Casi critici

- Perno nullo : fallimento dell'algoritmo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rimedi

- Occorre una strategia che eviti i perni nulli per poter applicare l'algoritmo.

- Scambiare le righe della matrice (scambiare le equazioni del sistema)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Strategia di pivoting

- Se al k-esimo passo dell'algoritmo si trova un perno nullo, si cerca nella k -esima colonna un elemento non nullo. Se questo si trova in posizione r, si scambiano la k-esima e la r-esima riga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & & & a_{n1} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & & & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{rk}^{(k)} & \dots & a_{rn}^{(k)} & b_r^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nk}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Matrici di permutazione

$$
\begin{array}{c c}
 & \\
i \rightarrow & \\
 & P_{ij} = \\
j \rightarrow & \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \cdots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & \cdots & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \cdots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$\boxed{P_{ij}A}$ ha come effetto di scambiare le righe i e j di A

$\boxed{AP_{ij}}$ ha come effetto di scambiare le colonne i e j di A

Algoritmo di Gauss con pivoting

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Se $a_{11} = 0$

si cerca un elemento non nullo sulla colonna (esiste se A è non singolare) e si scambiano le righe.
Sulla matrice permutata si esegue la trasformazione di Gauss.

Passo 2

$$
L_1 P_1 A = \begin{pmatrix}
a_{11}^{(2)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(2)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & & \dots & \dots \\
0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)}
\end{pmatrix} = A_2
$$

Si applica lo stesso procedimento ad $\tilde{A}_2$

Osservazione:
Sicuramente esiste un elemento non nullo della prima colonna di $\tilde{A}_2$ perché $det(A) = a_{11}^{(2)} det(\tilde{A}_2)$
Se A è non singolare, allora lo è anche $\tilde{A}_2$

Inoltre A_2 è nonsingolare perché è il prodotto di matrici non singolari.

Passo j

$$L_{j-1}P_{j-1}...L_1P_1A = A_j = \begin{pmatrix} a_{11}^{(j)} & ... & ... & & a_{1n}^{(j)} \\ 0 & \ddots & ... & & ... \\ 0 & & a_{jj}^{(j)} & ... & a_{jn}^{(j)} \\ 0 & & ... & ... & ... \\ 0 & & a_{nj}^{(j)} & & a_{nn}^{(j)} \end{pmatrix}$$

A_j è nonsingolare perché è il prodotto di matrici non singolari.

Passo n-1

$$L_kP_k...L_2P_2L_1P_1A = R$$

Si dimostra che

$$\underbrace{P_{n-1}P_{n-2}...P_1}\, A = \underbrace{\tilde{L}_1^{-1}...\tilde{L}_{k-1}^{-1}L_k^{-1}}\, R$$

$$\Downarrow$$

$$PA = LR$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ ... & 1 & & \\ ... & m_{ij} & 1 & \\ ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Gli m_{ij} sono permutati di righe

Riassumendo

- TEOREMA

  Se A è una matrice non singolare nxn, allora esiste una matrice di permutazione P nxn tale che

  $$PA = LR$$

  dove L è triangolare inferiore con elementi diagonali unitari e R è triangolare superiore nonsingolare. Inoltre

  $$det(A) = (-1)^{\sigma} r_{11}...r_{nn}$$

  σ = numero di permutazioni non banali

Soluzione di un sistema

$$Ax = b \qquad PAx = Pb$$

$$\underbrace{LRx}_{y} = Pb$$

$$Ly = Pb \leftarrow \text{Sostituzione all'avanti}$$

$$Rx = y \leftarrow \text{Sostituzione all'indietro}$$

Esempio

$$[A\ b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 P_1 [A\ b]$$

$$P_1 = I \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$$

$$P_2 L_1 P_1 [A\ b]$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad 0$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rx = y \qquad y = L^{-1}Pb = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 2, \ x_2 = 0, \ x_1 = -1$$

$$det(A) = (-1)^1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1$$

Casi critici

- Perno piccolo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 1.0001..., \; x_2 = -1.0001..., \; x_1 = 1$$

$$[A_2 \; b_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A_2 \; b_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A_3 \; b_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9999 & -10^4 \end{pmatrix}$$

In aritmetica finita con 4 cifre decimali

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= 1.000 \\ \tilde{x}_2 &= (1-1)/10^{-4} = 0 \\ \tilde{x}_1 &= (1-0-1)/1 = 0 \end{aligned}$$

Un piccolo errore nel calcolo di si è amplificato nel calcolo delle altre componenti

---

Strategia di pivoting parziale

- Al passo k si sceglie come perno l'elemento di modulo massimo della colonna di $\tilde{A}_k$

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{i=k,n} |a_{ik}^{(k)}| \qquad k = 1, 2, ..., n-1$$

$$\Downarrow$$

$$|m_{ik}| \leq 1$$

Esempio

$$[A\ b] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -5 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P_1[A\ b]$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1/5 \\ -2/5 \end{array}$$

$$L_1P_1[A\ b]$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -6/5 & 13/5 & 7/5 \\ 0 & -7/5 & 1/5 & -6/5 \end{pmatrix}$$

$$L_1P_1[A\ b]$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -6/5 & 13/5 & 7/5 \\ 0 & -7/5 & 1/5 & -6/5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -1/5 \\ -2/5 \end{array}$$

$$P_2L_1P_1[A\ b]$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -7/5 & 1/5 & -6/5 \\ 0 & -6/5 & 13/5 & 7/5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 6/7 \end{array}$$

$$L_2P_2L_1P_1[A\ b] = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -7/5 & 1/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 17/7 & 17/7 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 6/7 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 0 & -7/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 17/7 \end{pmatrix}$$

$$Rx = y \qquad y = L^{-1}Pb \begin{pmatrix} -3 \\ -6/5 \\ 17/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 0 & -7/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 17/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6/5 \\ 17/7 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_1 = 1$$

$$det(A) = (-1)^2 \cdot (-5) \cdot (-7/5) \cdot (17/7) = 17$$

Strategia di pivoting totale

- Al passo k si ceglie come perno l'elemento di modulo massimo della sottomatrice $\widetilde{A}_k$

$$|a_{ij}^{(k)}| = \max_{r,s=k,n} |a_{rs}^{(k)}| \qquad k = 1, 2, ..., n-1$$

$$PAQ = LR$$

Osservazioni

- Sebbene il pivoting totale renda l'algoritmo di Gauss più stabile, esso ha un costo computazionale elevato ($\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{3}\right)$ confronti).
- Nella pratica si usa quasi sempre il pivoting parziale, che dà buoni risultati.