1/8 & 1/160 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 100 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1/10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 199/1600 \end{pmatrix}$$

- Se abbiamo molti elementi nulli, la richiesta di memoria è inferiore
- In certi casi (es. matrici con strutture particolari) si abbassa la complessità computazionale
- Il pivoting fa perdere la struttura delle matrici

Matrici sparse

- Matrici in cui il numero di elementi non nulli è piccolo.
- Richiedono minore occupazione di memoria.
- Minore complessità computazionale nelle operazioni (es. prodotto matrice-vettore)

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 5/8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

A è sparsa ma i suoi fattori L ed U non lo sono

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & -1/6 & -2/5 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 2 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 5/8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/15 \end{pmatrix}$$

- Questo fenomeno si chiama fill-in (riempimento)
- Esistono tecniche che riordidinano una matrice, permutando rige e colonne, che servono per minimizzare il fill-in (es. minimum-degree reordering)

Condizioni sufficienti

- Matrici strettamente diagonale dominanti

per righe	per colonne
$\|a_{ii}\| > \sum_{i\neq j, j=1}^{n} \|a_{ij}\|$ $\forall i = 1, ..., n$	$\|a_{jj}\| > \sum_{i\neq j, i=1}^{n} \|a_{ij}\|$ $\forall j = 1, ..., n$

- Proprietà:
  - Non singolare
  - Vale la condizione sufficiente per la quale tutti i perni dell'algoritmo do Gauss sono non nulli

- Si dimostra che se A è strettamente diagonale dominante per colonne, nel procedimento di Gauss con pivoting parziale non avvengono scambi di righe.

Condizioni sufficienti

- Matrici simmetriche definite positive
  - $A = A^T$
  - $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
- Proprietà:
  - Tutti gli autovalori sono reali positivi
  - Non singolare
  - Tutti i minori principali sono positivi
  - Teorema di Von Neumann-Goldstine

$$\max |a_{ij}^{(k)}| \leq \max |a_{ii}|$$

Gli elementi che si incontrano nell'algoritmo non diventano mai troppo grandi rispetto agli elementi di A

Teorema di Cholesky

- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica è definita positiva se e solo se esiste una e una sola matrice $\mathcal{L}$ triangolare inferiore con elementi diagonali positivi tale che

$$A = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$$

Fattorizzazione di Cholesky

Fattorizzazione di Cholesky

- Si ottiene con metodo di pavimentazione

$$A = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ii} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & & & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{j1} & \cdots & a_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{j2} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & l_{jj} & \cdots & l_{nj} \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11}^2$$

a_{i1}= (i-esima riga di $\mathcal{L}$) (1 colonna di $\mathcal{L}^t$) $= l_{i1} l_{11}$

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} \qquad i = 2, ..., n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ii} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & & & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{j1} & \cdots & a_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{j2} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & l_{jj} & \cdots & l_{nj} \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{22} = {l_{21}}^2 + l_{22}^2$$

a_{i2} = (i-esima riga di $\mathcal{L}$) (2 colonna di $\mathcal{L}^t$)$= l_{i1} l_{21} + l_{i2} l_{22}$

$$\begin{cases} l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ l_{i2} = \dfrac{a_{i2} - l_{i1} l_{21}}{l_{22}} \quad i = 3, ..., n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ \dots & \dots & \ddots & & & \\ l_{i1} & l_{i2} & \dots & l_{ii} & & \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & & & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{j1} & \dots & a_{n1} \\ & l_{22} & \dots & l_{j2} & \dots & l_{n2} \\ & & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ & & & l_{jj} & \dots & l_{nj} \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{jj} = {l_{j1}}^2 + {l_{j2}}^2 + \dots + l_{jj-1}^2 + l_{jj}^2$$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (i\text{-esima riga di } \mathcal{L})\ (j\text{-esima colonna di } \mathcal{L}^t) \\ &= l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + \dots l_{ij}l_{jj} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{jk}^2} \\ l_{i2} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}} \qquad i = j+1, \dots, n \end{cases}$$

Algoritmo di Cholesky

for $j = 1, n$

$\quad l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$

$\quad\quad$ for $i = j + 1, n$

$\quad\quad\quad l_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}$

Algoritmo di Cholesky

for $j = 1, n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

for $i = j+1, n$

$$l_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

Prodotto scalare delle prime j-1 componenti della riga j di L con se stessa

Prodotto scalare delle prime j-1 componenti della riga j di L con la riga i

Complessità computazionale

- Dobbiamo trovare un solo fattore:

$$\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{6}\right)$$

- N estrazioni di radice: per evitarle

$$A = LDL^T$$

- Se le quantità sotto radice sono negative, la matrice non è definita positiva.
- $det(A) = l_{11}^2 l_{22}^2 ... l_{nn}^2$

Soluzione di un sistema

$$Ax = b$$

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^T x = b \qquad \begin{array}{l} \mathcal{L}y = b \leftarrow \text{Sostituzione all'avanti} \\ \mathcal{L}^T x = y \leftarrow \text{Sostituzione all'indietro} \end{array}$$

$$LDL^T x = b \qquad \begin{array}{l} Ly = b \leftarrow \text{Sostituzione all'avanti} \\ L^T x = D^{-1}y \leftarrow \text{Sostituzione all'indietro} \end{array}$$

Esempio

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$l_{11} = 2$

$l_{21} = 1/2 \qquad l_{22} = \sqrt{5 - (1/2)^2} = \sqrt{19}/2$

$l_{31} = -1 \qquad l_{32} = \frac{1-(-1/2)}{\sqrt{19}/2} = \frac{3}{\sqrt{19}} \qquad l_{33} = \sqrt{4 - (1 + 9/\sqrt{19})}$

$= 2\sqrt{\frac{12}{19}}$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & l_{22} & 0 \\ -1 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{19}/2 & 0 \\ -1 & 3/\sqrt{19} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{19}/2 & 0 \\ -1 & 3/\sqrt{19} & 2\sqrt{12/19} \end{pmatrix}$$