Propagazione degli errori

- Poiché gli errori di arrotondamento capitano potenzialmente ad ogni operazione, ogni risultato intermedio può esserne soggetto e influenzare i risultati di tutte le operazioni successive.
- L'accumulo di questi errori viene chiamato propagazione degli errori.

Esempio di propagazione degli errori

$\beta = 10,\ t = 5$, arrotondamento
Si vuole calcolare $(x - y)/z$ dove

$$\begin{array}{cccccccc} x & = & .554617 & y & = & .554601 & z = & .1\ 10^{-n} \\ & \downarrow & & & \downarrow & & & \\ fl(x) & = & .55462 & fl(y) & = & .55460 & & \end{array}$$

Il risultato esatto dell'espressione è $.16\ 10^{-4+n}$.
$fl(x-y) = fl(.00002) = .2\ 10^{-4}$,
$E_a = |.16\ 10^{-4} - .2\ 10^{-4}| = \boxed{.04\ 10^{-4}}$.
$fl(fl(x-y)/z) = fl(.2\ 10^{-4}/.1\ 10^{-n}) = fl(.02\ 10^{n-4}) = .2\ 10^{n-3}$
$E_a = |.02\ 10^{n-4} - .16\ 10^{n-4}| = \boxed{.14\ 10^{n-4}}$

Amplificazione dell'errore di 10^n volte

Analisi dell'errore

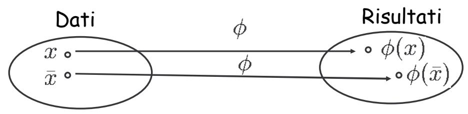
Cause di errore nel calcolo di un'espressione razionale

$$y = \phi(x)$$

- Gli errori dipendono
  - Dalle caratteristiche della funzione ϕ , quindi da caratteristiche insite nel problema
  - Dall'algoritmo usato per il calcolo

Errore inerente e condizionamento

Dati perturbati
Operazioni esatte



Si studia $|\varphi(\bar{x}) - \varphi(x)|$ in relazione a $|\bar{x} - x|$.

$$\boxed{E_{dati} = |\varphi(\bar{x}) - \varphi(x)|}$$

Errore inerente e condizionamento

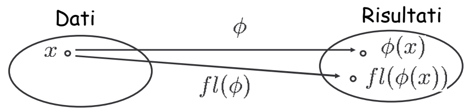
Errore relativo sui dati $\quad\longrightarrow\quad$ Errore relativo sui risultati

$$\epsilon_x = \frac{|x-\bar{x}|}{|x|} \longrightarrow \epsilon_{dati} = \frac{|\phi(x)-\phi(\bar{x})|}{|\phi(x)|}$$

- Se ϵ_{dati} è grande rispetto a ϵ_x allora il problema è mal condizionato, cioè a piccole variazioni dei dati corrispondono grandi variazioni dei risultati.
- Il condizionamento è una caratteristica del problema ed esprime quanto esso sia sensibile ad una variazione dei dati

Errore algoritmico e stabilità

Dati esatti
Operazioni con errori



Si studia $|fl(\varphi(x)) - \varphi(x)|$ in relazione alla precisione di macchina.

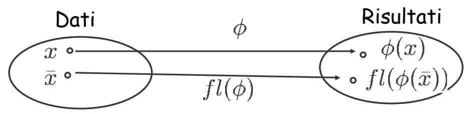
$$\boxed{E_{alg} = |fl(\varphi(x)) - \varphi(x)|.}$$

Errore algoritmico e stabilità

- Un algoritmo si dice stabile se non è troppo sensibile agli errori introdotti con le operazioni di macchina
- La stabilità è una proprietà dell'algoritmo, non del problema

Errore totale

Dati perturbati
Operazioni con errori



Si studia

$$\boxed{E_{tot} = |fl(\varphi(\bar{x})) - \varphi(x)|}$$

in relazione a $|x - \bar{x}|$ e all'aritmetica finita.

Parametri per l'analisi degli errori

Errori assoluti

$E_{dati} = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x)$
sui dati iniziali

$E_{alg} = fl(\varphi(x)) - \varphi(x)$
algoritmico

$$\begin{aligned} E_{tot} &= fl(\varphi(\bar{x})) - \varphi(x) \\ &= E_{alg} + E_{dati} \end{aligned}$$
totale

Errori relativi

$\epsilon_{dati} = \frac{\varphi(\bar{x}) - \varphi(x)}{\varphi(x)}$
sui dati iniziali

$\epsilon_{alg} = \frac{fl(\varphi(x)) - \varphi(x)}{\varphi(x)}$
algoritmico

$$\begin{aligned} \epsilon_{tot} &= \frac{fl(\varphi(\bar{x})) - \varphi(x)}{\varphi(x)} \\ &= \epsilon_{dati} + \epsilon_{alg} \end{aligned}$$
totale

Analisi del primo ordine

- Si sono trascurati i termini di secondo grado:

$$\begin{aligned} \epsilon_{tot} &= \frac{fl(\varphi(\bar{x})) - \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{x}) - \varphi(x)}{\varphi(x)} \\ &= \frac{\varphi(\bar{x}) - \varphi(x)}{\varphi(x)} + \frac{fl(\varphi(\bar{x})) - \varphi(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})} \left(\frac{\varphi(\bar{x}) - \varphi(x) + \varphi(x)}{\varphi(x)} \right) \\ &= \epsilon_{dati} + \epsilon_{alg} \left(1 + \epsilon_{dati} \right) = \\ &\simeq \epsilon_{dati} + \epsilon_{alg} \end{aligned}$$

Non si è considerato il termine di secondo grado $\epsilon_{dati}\epsilon_{alg}$

Tecniche di analisi dell'errore

Errore algoritmico

Analisi in avanti dell'errore algoritmico

- Si basa sul teorema dell'errore
  $fl(x \bullet y) = (x \bullet y)(1+\epsilon) \qquad |\epsilon| \le k\beta^{1-t}.$
- Si calcola l'errore relativo del risultato finale rispetto agli errori relativi introdotti dalle singole operazioni dell'algoritmo;
- Ci limitiamo ad una analisi del primo ordine, pertanto vengono trascurati i termini di secondo grado

Somma di 3 numeri, algoritmo 1

$$\varphi(a,b,c) = a+b+c \qquad (a+b)+c$$

$$fl(a+b) = \underbrace{(a+b)(1+\epsilon_1)}_{y} \quad |\epsilon_1| < u$$

$$fl(y+c) = (y+c)(1+\epsilon_2) \quad |\epsilon_2| < u$$

$$\begin{aligned} fl(a+b+c) &= fl(y+c) \\ &= ((a+b)(1+\epsilon_1)+c)(1+\epsilon_2) \\ &\simeq a+b+c+(a+b)\epsilon_1+(a+b+c)\epsilon_2 \end{aligned}$$

Si trascurano i termini $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2$

$$\epsilon_{alg1} = \frac{fl(a+b+c)-(a+b+c)}{a+b+c} \simeq \boxed{\frac{a+b}{a+b+c}}\epsilon_1 + \boxed{1}\cdot\epsilon_2$$

Fattori di amplificazione degli errori delle singole operazioni

Indice algoritmico

- Si definisce come la somma dei valori assoluti dei fattori di amplificazione

$$I_{alg1} = \left|\frac{a+b}{a+b+c}\right| + 1$$

- Il fattore di amplificazione dell'errore dell'ultima operazione è sempre 1, quindi l'indice algoritmico è un numero > 1

Somma di 3 numeri, algoritmo 2

$$\varphi(a,b,c) = a+b+c \qquad a+(b+c)$$

$$fl(b+c) = \underbrace{(b+c)(1+\epsilon_3)}_{w} \quad |\epsilon_3| < u$$

$$fl(a+w) = (a+w)(1+\epsilon_4) \quad |\epsilon_4| < u$$

$$\begin{aligned} fl(a+b+c) &= fl(a+w) \\ &= (a+(b+c)(1+\epsilon_3))(1+\epsilon_4) \\ &\simeq a+b+c+(b+c)\epsilon_3+(a+b+c)\epsilon_4 \end{aligned}$$

$$\epsilon_{alg2} = \frac{fl(a+b+c)-(a+b+c)}{a+b+c} \simeq \boxed{\frac{b+c}{a+b+c}}\epsilon_3 + \boxed{1}\cdot\epsilon_4$$

$$I_{alg2} = \left|\frac{b+c}{a+b+c}\right| + 1$$

Confronto di algoritmi

- Dati due algoritmi per il calcolo di una stessa espressione, alg1 ed alg2, si dice che alg1 è più stabile di alg 2 se

$$I_{alg1} < I_{alg2}$$

- Questo confronto dipende dai dati

Somma di tre numeri: confronto degli algoritmi

$a = .2337126\ 10^{-4}, b = .3367843\ 10^{2}, c = -0.3367781\ 10^{2}$:

$$I_{alg1} = |\frac{a+b}{a+b+c}| + 1 = 0.5 \cdot 10^5 + 1$$

$$I_{alg2} = |\frac{b+c}{a+b+c}| + 1 = .96 + 1$$

Il secondo algoritmo è più stabile per i valori assunti dai dati

Differenza di quadrati (1)

$\varphi(a, b, c) = a^2 - b^2$ $\qquad a^2 - b^2$

$$fl(a^2) = fl(a \cdot a) = \underbrace{a^2(1+\epsilon_1)}_{w} \quad |\epsilon_1| < u$$

$$fl(b^2) = fl(b \cdot b) = \underbrace{b^2(1+\epsilon_2)}_{v} \quad |\epsilon_2| < u$$

$$\begin{aligned} fl(a^2 - b^2) = fl(w - v) &= (w - v)(1+\epsilon_3) \quad |\epsilon_3| < u \\ &= (a^2(1+\epsilon_1) - b^2(1+\epsilon_2))(1+\epsilon_3) \\ &\simeq a^2 - b^2 + a^2\epsilon_1 - b^2\epsilon_2 + (a^2 - b^2)\epsilon_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_{alg1} &= \frac{fl(a^2-b^2)-(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \\ &\simeq \frac{a^2}{a^2-b^2}\epsilon_1 - \frac{b^2}{a^2-b^2}\epsilon_2 + \epsilon_3 \end{aligned}}$$

$$\boxed{I_{alg1} = \left|\frac{a^2}{a^2 - b^2}\right| + \left|\frac{b^2}{a^2 - b^2}\right| + 1}$$

Differenza di quadrati (2)

$\varphi(a, b, c) = a^2 - b^2$ $\qquad (a - b)(a + b)$

$$fl(a - b) = \underbrace{(a - b)(1+\epsilon_4)}_{x} \quad |\epsilon_4| < u$$

$$fl(a + b) = \underbrace{(a + b)(1+\epsilon_5)}_{y} \quad |\epsilon_5| < u$$

$$\begin{aligned} fl(a^2 - b^2) = fl(x \cdot y) &= xy(1+\epsilon_6) \quad |\epsilon_6| < u \\ &= (a - b)(a + b)(1+\epsilon_4)(1+\epsilon_5)(1+\epsilon_6) \\ &\simeq (a^2 - b^2)(1 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_{alg2} &= \frac{fl(a^2-b^2)-(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \\ &\simeq \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 \end{aligned}}$$

$$\boxed{I_{alg2} = 3}$$

Confronto tra i due algoritmi

- Si vuole determinare per quali valori di a e di b l'algoritmo 2 è più stabile dell'algoritmo 1

$$I_{alg1} \geq I_{alg2}$$

$$\frac{a^2}{|a^2-b^2|} + \frac{b^2}{|a^2-b^2|} + 1 \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad |a^2-b^2| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

$$\text{Se} \begin{cases} 1.\ a^2-b^2 \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} \leq 3 \\ 2.\ -(a^2+b^2) \leq 2(a^2-b^2) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{b^2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{b^2} \leq 3$$

alg2 è più stabile di alg1

Somma di n numeri

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \sum_1^n x_i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} s \leftarrow x_1; \\ \text{for} \quad i=2,...,n \\ \quad \lfloor\ s \leftarrow s + x_i; \end{array}}$$

$$fl(S) = (...(((x_1+x_2)(1+\epsilon_2)+x_3)(1+\epsilon_3)+x_4)(1+\epsilon_4)+...+x_n)(1+\epsilon_n)$$

$$= (x_1+x_2)(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3)...(1+\epsilon_n)+x_3(1+\epsilon_3)...(1+\epsilon_n)+...+x_n(1+\epsilon_n)$$

$$\simeq (x_1+x_2)(1+\epsilon_2+\epsilon_3+...+\epsilon_n)+x_3(1+\epsilon_3+...+\epsilon_n)+...+x_n(1+\epsilon_n)$$

$$= \sum_1^n x_i + (x_1+x_2)\epsilon_2 + (x_1+x_2+x_3)\epsilon_3 + ... + (x_1+x_2+...+x_n)\epsilon_n)$$

$$\epsilon_{alg} = \frac{fl(S)-S}{S} \simeq \frac{x_1+x_2}{x_1+...+x_n}\epsilon_2 + \frac{x_1+x_2+x_3}{x_1+...+x_n}\epsilon_3 + \frac{x_1+...+x_{n-1}}{x_1+...+x_n}\epsilon_{n-1} + \epsilon_n$$

$$I_{alg} = |\frac{x_1+x_2}{S}| + |\frac{x_1+x_2+x_3}{S}| + ... + |\frac{x_1+...+x_{n-1}}{S}| + 1$$

$$|\epsilon_i| \leq u$$

Stabilità dell'algoritmo

$$\epsilon_{alg} = \frac{fl(S)-S}{S} \simeq \frac{x_1+x_2}{x_1+...+x_n}\epsilon_2 + \frac{x_1+x_2+x_3}{x_1+...+x_n}\epsilon_3 + \frac{x_1+...+x_{n-1}}{x_1+...+x_n}\epsilon_{n-1} + \epsilon_n$$

$$I_{alg} = |\frac{x_1+x_2}{S}| + |\frac{x_1+x_2+x_3}{S}| + ... + |\frac{x_1+...+x_{n-1}}{S}| + 1$$

allora

$$|\epsilon_{alg}| \leq (n-1)u \qquad I_{alg} \leq n-1$$

- Tuttavia conviene sommare i numeri dal più piccolo al più grande

Esempio, *t=7, β=10,* arrotondamento

$$x_1 = 1, x_i = .1\ 10^{-6}\ i = 2,...,10.$$

Risultato esatto $\sum_{i=1}^{10} x_i = 1 + 9\ 10^{-7} = 1.0000009$

$$\boxed{\begin{array}{l} s \leftarrow x_1; \\ \text{for} \quad i=2,...,10 \\ \quad \lfloor\ s \leftarrow s + x_i; \end{array}}$$

$$\begin{array}{lll} i=2 & s=fl(x_1+x_2) & = fl(1+.1\ 10^{-6}) = fl(1.0000001) = .1\ 10^1 = y_1 \\ i=3 & s=fl(y_1+x_3) & = fl(1+.1\ 10^{-6}) = fl(1.0000001) = .1\ 10^1 = y_2 \\ & & \vdots \\ i=10 & s=fl(y_{n-1}+x_n) & = fl(1+.1\ 10^{-6}) = fl(1.0000001) = .1\ 10^1 \end{array}$$

$$\epsilon_r = 8.999..\ 10^{-7} \sim 10^{-6}$$

Somma in ordine inverso

$$x_1 = 1, x_i = .1\ 10^{-6}\ i = 2, ..., 10.$$

Risultato esatto

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1 + 9\ 10^{-7} = 1.0000009$$

$$\boxed{\begin{array}{l} s \leftarrow x_{10}; \\ \text{for} \quad i = 9, ..., 1\ : -1 \\ \quad \lfloor\ s \leftarrow s + x_i; \end{array}}$$

$$\begin{array}{lll} i=9 \quad s = fl(x_{10}+x_9) & = & fl(.1\ 10^{-6} + .1\ 10^{-6}) = fl(0.0000002) = .2\ 10^{-6} = z_1 \\ i=8 \quad s = fl(z_1+x_3) & = & fl(.2\ 10^{-6} + .1\ 10^{-6}) = fl(0.0000003) = .3\ 10^{-6} = z_2 \\ & \vdots & \\ i=2 \quad s = fl(z_7+x_2) & = & fl(.8\ 10^{-6} + .1\ 10^{-6}) = fl(0.0000009) = .9\ 10^{-6} = z_8 \\ i=1 \quad s = fl(z_8+x_1) & = & fl(.9\ 10^{-6} + 1) = fl(1.0000009) = .100001\ 10^{1} \end{array}$$

$$\epsilon_r = 9.999..\ 10^{-8} \sim 10^{-7}$$

L'errore relativo è 10 volte più piccolo

Funzioni non razionali

- Funzioni trigonometriche, logaritmi, esponenziali
- Vengono approssimate mediante una successione di operazioni algebriche elementari

Somma di numeri di segno discorde

- Conviene sommare prima tutti i positivi, poi sommare i valori assoluti di quelli negativi ed infine sottrarre i risultati.

Analisi degli errori

L'errore inerente

Esempio: soluzione di equazioni di secondo grado

- Dato x, trovare y tale che

$$y^2 - 4y + x = 0$$

- Esprimiamo le soluzioni del problema in funzione del dato x

$$y_{1,2}(x) = 2 \pm \sqrt{4-x}$$

$$x = 4 \Longrightarrow y_{1,2} = 2$$

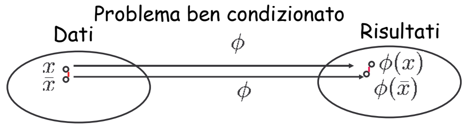
$$x = 4 - 10^{-6} \Longrightarrow y_{1,2} = 2 \pm 10^{-3}$$

A piccole variazioni dei dati (10^{-6}) corrispondono grandi variazioni dei risultati (10^{-3})

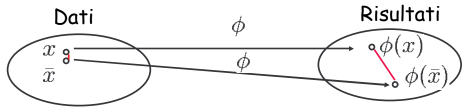
Questo è un esempio di problema mal condizionato

Rappresentazione grafica del condizionamento

Problema ben condizionato



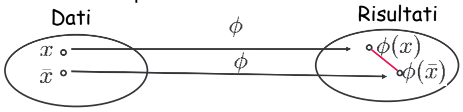
Problema mal condizionato



- Supponiamo che il risultato y che stiamo cercando sia legato tramite la funzione φ ai dati x;

$$y = \varphi(x)$$

- Cerchiamo una stima della variazione che si produce sul risultato a partire da due dati diversi



Indice di condizionamento

- Se x e $\bar{x}$ appartengono all'insieme dei dati, allora possiamo scrivere

$$\bar{x} = x + \delta \Longrightarrow \delta = \bar{x} - x \Longrightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{\bar{x} - x}{x} = \epsilon_x$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{dati} &= \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\varphi(x)} \\ &\simeq \frac{\varphi(x) + \varphi'(x)\delta - \varphi(x)}{\varphi(x)} \\ &= \frac{\varphi'(x)\delta}{\varphi(x)} \\ &= \boxed{\frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)}}\epsilon_x \end{aligned}$$

Indice di condizionamento=
fattore di amplificazione dell'errore sui dati

Indice di condizionamento

$$I_{cond} = \left|\frac{\varphi'(x)x}{\phi(x)}\right|$$

- Se $I_{cond} >> 1$, il problema è mal condizionato, se è piccolo allora è ben condizonato

Esempio di prima

$$y^2 - 4y + x = 0 \qquad y_1(x) = 2 + \sqrt{4-x}$$

$$\varphi(x) = 2 + \sqrt{4-x}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$I_{cond} = \left|-\frac{x}{2\sqrt{4-x}(2+\sqrt{4-x})}\right| \longrightarrow^{x \to 4} \infty$$

Il problema è mal condizionato per valori vicini a 4

Esempio

$$\varphi(x) = \log(x)$$

$$I_{cond} = \left|\frac{1}{\log x}\right| \longrightarrow^{x \to 1} \infty$$

Il problema è mal condizionato per valori vicini ad 1

Osservazione

- Un problema può essere ben condizionato per un insieme di valori e mal condizionato per altri

Caso generale: dipendenza da n dati

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n$$

- Se abbiamo n dati, abbiamo anche n errori

$$x_i - \bar{x}_i = \delta_i \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{x_i} = \frac{\delta_i}{x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} E_{dati} &= |\varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)| \\ &= |\varphi(x_1 + \delta_i, \dots, x_n + \delta_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n)| \\ &\simeq \left| \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \delta_i \right| \end{aligned}$$

Stima dell'errore assoluto sui dati

Errore relativo

$$\begin{aligned} \epsilon_{dati} &= \frac{\varphi(x_1 + \delta_1, \dots, x_n + \delta_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \\ &\simeq \sum_{i=1}^{n} \boxed{\frac{\partial(\varphi(x_1, \dots, x_n))}{\partial x_i} \frac{x_i}{\varphi(x_1, \dots, x_n)}} \epsilon_{x_i} \end{aligned}$$

Fattori di amplificazione degli errori sui singoli dati

$$I_{cond} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \right|$$

Condizionamento delle operazioni elementari

$$\begin{aligned} \epsilon_{x \pm y} &= \frac{x}{x \pm y} \epsilon_x \pm \frac{y}{x \pm y} \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_x + \epsilon_y \\ \epsilon_{x/y} &= \epsilon_x - \epsilon_y \\ \epsilon_{\sqrt{x}} &= \frac{1}{2} \epsilon_x \\ \epsilon_{x^\alpha} &= \alpha \epsilon_x \end{aligned}$$

- Moltiplicazione, divisione radice e potenza con |α| piccolo sono ben condizionate. Per la sottrazione x-y, con x≈y si ha il fenomeno di cancellazione

Esempi

- $\varphi(x) = x - 1 \quad I_{cond} = \left| \frac{x}{x-1} \right|$
  malcondizionato per x vicino ad 1;
- $\varphi(x) = e^x \quad I_{cond} = |x|$
  malcondizionato per x grandi, ben condizionato per x<1
- $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad I_{cond} = \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right|$
  sempre ben condizionato

Esempio

- $y = \varphi(a,b,c) = a+b+c$

  $$\epsilon_y = \frac{a}{a+b+c}\epsilon_a + \frac{b}{a+b+c}\epsilon_b + \frac{c}{a+b+c}\epsilon_c$$

  $$I_{cond} = \left|\frac{a}{a+b+c}\right| + \left|\frac{b}{a+b+c}\right| + \left|\frac{c}{a+b+c}\right|$$

  è ben condizionato se a,b,c sono di segno concorde

Esempio

- $y = \varphi(a,b) = a^2 - b^2$

  è mal condizionato se a^2 e b^2 sono circa uguali

  $$\epsilon_y = \frac{2a^2}{a^2-b^2}\epsilon_a - \frac{2b^2}{a^2-b^2}\epsilon_b$$

  $$I_{cond} = \frac{2a^2}{|a^2-b^2|} + \frac{2b^2}{|a^2-b^2|}$$