Sistemi lineari

Obiettivo

- Studiare algoritmi per il calcolo della soluzione numerica di sistemi lineari
- Numeri di macchina

Il problema

Trovare $x_1, ..., x_n$ tali che

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&... \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{Ax = b}$$

$A = (a_{ij})$ matrice $n \times n$ dei coefficienti
$b = (b_1, ..., b_n)^t$ vettore dei termini noti
$x = (x_1, ..., x_n)^t$ vettore delle incognite

Ipotesi su A

A non singolare

$\Updownarrow$

$det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

Esiste l'inversa di A: X tale che

$$AX = I$$

$(X = A^{-1})$

Teorema di esistenza e unicità

Se A è non singolare, allora esiste un'unica soluzione del sistema $Ax = b$ e vale

$$x = A^{-1}b$$

Metodi per il calcolo della soluzione

- DIRETTI: con un numero finito di operazioni si calcola la soluzione.
- ITERATIVI: si costruisce una successione di vettori che all'infinito tende alla soluzione del sistema.

SISTEMI “FACILI”: diagonali

$$Dx = b$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$det(D) = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$$

$$x_i = \frac{b_i}{d_i} \quad i = 1, \ldots, n$$

SISTEMI “FACILI”: triangolari

$$Rx = b$$

inferiore $r_{ij} = 0 \;\; i < j$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & & & \\ r_{21} & r_{22} & & \\ & & \ldots & \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

superiore $r_{ij} = 0 \;\; i > j$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ & & \ldots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det(R) = r_{11} \cdot r_{22} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$$

Si può dimostrare che l’inversa di una matrice triangolare inferiore (superiore) è ancora una matrice triangolare inferiore (superiore)

Algoritmo di sostituzione all’avanti

$$\begin{array}{lllll} r_{11}x_1 + & & & & = b_1 \rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1}{r_{11}} \\ r_{21}x_1 + & r_{22}x_2 & & & = b_2 \rightarrow \quad x_2 = \frac{b_2 - r_{21}x_1}{r_{22}} \\ & & \ldots & & \\ r_{n1}x_1 + & r_{n2}x_2 + & \ldots & + r_{nn}x_n & = b_n \rightarrow \quad x_n = \frac{b_1 - \sum_{i=1}^{n-1} r_{ni}x_i}{r_{nn}} \end{array}$$

for $i = 1, \ldots, n$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{i=1}^{i-1} r_{ji}x_i}{r_{jj}}$$

Algoritmo di sostituzione all'indietro

$$\begin{array}{llllll} r_{11}x_1+ & r_{12}x_2+ & & & +r_{1n}x_n & = b_1 \\ & r_{22}x_2+ & & & +r_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \dots & & & \\ & & \dots & r_{n-1n-1}x_{n-1} & +r_{n-1n}x_n & = b_{n-1} \\ & & \dots & & r_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

for $i = n, \dots, 1$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{i=j+1}^{n} r_{ji} x_i}{r_{jj}}$$

Complessità computazionale degli algoritmi di sostituzione all'avanti e all'indietro

Divisioni e moltiplicazioni

$$\begin{array}{ll} x_1 = \frac{b_1}{r_{11}} & \to 1 \\ x_2 = \frac{b_2 - r_{21}x_1}{r_{22}} & \to 2 \\ \dots & \\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}x_j}{r_{ii}} & \to i \end{array}$$

$$1 + 2 + \dots + i + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \approx n^2$$

Sistemi qualunque

$$Ax = b$$

- Calcolo dell' inversa: $x = A^{-1}b$

$$7x = 21$$

$$x = (7)^{-1}21 = .142857 \cdot 21 = 2.99997$$

Sistemi qualunque

$$Ax = b$$

- Metodo di Cramer : esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{det\begin{pmatrix} 39 & 2 & 1 \\ 34 & 3 & 1 \\ 26 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{det(A)} \quad x_2 = \frac{det\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{d} \quad x_3 = \frac{det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 39 \\ 2 & 3 & 34 \\ 1 & 2 & 26 \end{pmatrix}}{det(A)}$$

$$x_1 = \frac{37}{4} \qquad x_2 = \frac{17}{4} \qquad x_3 = \frac{11}{4}$$

Complessità computazionale del metodo di Cramer

Calcolo del determinante (Teorema di Laplace) $= n!(n-1)$

⇩

$$n!(n-1)(n+1)$$

Se 1 nsec (10^{-9}) per eseguire il prodotto e $n = 20$

⇨ 150 anni!

Metodo di eliminazione

$$[Ab] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{2}{3} \; * \; + \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 34 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione

$$[A_{\frac{1}{2}} b_{\frac{1}{2}}] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{3} \quad * \quad + \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ \quad 5/3x_2 + 1/3x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione

$$[A_1 b_1] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & 8 \\ 0 & 4/3 & 8/3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{4}{5} \quad * \quad + \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ \quad 5/3x_2 + 1/3x_3 = 8 \\ \quad 4/3x_2 + 8/3x_3 = 13 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione

$$[A_2 b_2] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & 8 \\ 0 & 0 & 12/5 & 33/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ \quad 5/3x_2 + 1/3x_3 = 8 \\ \quad\quad 12/5x_3 = 33/5 \end{cases}$$

Sistema triangolare equivalente

- Costruire un sistema equivalente più semplice
- Combinazioni lineari delle righe della matrice (= equazioni del sistema)
- I coefficienti della combinazione lineare si dicono moltiplicatori

Algoritmo di eliminazione di Gauss

- Si aggiorna il triangolo superiore della matrice <u>completa</u>;
- I moltiplicatori si memorizzano nel triangolo inferiore.

for $k = 1, n-1$
  for $i = k+1, n$
    $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
    for $j = k+1, n+1$
      $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} * a_{kj}$

Elemento perno o pivot

Fallimento dell'algoritmo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det A = -1 \neq 0$$
$$a_{11} = 0$$

$$\Downarrow$$

L' algoritmo di eliminazione non funziona anche se la matrice è non singolare.

Trasformazioni di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad i = 2, \dots, n$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \dots & \dots & 1 & \\ -m_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Trasformazione elementare di Gauss applicata alla 1° colonna

1° Passo

$$[A_2 b_2] = L_1 [Ab] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \dots & & \dots & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

$$a_{ij}^{(2)} = -m_{i1} a_{1j} + a_{ij}$$

$$a_{11} \neq 0$$

Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \dots & \dots & 1 & \\ -m_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & \dots & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Osservazione

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_{21} & 1 \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Minore principale di ordine 2 di A

$$1 \cdot \quad det(A^{(2)}) \quad = a_{11}a_{22}^{(2)}$$

Se il minore principale di ordine 2 di A è non nullo, allora

$$a_{22}^{(2)} \neq 0$$

2° Passo

$$[A_2 b_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \dots & & \dots & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & \\ 0 & \dots & & \\ 0 & -m_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \; i = 3, \dots, n$$

$$[A_3 b_3] = L_2[A_2 b_2] = L_2 L_1 [Ab] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & \\ 0 & \dots & & \\ 0 & -m_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & \dots & & & & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & \dots & b_3^{(3)} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

Osservazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & & \\ -m_{21} & 1 & \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} det(A^{(3)})$$

$$1 \cdot \qquad det(A^{(3)}) \qquad = a_{11} a_{22}^{(2)} a_{33}^{(3)}$$

Se il minore principale di ordine 3 di A è non nullo, allora

$$a_{33}^{(3)} \neq 0$$

k° Passo

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & -m_{k+1k} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_{nk} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \dots, n$$

Se il minore principale di ordine *k* di A è non nullo, allora

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0$$

Condizione sufficiente

- Se tutti i minori principali di A sono non nulli, allora tutti gli elementi pivot sono diversi da zero e l'algoritmo di Gauss può essere applicato.
- Solo l'ultimo minore può anche essere nullo.
- Inoltre si ha

$$det(A^{(k)}) = a_{11} a_{22}^{(2)} a_{33}^{(3)} \dots a_{kk}^{(k)}$$

Dopo *n-1* passi

$$L_{n-1}...L_2L_1[A\ b]=[R\ y]$$

$$\Downarrow$$

$$A=\underbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}...L_{n-1}^{-1}}_{L}R \qquad b=L_1^{-1}L_2^{-1}...L_{n-1}^{-1}y$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A=LR \quad b=Ly}$$

Ricaviamo L

$$L=L_1^{-1}L_2^{-1}...L_{n-1}^{-1}$$

$$L_k=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & -m_{k+1k} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_{nk} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & m_{k+1k} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{nk} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ricaviamo L

$$L=L_1^{-1}L_2^{-1}...L_{n-1}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & m_{k+1k} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{nk} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1k} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{pmatrix} (0...010...0)$$

$$=m^{(k)}\,e_k^T$$

$$\Rightarrow \boxed{L_k=I-m^{(k)}e_k^T}$$

Inversa di L_k

$$\boxed{L_k^{-1} = I + m^{(k)} e_k^T}$$

Si verifica

$$(I - m^{(k)} e_k^T)(I + m^{(k)} e_k^T) =$$
$$I - \cancel{m^{(k)} e_k^T} + \cancel{m^{(k)} e_k^T} - m^{(k)} \underbrace{e_k^T m^{(k)}}_{=0} e_k^T =$$
$$I$$

k-esimo elemento di $m^{(k)}$

Ricaviamo $L = L_1^{-1} L_2^{-1} ... L_{n-1}^{-1}$

$$\begin{aligned} L_i^{-1} L_j^{-1} &= (I + m^{(i)} e_i^T)(I + m^{(j)} e_j^T) \\ &= I + m^{(i)} e_i^T + m^{(j)} e_j^T + m^{(i)} e_i^T m^{(j)} e_j^T \end{aligned}$$

$= 0$ se $i \le j$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ ... & 1 & & & & & \\ ... & m_{i+1i} & 1 & & & & \\ ... & ... & ... & 1 & & & \\ & & & m_{j+1j} & 1 & & \\ ... & ... & ... & ... & & 1 & \\ ... & m_{ni} & ... & m_{nj} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ ... & 1 & & \\ ... & m_{ij} & 1 & \\ ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Riassumendo

- Teorema

Se tutti i minori principali di A sono non nulli, tranne al più l'ultimo, allora esistono una matrice L triangolare inferiore unitaria ed una matrice triangolare superiore U tali che

$$A = LR$$

Inoltre

$$det(A) = r_{11} r_{22} ... rnn$$

FATTORIZZAZIONE DI A

Inoltre

- Si può dimostrare che se A è non singolare la fattorizzazione $A = LR$ è unica
- E' vero il viceversa: se A ammetto un'unica fattorizzazione $A = LR$ allora tutti i minori principali sono non nulli.

Complessità computazionale

	Calcolo moltiplicatori	Aggiornamento degli $a_{ij}^{(k)}$
Passo	Divisioni	Somme e prodotti
1	$n-1$	$(n-1)^2$
2	$n-2$	$(n-2)^2$
k	$n-k$	$(n-k)^2$
n	1	1

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Complessità computazionale della fattorizzazione di Gauss

$$\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{3}\right)$$

Metodo di pavimentazione

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} \; \boxed{a_{22} \quad a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} \; \boxed{a_{32}} \quad a_{33} \end{pmatrix} = LR$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{1j} = l_{11} r_{1j} \longrightarrow r_{1j} = a_{1j}$$

$$a_{i1} = l_{i1} r_{11} \longrightarrow l_{i1} = a_{i1}/r_{11}$$

$$a_{2j} = l_{21} r_{12} + r_{22} \longrightarrow r_{2j} = a_{2j} - l_{21} r_{1j}$$

$$a_{32} = l_{31} r_{12} + l_{32} r_{22} \longrightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31} r_{12})/r_{22}$$

$$a_{33} = l_{31} r_{13} + l_{32} r_{23} + r_{33} \longrightarrow r_{33} = a_{33} - \sum_{i=1}^{2} l_{3i} r_{i3}$$

Soluzione di un sistema

$$Ax = b$$

$$L\underbrace{Rx}_{} = b$$

$Ly = b$ ← Sostituzione all'avanti

$Rx = y$ ← Sostituzione all'indietro

$$\mathcal{O}(n^2)$$

Esempio

$$[A\ b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \boxed{3} & -1 & -1 & 2 & -3 \\ \boxed{-1} & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

2
3
−1

$$[A_2\ b_2] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & \boxed{-4} & -1 & -7 & -15 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

4
−3

$$[A_3\ b_3] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -13 & -13 \end{array}\right)$$

0

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 4 & 1 & \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$Rx = y \qquad y = L^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = 1,\ x_3 = 0,\ x_2 = 2,\ x_1 = -1$$

$$det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-13) = 39$$