Complementi di Geometria (2016-2017)

– Second draft –

Ph. ELLIA

Upgrade 28 aprile 2017

Indice

Parte I

Prerequisiti.

1

Introduzione.

La geometria algebrica moderna nasce con Riemann. Questo è paradossale perché c'è poca algebra nei lavori di Riemann (i suoi metodi sono analitici, topologici) ma molta geometria e i suoi risultati (teorema di uniformizzazione) mettono le basi per un legame tra geometria analitica e geometria proiettiva. Alla morte di Riemann (1866) si distingono due filoni: quello *algebrico* e quello *geometrico*, chiamiamoli così.

Il filone *algebrico* inaugurato da Dedekind e Weber ha per scopo di ritrovare, per via esclusivamente algebrica, i risultati di Riemann sulle superfici di Riemann compatte. Si tratta per iniziare di associare una curva C_K a ogni estensione finita K di $\mathbb{C}(X)$, di modo che K sia il campo delle funzioni razionale di C_K (vedere [6], I. 6). Dedekind e Weber sono tra i protagonisti della fondazione della teoria algebrica dei numeri e quindi non è sorprendente trovare molte analogie tra la loro "geometria" e la teoria dei numeri. Si intravede (molto lontanamente) la speranza di usare metodi geometrici per problemi di teoria dei numeri. Sulle prime questo filone non ha molti seguaci, ma si rileverà fondamentale in seguito.

Il filone *geometrico* (Roch, Clebsch, Brill, Max Noether (il padre di Emmy), Cayley, Halphen, Zeuthen) e la prima generazione di geometri italiani (Cremona, C. Segre, Bertini) si interessa, con metodi sempre più geometrici, alla geometria della curve algebriche piane (anche singolari) e più generalmente alle sotto varietà proiettive di $\mathbb{P}^n$. Questo è il filone più popolare e sarà dominato (nel periodo 1880-1930 circa) dalla scuola italiana (Castelnuovo, Enriques, Severi e tanti, tanti altri). Si lavora soprattutto in geometria birazionale, lo strumento principale è la nozione di sistema lineare. Le dimostrazioni usano argomenti di geometria sintetica, l'algebra è praticamente assente. La molle di risultati dimostrati è impressionante, il maggior successo è la classificazione di Enriques (con notevoli contributi di Castelnuovo) delle superfici algebriche. Verso gli anni 30 la macchina inizia a inceppare. Una mancanza di rigore nelle definizioni e nelle dimostrazioni rendono la teoria confusa, imprecisa. Il bisogno di una rifondazione si fa sentire e specie di un uso maggiore dell'algebra per portare rigore. Oscar Zariski, che aveva studiato a Roma, era presentito da Castelnuovo come la persona capace di portare avanti questa rifondazione. Sfortunatamente i nostri sono stati incapaci di procurare a Zariski una posizione accademica in Italia. (Forse non tutti (Enriques, Severi) erano convinti dell'utilità di una rifondazione algebrica della geometria.) E quindi Zariski è andato negli Stati Uniti dove in pochi anni ha effettivamente reso più algebrica la geometria (topologia di Zariski, spazio tangente di Zariski ecc...) e fondato una scuola molto influente (Mumford è un allievo di Zariski, tra tanti altri).

Passati gli anni bui della seconda guerra mondiale, verso l'inizio degli anni '50, si assiste, in topologia, alla nascita di tecniche nuove che cambieranno la matematica: teoria delle categorie e nascita della topologia algebrica, omologia, coomologia, algebra omologica e teoria dei fasci. Dopo l'avanzata di Zariski, la geometria algebrica è ferma.

Nel 1955, seguendo un suggerimento di H. Cartan, Serre, usando la teoria dei fasci, dà una definizione di varietà algebrica "astratta" e mostra l'utilità dei metodi coomologici dimostrando vari risultati fondamentali (cf [8]). La nuova teoria però è limitata: funziona bene solo su un campo algebricamente chiuso. Per quelli che vorrebbero portare avanti il programma iniziato da Dedekind e Weber, cioè usare metodi geometrici in aritmetica, questa è una seria limitazione. Dopo vari tentativi (Weil, Serre, Nagata, Chevalley, Cartier) Grothendieck trova la soluzione nella sua teoria degli schemi. Il periodo 1960-1970 è il periodo d'oro dell'IHES, del *Séminaire de géométrie algébrique* (SGA) e degli *Eléments de géométrie algébrique* (EGA). Chiunque voleva studiare geometria algebrica "doveva" studiarsi le 1.600 pagine degli EGA. Per fortuna nel 1977, Hartshorne con il suo libro *Algebraic geometry* ([6]) è riuscito a fare un'ottima sintesi degli EGA, mettendo tra l'altro la teoria degli schemi al servizio della geometria "classica". Il libro di Hartshorne rimane tuttora la migliore referenza per iniziare lo studio della geometria algebrica.

Infatti dopo la "sbornia schematica" degli anni 1960-70, ma muniti di un linguaggio (quello degli schemi) ineccepibile e di una marea di strumenti e risultati generali si è iniziato (fine degli anni '70 circa) a riconsiderare i problemi classici. Una rilettura attenta a messo in evidenza che molti risultati classici (specie della scuola italiana), considerati validi da decenni, avevano una dimostrazione incompleta o, addirittura, sbagliata. Alcuni di questi risultati si sono poi rilevati falsi!

In questo corso cercheremo di dare una rapida introduzione alla teoria degli schemi di Grothendieck. Il linguaggio degli schemi è ormai indispensabile per leggere un qualsiasi lavoro di ricerca in geometria algebrica. Prendendo come riferimento il libro di Hartshorne "Algebraic geometry" ([6]), ormai un classico in materia, proponiamo una lettura "veloce" dei capitoli II e III del libro. (Il capitolo I è sostanzialmente coperto dal corso di geometria algebrica). Tralasceremo gli argomenti più tecnici e generali, rimandando al libro, ma tratteremo con la maggior precisione possibile il materiale necessario per la dimostrazione coomologica del teorema di Riemann-Roch per le curve (primo paragrafo del capitolo IV di [6]). Il teorema di Riemann-Roch, con le sue generalizzazioni, è sicuramente IL teorema fondamentale della geometria algebrica proiettiva. Daremo inoltre, seguendo [2], una dimostrazione della dualità di Serre nel caso delle curve. Strada facendo vedremo la struttura dei fasci coerenti su una curva liscia e la classificazione dei fibrati su $\mathbb{P}^1$ (teorema di Grothendieck & al.). Finalmente, tempo permettendo, daremo le prime applicazioni del teorema di Riemann-Roch (ogni curva proiettiva liscia può essere immersa in $\mathbb{P}^3$ ecc...).

2

Prefasci e fasci.

Il problema ricorrente in geometria è di definire la classe delle *buone* funzioni sulle varietà (*buone* = continue, differenziabili, analitiche, algebriche...). L'essere continua, differenziabile, analitica è una proprietà *locale*. E' meno chiaro a priori che questo sia ancora vero per le "funzioni algebriche", anzi a priori non è affatto chiaro cosa debba essere una "funzione algebrica"!

2.1 Prefasci, fasci di funzioni.

Sia quindi X uno spazio topologico e per ogni aperto $U \subset X$, indichiamo con $\mathcal{F}ct(U,k)$ l'insieme delle funzioni da U in un campo k ($k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, ...$). Un elemento $f : U \to k$ di $\mathcal{F}ct(U,k)$ è solo un'applicazione dall'insieme U nell'insieme k.

Se $V \subset U$ e se $f \in \mathcal{F}ct(U,k)$, allora $f|V \in \mathcal{F}ct(V,k)$. Questo definisce *un'applicazione di restrizione*: $r_{UV} : \mathcal{F}ct(U,k) \to \mathcal{F}ct(V,k)$. Chiaramente se $W \subset V \subset U$, abbiamo:

Condizione di restrizione:
1) $r_{VW} \circ r_{UV} = r_{UW}$
2) $r_{UU} = Id.$

Sia $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ un ricoprimento aperto di U. Allora, per definizione di funzione abbiamo:

Condizione di incollamento:
se $f_i \in \mathcal{F}ct(U_i,k)$ soddisfano $f_i|(U_i \cap U_j) = f_j|(U_i \cap U_j)$, $\forall i,j \in I$
allora esiste una ed un'unica $f \in \mathcal{F}ct(U,k)$, tale che $f|U_i = f_i$, $\forall i \in I$

Adesso vogliamo ripetere queste considerazioni per certe classi di funzioni (continue, differenziabili, limitate, ecc...).

Alcune di queste proprietà richiedono che sia definita una topologia su k. Se $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ abbiamo varie topologie a disposizione, in generale abbiamo solo la topologia di Zariski a disposizione.

Sia quindi $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{F}ct(U)$ il sotto insieme delle funzioni $f : U \to k$ che soddisfano una certa proprietà (P).

In tutti i casi sensati ((P)= continua, differenziabile, limitata, ecc...), la *condizione di restrizione* è verificata. La *condizione di incollamento* invece non è sempre soddisfatta.

Il problema è il seguente: se $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, allora esiste una ed un'unica funzione $f \in \mathcal{F}ct(U,k)$ che incolla le f_i (perché $f_i \in \mathcal{F}ct(U_i,k)$), il problema è vedere se $f \in \mathcal{O}(U)$. Questo sarà il caso se la proprietà (P) che definisce $\mathcal{O}$ è *locale*. Una proprietà è locale se vera su X è vera su ogni aperto $U \subset X$ e se vera su ogni aperto di un ricoprimento aperto di X, è vera su X.

Quindi per esempio $U \to \mathcal{L}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata}\}$, soddisfa la condizione di restrizione ma non quella di incollamento.

Definizione 2.1. *Sia X uno spazio topologico. Un prefascio, $\mathcal{F}$, di funzioni (a valori in k) su X consiste per ogni aperto $U \subset X$, nell'assegnazione di $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{F}ct(U,k)$, di modo che la condizione di restrizione sia soddisfatta.*

Se inoltre la condizione di incollamento è pure soddisfatta, il prefascio $\mathcal{F}$ è un fascio.

Germi di funzioni, localizzazione.

Sia $\mathcal{O}$ un prefascio di funzioni su X. Sia $x \in X$, U un aperto contenente x e $f \in \mathcal{O}(U)$ una funzione. Prendendo la restrizione di f ad aperti sempre più piccoli contenenti x, ci viene da pensare che "al limite" arriveremo a $f|x$ cioè al valore, $f(x)$, di f in x.

Questo ragionamento ci porta alla nozione di *germe* di funzione. Sia $\mathcal{U}_x$ l'insieme delle coppie (U,f), U intorno aperto di x, $f \in \mathcal{O}(U)$. Su $\mathcal{U}_x$ sia $\sim$ la relazione: $(U,f) \sim (V,g) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V$ aperto contenete x, tale che: $f|W = g|W$. Si verifica che $\sim$ è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathcal{O}_x$ si chiama *l'insieme dei germi di funzioni in x* o anche *spiga* di $\mathcal{O}$ in x.

Sia $f_x \in \mathcal{O}_x$ un germe in x. Possiamo definire il valore di f_x in x, $f_x(x)$, nel modo seguente: sia (U,f) un rappresentante di f_x, allora: $f_x(x) = f(x)$. Chiaramente questo non dipende dalla scelta del rappresentante scelto.

Quindi ogni funzione f determina un germe f_x, cioè abbiamo $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_x$. Il germe è l'espressione *locale in x* della funzione f: abbiamo localizzato f nel punto x. La localizzazione di un anello secondo una parte moltiplicativa è il procedimento algebrico che permette di fare la stessa operazione in un contesto algebrico.

Nel caso di un fascio di funzioni a valori in un campo k, $\mathcal{O}(U)$ ha una naturale struttura di anello (anzi di k-algebra) data da $f+g : U \to k : x \to f(x)+g(x)$, $fg : U \to k : x \to f(x)g(x)$ e $\lambda f : U \to k : x \to \lambda f(x)$). Si verifica che anche $\mathcal{O}_x$ ha una struttura di anello. Supponiamo che la proprietà (P) che definisce $\mathcal{O}$ sia <u>localmente invertibile</u> cioè: se $f \in \mathcal{O}(U)$ verifica $f(x) \neq 0$, allora esiste $V_x \subset U$, aperto contenente x, tale che $1/f \in \mathcal{O}(V_x)$. Sia $\mathfrak{m}_x = \{f_x \in \mathcal{O}_x \mid f_x(x) = 0\}$. Chiaramente $\mathfrak{m}_x$ è un ideale di $\mathcal{O}_x$, inoltre f_x è invertibile se e solo se $f_x \notin \mathfrak{m}_x$. Questo implica che $\mathcal{O}_x$ è un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}_x$. Il campo quoziente $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ è isomorfo a (un sotto campo di) k tramite l'applicazione $\overline{f}_x \to f_x(x)$.

Questa è la situazione ideale alla quale miriamo: un fascio di funzioni le cui spighe siano anelli locali (si dirà che $(X, \mathcal{O})$ è uno spazio localmente anellato).

Per avere una teoria efficace bisogna considerare (pre)fasci $\mathcal{F}$ dove $\mathcal{F}(U)$ non è necessariamente un insieme di funzioni da U in k.

2.2 Prefasci e fasci: caso generale.

Adesso vogliamo ripetere quanto fatto prima non più con dei fasci di funzioni ma con dei fasci qualsiasi, cioè $\mathcal{F}(U)$ sarà un oggetto di una categoria $\mathcal{C}$ qualsiasi, anche se in realtà ci limiteremo a considerare i casi in cui $\mathcal{F}(U)$ è un gruppo abeliano, un anello o un modulo. Le definizioni rimangono tali quali solo che le operazioni di restrizione (che adesso sono frecce in $\mathcal{C}$, morfismi di gruppi, anelli, ecc...) sono date astrattamente, cioè fanno parte dei dati del fascio.

A questo punto può essere utile osservare una definizione alternativa di prefascio. Sia $Ap(X)$ la categoria i cui oggetti sono gli aperti di X. Le frecce sono date nel modo seguente:

$$Hom(U, V) = \begin{cases} i : U \hookrightarrow V \text{ se } U \subset V \\ \emptyset \text{ se } U \not\subset V \end{cases}$$

Definizione 2.2. *Un prefascio, $\mathcal{F}$, sullo spazio topologico X a valore nella categoria $\mathcal{C}$ è un funtore (covariante): $\mathcal{F} : Ap(X)^o \to \mathcal{C}$ ($Ap(X)^o$ è la categoria opposta di $Ap(X)$).*
Un fascio è un prefascio che verifica la condizione d'incollamento.

La condizione di incollamento può essere riformulata nel modo seguente (per $s \in \mathcal{F}(U)$, scriveremo $s|V$ invece di $r_{UV}(s)$, ma bisogna ricordare che la restrizione è data in modo astratto). Sia $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ un ricoprimento aperto dell'aperto U, allora:

Condizioni di incollamento:
1) se $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, esiste al più un $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|U_i = s_i, \forall i \in I$
2) se $s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$, allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$, tale che $s|U_i = s_i$, $\forall i \in I$

Ovviamente per 1) la s in 2) è unica.

Osservazione 2.3. La formulazione precedente non è soddisfacente in tutta generalità perché usa elementi in $\mathcal{F}(U)$, ma in tutta generalità $\mathcal{F}(U)$ è un oggetto di $\mathcal{C}$ e non è detto che sia un insieme! Si può ovviare a questo inconveniente con diagrammi (equalizzatori), purché ci siano prodotti in $\mathcal{C}$. Nel nostro caso $\mathcal{C} = Ab$, non c'è problema.

Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono le *sezioni* di $\mathcal{F}$ su U. Si nota anche $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$.

Nel seguito considereremo (pre)fasci di gruppi abeliani ($\mathcal{C} = Ab$) oppure una situazione un po' più generale: avremo un fascio $\mathcal{O}_X$ di anelli ($\mathcal{C} = Ann$, anelli commutativi con unità) e fasci $\mathcal{F}$ di $\mathcal{O}_X$-moduli ($\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$-modulo per ogni aperto U). Il problema adesso è di definire i morfismi di fasci e i relativi fasci Ker, Im, Coker.

Ci limiteremo a considerare (pre)fasci di gruppi abeliani lasciando al lettore le verifiche che tutto quanto si estende senza problemi al caso dei fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli. C'è anche l'annosa questione di associare qualcosa al vuoto: per tutti i (pre)fasci di gruppi abeliani $\mathcal{F}$ poniamo $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$. Finalmente indicheremo con $PFAb(X)$, $FAb(X)$ la categoria dei prefasci (risp. fasci) di gruppi abeliani sullo spazio topologico X: gli oggetti sono i prefasci e le frecce i morfismi che andiamo adesso a definire:

Definizione 2.4. *Siano $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ due prefasci di gruppi abeliani su X. Darsi un morfismo di prefasci $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste nel darsi per ogni aperto U un morfismo di gruppi: $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$; inoltre i morfismi φ_U devono essere compatibili con le restrizioni.*

Quindi se $V \subset U$, abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \overset{\varphi_U}{\to} & \mathcal{G}(U) \\ r_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \overset{\varphi_V}{\to} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Un fascio è in particolare un prefascio, un morfismo di fasci è un morfismo di prefasci (quindi $FAb(X)$ è una *sotto categoria piena* di $PFAb(X)$).

Come nel caso dei fasci di funzioni la spiga $\mathcal{F}_x$ è l'insieme dei germi, s_x, di sezioni di $\mathcal{F}$, cioè s_x è rappresentato da (U, s) con $s \in \mathcal{F}(U)$ e $(U, s), (V, g)$ rappresentano lo stesso germe se esiste $W \subset U \cap V$ tale che $r_{UW}(f) = r_{VW}(g)$.

Un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce un morfismo tra le spighe: $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$. Infatti se $s_x \in \mathcal{F}_x$ è la classe di (U, s), allora $\varphi_x(s_x)$ è la classe di $(U, \varphi_U(s))$. Si mostra che φ_x è ben definito ed è un morfismo di gruppi abeliani.

Dato un morfismo di fasci $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ vorremo definire dei fasci $Ker(\varphi)$, $Im(\varphi)$, $Coker(\varphi)$ e quindi parlare di morfismo iniettivo, suriettivo e poi di successioni esatte.

Per il Ker non ci sono problemi:

Lemma 2.5. *Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci di gruppi abeliani. Allora il prefascio $U \to Ker(\varphi_U)$ è un fascio di gruppi abeliani.*

Dimostrazione. Esercizio 2. □

Per quanto riguarda invece Im e Coker le cose non vanno così bene: in generale $U \to Im(\varphi_U)$, $U \to Coker(\varphi_U)$ sono dei prefasci che non sono dei fasci. Per ovviare a questo inconveniente bisogna passare al fascio associato a un prefascio.

2.3 Il fascio associato a un prefascio, morfismi.

Abbiamo già visto un esempio di un prefascio che non era un fascio ($U \subset \mathbb{R}$, $U \to \mathcal{L}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata}\}$).

Un altro esempio tipico è il seguente: sia A un gruppo abeliano, X uno spazio topologico, per ogni aperto $\mathcal{A}(U) = A$. Le applicazioni di restrizione sono l'identità. Quindi $s \in \mathcal{A}(U)$ è un elemento di A, a. Possiamo vedere s come l'applicazione costante: $s : U \to A : x \to a$. Quindi $\mathcal{A}(U) = \{s : U \to A \mid s \text{ è costante}\}$. Il prefascio $\mathcal{A}$ in generale non è un fascio: se $X = U_1 \sqcup U_2$, $s_i \in \mathcal{A}(U_i)$, $s_i = a_i$ con $a_1 \neq a_2$, non esiste nessuna $s \in \mathcal{A}(X)$ tale che $s|U_i = s_i$.

In entrambi i casi la condizione di incollamento fallisce perché i prefasci non sono definiti da proprietà locali. Per ovviare all'inconveniente bisogna *mettere del locale* nella definizione.

Definizione 2.6. *Sia $\mathcal{F}$ un prefascio di gruppi abeliani. Per un aperto U consideriamo le applicazioni $\sigma : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$. Allora $\mathcal{F}^+(U)$ è l'insieme di tali applicazioni che verificano:*
a) $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x, \forall x \in U$
b) per ogni $x \in U$ esiste un aperto V_x, $x \in V_x \subset U$ e $t \in \mathcal{F}(V_x)$, tale che $\sigma(y) = t_y$, $\forall y \in V_x$.

Allora $U \to \mathcal{F}^+(U)$ definisce un prefascio di gruppi abeliani, detto associato a $\mathcal{F}$.

Si verifica facilmente che $\mathcal{F}^+$ è un fascio. C'è un morfismo canonico $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}^+$. Infatti se $s \in \mathcal{F}(U)$, allora s definisce $\tilde{s} : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x : x \to s_x$ e $\tilde{s} \in \mathcal{F}^+(U)$. Questo morfismo non è necessariamente biiettivo (lo è se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio).

Nell'esempio precedente $\mathcal{A}^+(U) = \{s : U \to A \mid s$ è localmente costante$\}$. Quindi $\sigma : X \to A$ tale che $\sigma(x) = a_1$ se $x \in U_1$, $\sigma(x) = a_2$ se $x \in U_2$ è un elemento di $\mathcal{A}^+(X)$. Quindi $\mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}^+(X)$ non è suriettivo.

Chiaramente $\mathcal{F}_x^+ = \mathcal{F}_x$, $\forall x \in X$ (ogni germe di sezione di $\mathcal{F}^+$ è un germe di sezione di $\mathcal{F}$ e viceversa). L'interesse per noi è:

Proposizione 2.7. *Sia $\mathcal{F}$ un prefascio di gruppi abeliani. Per ogni morfismo $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$, dove $\mathcal{G}$ è un fascio, esiste uno ed un unico morfismo $\mathcal{F}^+ \xrightarrow{g} \mathcal{G}$, tale che $f = g \circ \theta$.*

La coppia $(\mathcal{F}^+, \theta)$ è l'unica coppia (modulo isomorfismo) con questa proprietà.

Definizione 2.8. *Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci di gruppi abeliani. I fasci $Im(\varphi)$, $Coker(\varphi)$ sono i fasci associati ai prefasci $Im(\varphi)$, $Coker(\varphi)$.*

Definizione 2.9. *Un morfismo di fasci di gruppi abeliani $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è*
iniettivo se e solo se $Ker(\varphi) = 0$
suriettivo se e solo se i fasci $Im(\varphi)$ e $\mathcal{G}$ sono uguali, cioè se e solo se il fascio $Coker(\varphi) = 0$.

Con queste definizioni abbiamo:

Proposizione 2.10. *Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dei fasci di gruppi abeliani su X e sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo.*

1. *φ è iniettivo $\Leftrightarrow \varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è iniettivo, $\forall x \in X \Leftrightarrow Ker(\varphi) = 0$*
2. *φ è suriettivo $\Leftrightarrow \varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è suriettivo, $\forall x \in X \Leftrightarrow Coker(\varphi) = 0$*

3. Abbiamo due successioni esatte di fasci ('decomposizione canonica'):

$$0 \to Ker(\varphi) \to \mathcal{F} \to Im(\varphi) \to 0$$

$$0 \to Im(\varphi) \to \mathcal{G} \to Coker(\varphi) \to 0$$

Morale: Per maneggiare morfismi di fasci sempre ragionare sulle spighe (e non sugli aperti).

E cosa succede sugli aperti? Questo è tutta la questione:

Proposizione 2.11. *Sia*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani, allora per ogni aperto $U \subset X$ abbiamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$$

ma l'ultimo morfismo non è necessariamente suriettivo.

Dimostrazione. Prendiamo come punto di partenza: la successione di fasci è esatta $\Leftrightarrow$ è esatta sulle spighe per ogni x.

Siano $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ i morfismi. Visto che la successione è esatta φ è iniettivo quindi φ_x è iniettivo per ogni x. Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varphi_U(s) = 0$. Allora $(\varphi_U(s))_x = 0$. Ma $(\varphi_U(s))_x = \varphi_x(s_x)$. Siccome φ_x è iniettivo, viene $s_x = 0, \forall x$, quindi $s = 0$. Questo mostra $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ esatta.

Mostriamo che $\psi_U \circ \varphi_U = 0$. Se $s \in \mathcal{F}(U)$, allora $\psi_U(\varphi_U(s))_x = \psi_x(\varphi_x(s_x)) = 0$ perché la successione delle spighe è esatta. Quindi $\psi_U(\varphi_U(s)) = 0$ e $Im(\varphi_U) \subset Ker(\psi_U)$.

Sia $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ tale che $\psi_U(\sigma) = 0$. Il germe σ_x è l'immagine di qualche germe a_x. Sia (U_i, a_i) un rappresentante del germe a_x ($U_i \subset U$). Allora il germe di $\varphi_{U_i}(a_i) - \sigma|U_i$ è nullo in x. Prendendo un rappresentante vediamo che, restringendo semmai U_i, abbiamo $\varphi_{U_i}(a_i) = \sigma|U_i$. Facendo variare $x \in U$ otteniamo un ricoprimento U_i con $a_i \in U_i$ tali che $\varphi_{U_i}(a_i) = \sigma|U_i$. Abbiamo $\varphi_{ij}(a_i|U_{ij} - a_j|U_{ij}) = 0$. Per la prima parte questo implica $a_i|U_{ij} = a_j|U_{ij}$. Quindi le sezioni a_i si incollano in una sezione $a \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varphi_U(a) = \sigma$. Quindi $Ker(\psi_U) \subset Im(\varphi_U)$. □

Vedere l'Esercizio 8 per un esempio in cui l'ultimo morfismo non è suriettivo. La coomologia serve proprio a "misurare", in qualche modo, il difetto di suriettività dell'ultimo morfismo.

2.4 I funtori f_*, f^{-1}, f^*.

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici. Se $\mathcal{F}$ è un fascio su X, vogliamo associargli, tramite f, un fascio su Y.

Definizione 2.12. *Con le notazioni precedenti* l'immagine diretta *di $\mathcal{F}$ è il fascio $f_*\mathcal{F}$ definito da $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ per ogni aperto $V \subset Y$. Le applicazioni di restrizione sono quelle ovvie.*

La cosa ovvia, ma importante, da ricordare è che, per definizione, $\Gamma(Y, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Se $\mathcal{G}$ è un fascio su Y vogliamo associargli, tramite f, un fascio su X (il *pull back*, immagine inversa o anche "tirato su").

Definizione 2.13. *Con le notazioni precedenti, se $\mathcal{G}$ è un fascio su Y, $f^{-1}\mathcal{G}$ è il fascio associato (cf Esercizio 10) al prefascio definito da $U \to \lim_{f(U)\subset V} \mathcal{G}(V)$, per ogni aperto $U \subset X$.*

Osserviamo che f_* è un funtore dalla categoria dei fasci su X nella categoria dei fasci su Y e f^{-1} è un funtore dalla categoria dei fasci su Y nella categoria dei fasci su X. Questi due funtori sono aggiunti cioè esiste una biiezione naturale:

$$Hom_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq Hom_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Si tratta di una biiezione tra insiemi.

Per dimostrare questo fatto si osserverà che c'è un morfismo naturale $f^{-1}(f_*\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$, per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X.
Infatti $f^{-1}(f_*\mathcal{F})$ è il fascio associato al prefascio $U \to \lim_{f(U)\subset V} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ e chiaramente $U \subset f^{-1}(V)$ per ogni V tale che $f(U) \subset V$.

C'è anche un morfismo naturale $\mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G}$ per ogni fascio $\mathcal{G}$ su Y. Infatti $f_*f^{-1}\mathcal{G}(V)'' ='' \lim_{V\subset W} \mathcal{G}(W)$, le virgolette per ricordare che $f^{-1}\mathcal{G}$ è il fascio associato al prefascio $U \to \lim_{f(U)\subset V} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Il lato buono di f^{-1} è che $f^{-1}\mathcal{G}_x \simeq \mathcal{G}_{f(x)}$.

Siano $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due varietà algebriche e sia $f : X \to Y$ un morfismo. Per definizione f trasforma funzioni regolari in funzioni regolari e quindi induce $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. In particolare $f_*\mathcal{O}_X$ diventa così un $\mathcal{O}_Y$-modulo. Quindi se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo, $f_*\mathcal{F}$ è un $f_*\mathcal{O}_X$-modulo e quindi un $\mathcal{O}_Y$-modulo. In questo modo f_* è un funtore dalla categoria degli $\mathcal{O}_X$-moduli nella categoria dei $\mathcal{O}_Y$-moduli.

Per f^{-1} non c'è niente di simile ($f^{-1}\mathcal{O}_Y$ non è un $\mathcal{O}_X$-modulo). Se $\mathcal{G}$ è un $\mathcal{O}_Y$-modulo, allora $f^{-1}\mathcal{G}$ è un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-modulo. Abbiamo un morfismo naturale

$f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$: quello che corrisponde a $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ tramite l'aggiunzione $Hom_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq Hom_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$. Possiamo quindi considerare $\mathcal{O}_X$ come un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-modulo. Sia $f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X =: f^*\mathcal{G}$, allora $f^*\mathcal{G}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo. Questo definisce un funtore f^* dalla categoria degli $\mathcal{O}_Y$-moduli nella categoria degli $\mathcal{O}_X$-moduli. I funtori f_*, f^* sono aggiunti ([6], II.5, p. 110). Vedremo più avanti (schemi affini) una definizione più simpatica di $f^*\mathcal{F}$.

Esercizi.

Esercizio 1 *Si ricorda che uno spazio topologico* X *è* $T0$ *se presi due punti* $x \neq y \in X$ *esiste un aperto contenente uno dei due punti ma non l'altro. Lo spazio* X *è* $T1$ *se esiste un aperto* U_x *con* $x \in U_x, y \notin U_x$ *e se esiste un aperto* U_y *con* $x \notin U_y$, $y \in U_y$. *Finalmente* X *è* $T2$ *se è di Hausdorff.*
1) Quale Ti *è equivalente al fatto che ogni punto di* X *sia chiuso?*
2) Si assume che tutti i punti di X *siano chiusi. Sia* Z_x *l'intersezione di tutti gli aperti che contengono* x. *Mostrare che* $Z_x = \{x\}$, $\forall x \in X$. *("La collezione degli aperti permette di ricuperare* X*").*
3) Se non tutti i punti sono chiusi è ancora vero che $Z_x = \{x\}$ *a) per tutti i punti di* X, *b) per i punti chiusi di* X*?*

Esercizio 2 *Sia* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *un morfismo di fasci di gruppi abeliani. Mostrare che il prefascio* $U \to Ker(\varphi_U)$ *è un fascio di gruppi abeliani.*

Esercizio 3 *Sia su* $X = \mathbb{R}$ *(con la topologia euclidea) sia* $\mathcal{L}$ *il prefascio delle funzioni limitate da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ ($\mathcal{L}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata}\}$*). Mostrare che* $\mathcal{L}$ *non è un fascio.*
Chi è $\mathcal{L}^+$, *il fascio associato a* $\mathcal{L}$*? E' vero che* $\mathcal{L}^+ = \mathcal{F}$, *il fascio di tutte le funzioni? (cioè* $\mathcal{F}(U) = \{g \mid g : U \to \mathbb{R} \text{ è una funzione qualsiasi}\}$*.)*

Esercizio 4 *Sia* X *uno spazio topologico. Si assumerà che ogni punto* $x \in X$ *possiede un intorno aperto* $U_x \neq X$. *Si pone* $\mathcal{F}(X) = A$ *(*A *un gruppo abeliano),* $\mathcal{F}(U) = 0$, *se* $U \neq X$, U *aperto. Inoltre si pone* $r_{VU} = 0$ *se* $U \neq V$, $r_{UU} = Id$.
(i) Mostrare che $\mathcal{F}$ *è un prefascio di gruppi abeliani.*
(ii) Determinare $\mathcal{F}_x$ *per ogni* $x \in X$. *E'* $\mathcal{F}$ *un fascio?*
(iii) Determinare $\mathcal{F}^+$. *Concludere che in generale il morfismo di prefasci* $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ *può non essere suriettivo (risp. iniettivo) sugli aperti. In particolare esistono dei prefasci* $\mathcal{G}$ *con* $s \in \mathcal{G}(X)$, $s \neq 0$, *tale che* $s_x = 0, \forall x$.

Esercizio 5 *Sia* $X = \mathbb{P}^1_k$ *con la topologia di Zariski e sia* A *un gruppo abeliano. Sia inoltre* $x \in \mathbb{P}^1_k$ *un punto fissato. Per ogni aperto (non vuoto) si pone* $\mathcal{F}(U) = \begin{cases} A \text{ se } x \notin U \\ 0 \text{ se } x \in U \end{cases}$. *Si definiscono delle applicazioni di restrizione nel modo ovvio (quale?).*
(i) Mostrare che $\mathcal{F}$ *è un prefascio.*
(ii) Determinare $\mathcal{F}_y$, *per ogni* $y \in \mathbb{P}^1_k$. *E'* $\mathcal{F}$ *un fascio?*
(iii) Descrivere $\mathcal{F}^+_y$, *il fascio associato a* $\mathcal{F}$.

Esercizio 6 ([6], Ex. 1.14, p. 67)
Sia $\mathcal{F}$ *un fascio di gruppi abeliani su* X *e sia* $s \in \mathcal{F}(U)$*, una sezione sull'aperto* $U \subset X$*. Il* supporto *di* s *è definito da:* $Supp(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$ *(qui* s_x *è il germe di* s *elemento della spiga* $\mathcal{F}_x$*). Mostrare che* $Supp(s)$ *è chiuso in* U*.*

Il supporto di $\mathcal{F}$ *è definito da:* $Supp(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$*. Mostrare che* $Supp(\mathcal{F})$ *non è necessariamente chiuso.*

Esercizio 7 *Sia* $X = \{0, 1, 2\}$ *e siano* $U_1 = \{0, 1\}$, $U_2 = \{0, 2\}$, $U = \{0\}$*.*
1) Mostrare che $\emptyset$, X, U_1, U_2, U *sono gli aperti di una topologia su* X*.*
2) Si definisce un prefascio $\mathcal{F}$ *su* X *tramite:* $\mathcal{F}(U_i) = \mathbb{Q}[T_i]$, $i = 1, 2$, $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Q}[T_1, T_2]$, $\mathcal{F}(X) = \mathbb{Q}$, $\mathcal{F}(\emptyset) = (0)$*. Le applicazioni di restrizione* $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(W)$ *sono le inclusioni (tranne se* $W = \emptyset$*, in tal caso è l'applicazione nulla). Mostrare che* $\mathcal{F}$ *è un fascio.*
3) Si definisce il prefascio $\mathcal{G}$ *su* X *tramite* $\mathcal{G}(U_i) = \mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(X) = \mathbb{Q}[T_1]$, $\mathcal{G}(\emptyset) = (0)$*. Le applicazioni di restrizione sono l'identità (tranne la restrizione all'insieme vuoto che è l'applicazione nulla). Mostrare che* $\mathcal{G}$ *è un fascio.*
4) Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *il morfismo ottenuto mandando* T_i *su* T_1*. Verificare che* φ *è un morfismo di fasci. Mostrare che il prefascio* $V \to Im(\varphi_V)$ *non è un fascio.*

Esercizio 8 (cf [6], Ex. 1.21, p. 68)
Sia X *una varietà su un campo algebricamente chiuso* k*.*
(1) Sia $Y \subset X$ *un chiuso. Per ogni aperto* $U \subset X$ *sia* $\mathcal{I}_Y(U)$ *l'ideale in* $\mathcal{O}_X(U)$ *delle funzioni regolari su* U *che si annullano su* $Y \cap U$*. Mostrare che* $U \to \mathcal{I}_Y(U)$ *è un fascio. Il fascio* $\mathcal{I}_Y$ *è il* fascio d'ideali *di* Y*.*
(2) Il fascio $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$ *è isomorfo a* $\mathcal{O}_Y$ *(più precisamente a* $i_*(\mathcal{O}_Y)$ *dove* $i : Y \hookrightarrow X$ *è l'inclusione). Abbiamo quindi una successione esatta:* $0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$*, chiamata* successione di definizione *di* Y *in* X*.*
(3) Sia $X = \mathbb{P}^1$ *e* $Y = \{p, q\}$*, mostrare che abbiamo una successione esatta:*

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{I}_Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$$

dove l'ultimo morfismo non è suriettivo (qui $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \simeq \Gamma(X, i_*(\mathcal{O}_Y))$*).*
(4) Osservare che se $Z \subset \mathbb{P}^1$ *è un chiuso, allora* $\Gamma(X, \mathcal{I}_Z) = 0$*.*

Esercizio 9 ([6], Ex. 1.17, p. 68)
Sia X *uno spazio topologico e* $p \in X$ *un punto. Sia* A *un gruppo abeliano. Se* U *è un aperto di* X *si pone:*

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} A & se\ p \in U \\ 0 & se\ p \notin U \end{cases}$$

mostrare che $\mathcal{F}$ *(con le ovvie applicazioni di restrizione) è un fascio. Mostrare che:*

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} A \ \mathit{se}\ x \in \overline{\{p\}} \\ 0 \ \mathit{se}\ x \notin \overline{\{p\}} \end{cases}$$

Il fascio $\mathcal{F}$ *è il fascio gratta-cielo (*skyscraper sheaf*) in* p*.*

Esercizio 10 *Sia* $f : X \to Y$ *un'applicazione continua di spazi topologici. Sia* $\mathcal{G}$ *un fascio su* Y*. Mostrare che il prefascio su* X *definito da* $U \to \lim_{f(U)\subset V} \mathcal{G}(V)$ *non è necessariamente un fascio.*

3

Una rapidissima introduzione agli schemi.

Scopo di questo capitolo è di introdurre il lettore al linguaggio degli schemi (ma questo <u>non</u> è un corso sugli schemi). Nel seguito lavoreremo nell'ambito delle varietà o meglio delle sotto varietà di $\mathbb{P}^n_k$, k algebricamente chiuso (con $ch(k) = 0$) ma vogliamo avere la libertà, quando ci farà comodo, di usare il linguaggio degli schemi.

3.1 Varietà algebriche reloaded.

Un insieme algebrico affine $X \subset \mathbb{A}^n_k =: k^n$ è il luogo degli zeri (o varietà) di un ideale $I \subset k[x_1, ..., x_n]$, cioè $X = \mathbb{V}(I) = \{x \in k^n \mid P(x) = 0, \forall P \in I\}$. Ideali diversi possono definire lo stesso insieme algebrico. Se vogliamo associare ad ogni insieme algebrico X <u>un</u> ideale, allora prendiamo il più grande ideale che definisce X: $\mathbb{I}(X) = \{P \mid P|X = 0\}$. Quindi $\mathbb{I}(X)$ è l'ideale di <u>tutti</u> i polinomi che si annullano su X. Una varietà affine è un sotto insieme affine irriducibile (non si scrive come l'unione di due sotto insiemi algebrici propri, non vuoti). Si dimostra che X è irriducibile se e solo se $\mathbb{I}(X)$ è primo. Se k è algebricamente chiuso, per il teorema degli zeri di Hilbert, abbiamo una corrispondenza biunivoca:

$$\{\text{ ideali primi di } k[x_1, ..., x_n]\} \leftrightarrow \{\text{varietà affini di } \mathbb{A}^n_k\}$$

In questa corrispondenza i punti corrispondono agli ideali massimali:

$$\{\text{ ideali massimali di } k[x_1, ..., x_n]\} \leftrightarrow \{\text{punti di } \mathbb{A}^n_k\}$$

Se k non è algebricamente chiuso non c'è una corrispondenza biunivoca tra ideali massimali e punti di $\mathbb{A}^n_k$.

Fino alla fine di questa sezione k indica un campo algebricamente chiuso

Si possono svolgere considerazioni analoghe nel proiettivo e definire le sotto varietà proiettive $X \subset \mathbb{P}^n_k$. Ci sono alcune differenze:
-bisogna considerare polinomi omogenei (se P è un polinomio non omogeneo, non ha senso chiedersi se P si annulla o meno in un punto di $\mathbb{P}^n_k$)
-un polinomio omogeneo non definisce una funzione su $\mathbb{P}^n$, ma ha senso chiedersi se è zero o meno in un punto, quindi $\mathbb{V}(P)$ ha senso e quindi anche $\mathbb{V}(I)$ se I è un ideale omogeneo (i.e. generato da polinomi omogenei).
-per avere una funzione su $\mathbb{P}^n$ bisogna considerare P/Q omogenei, dello stesso grado. Ovviamente una tale funzione (*funzione razionale*) non è definita (*regolare*) se $Q(x) = 0$.

Questo ci fa pensare che le funzioni polinomiali (inesistenti, anche localmente, sul proiettivo) non sono le "buone" funzioni, ma che bisognerebbe invece considerare le funzioni razionali *regolari*...

In $\mathbb{A}^n_k$ (risp. $\mathbb{P}^n_k$) i sotto insiemi algebrici sono i chiusi della *topologia di Zariski*. Ogni sotto varietà $X \subset \mathbb{A}^n_k$, prende la topologia indotta.

Sia X una varietà algebrica (affine o proiettiva), ci rimane da dire chi sono le "buone funzioni" $U \to k$ per ogni aperto $U \subset X$. Fatto questo un morfismo (algebrico) tra due varietà $\varphi : X \to Y$ sarà un'applicazione continua che trasforma "buone funzioni" in "buone funzioni". Cioè se $\mathcal{O}_X(U)$ è l'insieme delle "buone" (diremo *regolari*) funzioni su $U \subset X$, allora per ogni $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$.

Come in geometria differenziabile, analitica vogliamo che la nozione di funzione regolare sia una nozione *locale*. Inoltre vogliamo che sia verificata la seguente proprietà: se f è regolare in x, con $f(x) \neq 0$, allora $1/f$ è regolare in x. Questo implica che l'anello dei germi di funzioni regolari in x è un anello locale (Esercizio 11).

E' chiaro che le funzioni polinomiali non fanno il lavoro: se $P(x) \neq 0$, $1/P$ non è una funzione polinomiale in un intorno di x, ma è una funzione razionale, regolare, in un intorno di x. Questo giustifica la seguente:

Definizione 3.1. *Sia $X \subset k^n$ una varietà affine e sia $U \subset X$ un aperto. Una funzione $f : U \to k$ è regolare in $x \in U$ se esiste un intorno aperto di x, $V \subset U$ e una funzione razionale, P/Q, regolare su V (i.e. $Q(y) \neq 0, \forall y \in V$), tale che $f = P/Q$ su V. La funzione è regolare su U se è regolare in x, $\forall x \in U$.*

Indicheremo con $\mathcal{O}_X(U)$ l'insieme delle funzioni regolari su U.

Nel caso proiettivo abbiamo una definizione analoga, tenendo conto che una funzionale razionale P/Q è il quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado.

L'assegnazione $U \to \mathcal{O}_X(U)$ definisce su X il fascio delle funzioni regolari.

Nel caso affine si dimostra (Esercizio 12) che se X è una varietà, allora:

$$\mathcal{O}_X(X) \simeq k[x_1, ..., x_n]/\mathbb{I}(X) =: A(X).$$

Osserviamo che $A(X)$ è l'insieme delle restrizioni a X delle funzioni polinomiali. Alcuni testi prendono questo risultato come punto di partenza, ma è fuorviante.

Se $X \subset \mathbb{A}^n_k$ è una sotto varietà affine, l'anello quoziente

$$A(X) = k[x_1, ..., x_n]/\mathbb{I}(X)$$

è una k-algebra finitamente generata, integra. Si dimostra che $X \subset \mathbb{A}^n_k$, $Y \subset \mathbb{A}^m_k$ sono due varietà affini isomorfe se e solo se $A(X) \simeq A(Y)$ come k-algebre. Abbiamo quindi un'equivalenza di categoria tra la categoria opposta delle varietà affini e la categoria delle k-algebre finitamente generate, integre. Più generalmente abbiamo un'equivalenza di categorie tra la categoria opposta degli insiemi algebrici e la categoria delle k-algebre finitamente generate, ridotte (senza elementi nilpotenti).

Nel caso proiettivo, l'anello delle coordinate $A(X)$ *dipende dall'immersione* $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$.

Nel seguito una varietà (affine o proiettiva) è un sotto insieme algebrico $X \subset \mathbb{A}^n_k$ (risp. $X \subset \mathbb{P}^n_k$) irriducibile (quindi $\mathbb{I}(X)$ primo) (dove k è algebricamente chiuso).

3.2 Schemi affini: definizione.

La restrizione $k = \overline{k}$ è molto forte per chi sogna di usare metodi geometrici in teoria dei numeri: bisognerebbe potere lavorare su un campo qualsiasi, vedi un anello qualsiasi. Dopo vari tentativi (Zariski, Weil, Nagata e altri) con classi di anelli più generali, Grothendieck si è accorto che la teoria più naturale si otteneva senza porre alcuna limitazione al tipo di anello considerato.

Si tratta quindi di associare ad ogni anello commutativo (con unità), A, un oggetto geometrico ("varietà"), X, con un fascio di funzioni ("le buone funzioni"), $\mathcal{O}_X$ che generalizza le varietà affini.

Esaminando il caso classico ($A = k[x_1, ..., x_n]$) viene da pensare che i *punti* della nostra varietà dovrebbero "essere" gli ideali massimali di A. Questo però non va bene perché la contr'immagine di un ideale massimale, in generale, non è un ideale massimale. Infatti sia $i : A \hookrightarrow K$, dove A è un anello integro e dove K è il suo campo delle frazioni, allora (0) è massimale in K, ma $i^{-1}(0)$ è primo, non massimale in A. Invece la contr'immagine di un ideale primo è sempre un ideale primo. Poniamo quindi $X = Spec(A)$, l'insieme degli ideali primi di A.

Il trucco adesso è di pensare ad un elemento $f \in A$ come a una funzione polinomiale.

Se $\mathfrak{p} = x \in X = Spec(A)$, allora $f \in A$, *si annulla* in x se e solo se $f \in \mathfrak{p}$.

Questo è consistente con il caso classico: un polinomio P si annulla nel punto $x \Leftrightarrow P \in \mathbb{I}(x) = \mathfrak{m}_x$.

Quindi $f \in A$ determina l'ipersuperficie $\mathbb{V}(f) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid f \in \mathfrak{p}\}$ (è esattamente l'analogo di $\{x \mid f(x) = 0\}$).

Più generalmente se $I \subset A$ è un ideale, il luogo degli zeri (la varietà) di I è $\mathbb{V}(I) = \{\mathfrak{p} \mid I \subset \mathfrak{p}\} = \{x = \mathfrak{p} \mid f(x) = 0, \forall f \in I\}$ (in completa analogia con la definizione "classica" di sotto insieme algebrico).

Come nel caso classico si verifica che i $\mathbb{V}(I)$ sono i chiusi di una topologia su $X = Spec(A)$. Il complementare dell'ipersuperficie $\mathbb{V}(f)$ è $D(f) = \{\mathfrak{p} \mid f \notin \}$. Si verifica (Esercizio 13) che al variare di f in A, i $D(f)$ sono una base di aperti. Questa topologia è la *topologia di Zariski* su $Spec(A)$.

La topologia di Zariski su $Spec(A)$ è ancora più strana della topologia di Zariski nel caso classico. Intanto un punto $x = \mathfrak{p} \in X = Spec(A)$ è chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è un ideale massimale. Infatti abbiamo $\overline{\{x\}} = \mathbb{V}(\mathfrak{p})$ (Esercizio 14).

Per esempio se $A = \mathbb{Z}$, i punti di $X = Spec(A)$ sono gli ideali primi (e massimali) (p) (p un numero primo) e l'ideale (0). Un punto x è chiuso se e solo se $x = (p)$ per un qualche numero primo p. Sia $\xi = (0)$. Abbiamo $\overline{\{\xi\}} = \mathbb{V}((0)) = \{\mathfrak{p} \mid (0) \subset \mathfrak{p}\} = Spec(\mathbb{Z})$. Abbiamo un punto la cui aderenza è tutto lo spazio! Si dice che ξ è il *punto generico* di X (Esercizio 14).

Finora abbiamo associato al nostro anello A uno spazio topologico $X = Spec(A)$, rimane da definire le "buone funzioni". L'idea è di ricalcare la situazione nel caso classico dove se U è un aperto di $\mathbb{A}_k^n$, si pone $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to k \mid f$ è regolare su $U\}$. Si ricorda che f è regolare su U se f è localmente una *funzione razionale*, definita, regolare ($\forall x \in U$, $\exists V_x$ aperto, $x \in V_x \subset U$, tale che $f = P/Q$ su V_x, con $Q(y) \neq 0, \forall y \in V_x$).

Visto che abbiamo assimilato una funzione polinomiale a un elemento di A, una funzione razionale dovrebbe essere un quoziente f/g di elementi di A e la nostra funzione è definita in $x = \mathfrak{p}$ se $g(x) \neq 0$, cioè se $g \notin \mathfrak{p}$. In particolare l'anello dei germi in x dovrebbe essere $\mathcal{O}_x = \{f/g \mid f, g \in A, g \notin \mathfrak{p}\}$, con le solite identificazioni tra frazioni. Beh, è quasi così, ma c'è un piccolo particolare: se A non è integro, non c'è un campo dei quozienti! Ma noi non abbiamo bisogno del campo dei quozienti ("delle funzioni razionali"), ma solo di potere invertire, localmente in x, le funzioni polinomiali che non si annullano in x e questo lavoro lo fa benissimo, algebricamente, il *localizzato* di A in $\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$. Infatti si ricorda che $A_\mathfrak{p} = \{f/g \mid f, g \in A, g \notin \mathfrak{p}\}$, dove $f/g = h/t \Leftrightarrow \exists s \notin \mathfrak{p}$ tale che $s(ft - gh) = 0$.

L'anello $A_\mathfrak{p}$ è un *anello locale*, cioè ha un unico ideale massimale (è $\mathfrak{m} = \{a/b \mid a \in \mathfrak{p}\}$). Abbiamo quindi $A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m} \simeq k(\mathfrak{p})$, dove $k(\mathfrak{p})$ è un campo (*campo residuo* nel punto $\mathfrak{p}$). Il campo $k(\mathfrak{p})$ è il campo dei quozienti dell'anello integro $A/\mathfrak{p}$ (Esercizio 15).

C'è un morfismo canonico $A \to A_\mathfrak{p} : a \to a/1$. Per composizione $A \to k(\mathfrak{p})$. Vediamo che $f \in A$ ha un'immagine nulla in $k(\mathfrak{p})$ se e solo se $f \in \mathfrak{p}$, questo giustifica quanto detto prima. Abbiamo indovinato che la spiga del fascio $\mathcal{O}_X$ nel punto $\mathfrak{p}$ è l'anello locale $A_\mathfrak{p}$, a questo punto possiamo ricalcare la definizione classica:

Definizione 3.2. *Se $U \subset X$ è un aperto si pone $\mathcal{O}_X(U) = \{s \mid s : U \to \sqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}\}$, tali che $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ e tale che s sia localmente il quoziente di due elementi di A. Cioè per ogni $\mathfrak{p} \in U$ esiste un aperto $V \subset U$ contenente $\mathfrak{p}$ e degli elementi $a, b \in A$, tali che per ogni $\mathfrak{q} \in V$, $b \notin \mathfrak{q}$ e $s(\mathfrak{q}) = a/b$ in $A_\mathfrak{q}$.*

Con questa definizione è chiaro che $\mathcal{O}_X$ è un fascio. Questa definizione ricalca il caso classico: una funzione regolare è localmente una funzione razionale regolare (cioè definita). La spiga di $\mathcal{O}_X$ nel punto $x = \mathfrak{p}$ è $A_\mathfrak{p}$ ([6], II. Prop. 2.2).

Se $D(f)$ è un aperto elementare, allora ([6], II. Prop. 2.2): $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f = \{g/f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, con $g/f^n = h/f^m \Leftrightarrow \exists t$ tale che $f^t(gf^m - hf^n) = 0$. In particolare:

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(D(1)) = A$$

Per riassumere: ad ogni anello commutativo A abbiamo associato uno spazio topologico $X = Spec(A)$ e un fascio $\mathcal{O}_X$ le cui spighe sono anelli locali.

Definizione 3.3. *Uno schema affine è uno spazio localmente annellato $(Y, \mathcal{O}_Y)$ isomorfo (in quanto spazio localmente annellato) a $(X = Spec(A), \mathcal{O}_X)$ per un qualche anello commutativo A.*

Uno spazio localmente annellato è una coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ dove X è uno spazio topologico e dove $\mathcal{O}_X$ è un fascio di anelli le cui spighe sono anelli locali.

Un morfismo di spazi annellati $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è una coppia $(f, f^\#)$, dove $f : X \to Y$ è un'applicazione continua e dove $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ è un morfismo di fasci. Nel caso di spazi localmente annellati si richiede che $f^\#$ sia un *morfismo locale*. Se A, B sono anelli locali un morfismo $\varphi : A \to B$ è locale se $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$. Adesso $f^\#$ induce $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ $(y = f(x))$ e si richiede che questo morfismo di anelli locali sia locale.

Un isomorfismo è un morfismo con un inverso (a destra e a sinistra), quindi $(f, f^\#)$ è un isomorfismo se f è un omeomorfismo e se $f^\#$ è un isomorfismo di fasci.

Siano A, B due anelli e $\varphi : A \to B$ un morfismo di anelli. Usando φ possiamo definire $f : X = Spec(B) \to Y = Spec(A)$, tramite $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Si verifica che f è continua (Esercizio 19).

Per definire $f^\#$, poniamo $x = \mathfrak{p}$ e $y = f(x) = \mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Basta dare il morfismo indotto $\mathcal{O}_{Y,y} = A_\mathfrak{q} \to \mathcal{O}_{X,x} = B_\mathfrak{p}$. Questo non è altro che il localizzato di φ: $A_\mathfrak{q} = \{a/c \mid c \notin \mathfrak{q}\} \to B_\mathfrak{p} = \{b/d \mid d \notin \mathfrak{p}\} : a/c \to \varphi(a)/\varphi(c)$.

Più precisamente se V è un aperto di $Y = Spec(A)$, abbiamo $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) : s \to s'$, dove $s' : f^{-1}(V) \to \sqcup_{\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)} B_\mathfrak{q}$ è definita nel modo seguente: se $\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)$, $f(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \in V$, cioè $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Abbiamo allora $\varphi_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q} : a/c \to \varphi(a)/\varphi(c)$. Abbiamo $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ e si pone $s'(\mathfrak{q}) = \varphi_\mathfrak{p}(s(\mathfrak{p}))$.

Viceversa si dimostra (cf [6] II. prop. 2.3) che ogni morfismo di schema affine $Spec(B) \to Spec(A)$ proviene da un morfismo di anelli $A \to B$.

Abbiamo quindi la categoria degli schemi affini e vediamo che questa categoria è equivalente alla categoria opposta della categoria degli anelli commutativi (slurp! la geometria algebrica si è mangiata l'algebra commutativa!).

E' opportuno osservare che uno schema (affine) è una coppia composta da uno spazio topologico X e da un fascio $\mathcal{O}_X$ (detto *fascio strutturale*). Di solito si indica con X uno schema ($\mathcal{O}_X$ è sottinteso) e si intende uno spazio topologico (certe volte indicato con $sp(X)$ o $|X|$) con un fascio di funzioni.

Schemi diversi possono avere lo stesso spazio topologico. Per esempio tutti i campi k danno luogo allo stesso spazio topologico: $\{\star\}$, infatti l'unico ideale primo di un campo è (0). Ma se $k \neq K$, gli schemi $X = Spec(k)$, $Y = Spec(K)$ non sono isomorfi (perché $\mathcal{O}_X(X) = k$, $\mathcal{O}_Y(Y) = K$).

3.3 Schemi: primi esempi.

Una varietà algebrica, X, è uno spazio localmente annellato tale che ogni punto $x \in X$ abbia un intorno aperto U tale che $(U, \mathcal{O}_X|U)$ sia isomorfo a una varietà affine. In modo analogo:

Definizione 3.4. *Uno schema è uno spazio localmente annellato* $(X, \mathcal{O}_X)$ *tale che per ogni punto* $x \in X$ *esista un aperto* U *contenente* x *tale che* $(U, \mathcal{O}_X|U)$ *sia isomorfo (come spazio localmente annellato) a uno schema affine.*

Quindi uno schema si ottiene "incollando" degli schemi affini (per incollare si usano i fasci, come nel caso delle varietà di Serre).

Iniziamo a fare alcuni esempi (in un primo tempo solo schemi affini) per mettere in evidenza alcune peculiarità degli schemi.

• Abbiamo assimilato elementi $f \in A$ a "funzioni" polinomiali su $X = Spec(A)$. Queste funzioni in un punto $x = \mathfrak{p}$ prendono i loro valori nel campo residuo $k(\mathfrak{p})$. Infatti nel caso "classico" $A = k[x_1, ..., x_n]$, $x = (a_1, ..., a_n)$, il campo residuo è $k[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{m}_x \simeq k$ ($\mathfrak{m}_x = ((x_1 - a_1), ..., (x_n - a_n))$) e il valore in x di un polinomio è proprio $P(x) \in k$.

In generale la situazione è diversa. Sia, per esempio, $X = Spec(\mathbb{Z})$. Il campo residuo nel punto (chiuso) $x = (p)$ è $\mathbb{F}_p$. Quindi le nostre "funzioni" $f \in \mathbb{Z}$ prendono i loro valori in campi variabili (cioè f non è una funzione!). Quindi il valore di f in un punto non gioca un ruolo rilevante, quello che conta invece è dire se f si annulla o meno in $x = \mathfrak{p}$.

• Il piano affine. Sia $A = k[x, y]$, k algebricamente chiuso. Il piano affine su k è $Spec(A)$. Gli ideali primi di A sono di tre tipi:
(a) $\mathfrak{m}_x$, ideale massimale corrispondente al punto $x = (a_1, a_2)$
(b) $\mathfrak{p} = (F)$ ideale principale corrispondente a un polinomio irriducibile $F \in k[x, y]$ (F definisce una curva C_F irriducibile, ridotta)
(c) l'ideale nullo (0).

Solo i punti $\mathfrak{m}_x$ sono chiusi. La chiusura di un punto $\mathfrak{p} = (F)$ è, oltre al punto stesso, i punti chiusi della curva C_F. Il punto $\eta = \mathfrak{p}$ è il *punto generico* della curva C_F.

Finalmente la chiusura del punto $\xi = (0)$ è tutto il piano, ξ è il punto generico. L'anello locale al punto generico $\mathcal{O}_\xi$ è $k(x, y)$, il campo delle funzioni razionali (ed è anche il campo residuo al punto generico).

• Più generalmente se A è un anello integro, $X = Spec(A)$ ha un punto generico (cioè un punto la cui chiusura è tutto X) $\xi = (0)$. L'anello locale $\mathcal{O}_\xi$ è il campo dei quozienti di A (ed è anche il campo residuo in ξ).

• Sia $A = k[x]/(x^2) =: k[\varepsilon]$ (ε è la classe di x). L'anello A ha un unico ideale primo (ε) che é quindi massimale, pertanto A è un anello locale. Lo spazio topologico $Spec(A)$ è ridotto a un punto ma l'anello "delle funzioni", A, ha un elemento nilpotente: $\varepsilon \neq 0$, con $\varepsilon^2 = 0$. L'introduzione di funzioni nilpotenti è una novità che ha fatto scalpore. Lo schema, non ridotto, $X = Spec(A)$ è molto utile: è un vettore tangente "libero".

• Un morfismo di schemi $f : Y \to X$ è *un'immersione chiusa* se f induce un omeomorfismo tra Y è un chiuso di X e se il morfismo $f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ è suriettivo. Un *sotto schema chiuso* Y di X è una classe d'equivalenza di immersioni chiuse $f : Y \to X$ ($g : Y' \to X$ è equivalente a f se esiste un isomorfismo $Y \stackrel{j}{\to} Y'$ tale che $f = g \circ j$).

• Sia $X = Spec(A)$ e sia $I \subset A$ un ideale. L'inclusione $I \hookrightarrow A$ induce $A \twoheadrightarrow A/I$ e quindi un morfismo di schemi $Z = Spec(A/I) \stackrel{\varphi}{\to} X = Spec(A)$. Si verifica (Esercizio 20) che φ è un'immersione chiusa. Pertanto Z è un sotto schema chiuso di X. I punti di Z sono gli ideali primi di A/I cioè gli ideali primi di A che contengono I, cioè i punti di $\mathbb{V}(I)$. Quindi φ stabilisce un omeomorfismo tra Z e il chiuso $\mathbb{V}(I)$ di X (Esercizio 20). Quindi per ogni ideale $I \subset A$, il chiuso $\mathbb{V}(I)$ arriva con una struttura di sotto schema chiuso. Da notare che un chiuso $Z \subset X$ ha varie strutture di sotto schema chiuso, corrispondenti agli ideali I tali che $\mathbb{V}(I) = Z$.

Si dimostra ([6], II. Cor. 5.10) che ogni sotto schema chiuso di $Spec(A)$ è della forma $Spec(A/I)$ per un qualche ideale $I \subset A$.

Per esempio ($k = \overline{k}$) una curva piana affine $C \subset \mathbb{A}^2_k$ è un sotto schema chiuso corrispondente ad un ideale principale (F) dove $F \in k[x, y]$ è un polinomio. Per esempio le curve definite da x e x^2 sono diverse (come schemi). Nel primo caso la curva è $Spec(k[y]) \simeq \mathbb{A}^1_k$, nel secondo caso invece è $Spec(k[x, y]/(x^2))$, quindi $\mathcal{O}_C(C) = k[x, y]/(x^2)$ ha un elemento nilpotente (la classe di x): questa curva è una *retta doppia* nel piano affine (o il *primo intorno infinitesimale* della retta $x = 0$ nel piano). Dal punto di vista classico (cioè guardando solo ai punti chiusi e agli ideali radicali) $\mathbb{V}(x) = \mathbb{V}(x^2)$, l'ideale (x^2) viene ignorato (perché non radicale) e si considera solo l'ideale $(x) = \mathbb{I}(R)$, cioè si considera solo la retta "semplice" R di equazione $x = 0$.

Sia $L \subset \mathbb{A}^2_k$ la retta di equazione $y = 0$. Sia D la retta di equazione $x = 1$. Per ogni punto $P = (1, y)$ della retta D, con $y \neq 0$, denotiamo con D_P la retta passante per l'origine e per il punto P. Finalmente sia $X_P = L \cup D_P$ (fare un disegno). La curva X_P è l'unione di due rette distinte. Abbiamo così una famiglia, parametrizzata da $D \setminus \{(1, 0)\} \simeq k \setminus \{0\}$, la cui fibra sopra $y \in k^*$ è X_P con $P = (1, y)$. Qual'è il limite quando $y \to 0$? Ragionando nel modo "classico" viene da dire che il limite e la retta L di equazione $y = 0$. Ragionando geometricamente, ci viene da dire che il limite è la retta L *contata due volte*. Infatti questa situazione ci sembra assolutamente analoga alla definizione della tangente a una curva regolare (non singolare) C in un punto x_0. La tangente $T_{x_0}C$ è il limite quando $p \to x_0$ delle rette $\langle p, x_0 \rangle$. In particolare se C è non singolare $T_{x_0} \cap C = 2x_0$, in un intorno di x_0. Per esempio se $C \subset \mathbb{A}_k^2$ è la parabole di equazione $y = x^2$, la tangente nell'origine è la retta $y = 0$ e l'equazione $y = x^2$ per $y = 0$ si riduce a $x^2 = 0$, che ha una radice doppia (e non una radice semplice).

In conclusione il limite della nostra famiglia di rette dovrebbe essere "la retta L con molteplicità due". Nel caso "classico" (varietà di Serre) un tale limite non esiste. Esiste invece nell'ambito degli schemi (vedremo poi come rendere rigorosa questa affermazione con il concetto di *morfismo piatto, famiglie piatte*).

Il linguaggio degli schemi permette di dare risposte naturali a questioni altrettanto naturali (e fondamentali) poste nell'ambito classico.

Esercizi.

Esercizio 11 *Sia A un anello e $I \subset A$, $I \neq (1)$, un ideale tale che ogni elemento di $A \setminus I$ sia invertibile. Allora A è un anello locale e I è l'unico ideale massimale di A.*

Esercizio 12 *1) Sia $X \subset \mathbb{A}^n_k$ una varietà affine (k algebricamente chiuso). Sia $\mathbb{I}(X)$ il suo ideale di definizione (quindi $\mathbb{I}(X)$ è primo).*
Dimostrare che $\mathcal{O}_X(X) \simeq k[x_1, ..., x_n]/\mathbb{I}(X) =: A(X)$. E' ancora vero questo risultato se k non è algebricamente chiuso?
2) Sia $X \subset \mathbb{A}^n_k$ un sotto insieme algebrico (non necessariamente irriducibile). Dimostrare che $\dim_k A(X) < \infty$ se e solo se X è un insieme di punti (in questo caso $\#(X) = \dim_k A(X)$).

Esercizio 13 *1) Sia $X = Spec(A)$. Mostrare che i $D(f)$, al variare di f in A, formano una base della topologia di X.*
3) Mostrare che X è quasi-compatto.

Esercizio 14 *1) Sia $X = Spec(A)$ e $x = \mathfrak{p}$ un punto di X. Mostrare che $\overline{\{x\}} = \mathbb{V}(\mathfrak{p})$. Concludere che il punto x è chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è massimale.*
2) Più generalmente sia $Y \subset X = Spec(A)$. Sia $I = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$. Mostrare che $\overline{Y} = \mathbb{V}(I)$.
3) Mostrare che X è $T0$ (Esercizio 1).
4) Se A è integro mostrare che la chiusura del punto $\xi = (0)$ (ideale primo nullo) è tutto X. Si dice che ξ è il punto generico *di X. In particolare $\mathcal{O}_\xi$ è il campo dei quozienti di A. Osservare che ξ appartiene ad ogni aperto non vuoto di X (quindi X non è $T1$). Si suppone che A non è un campo. Dire se ξ può essere aperto, chiuso, né aperto né chiuso.*

Esercizio 15 *Sia A un anello e $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo. Mostrare che il campo residuo dell'anello locale $A_\mathfrak{p}$ è il campo dei quozienti dell'anello integro $A/\mathfrak{p}$.*

Descrivere i punti di $Spec(\mathbb{Z})$ e i loro campi residui.

In generale per ogni $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, abbiamo dei morfismi canonici: $A \to A_\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$ (qui $\kappa(\mathfrak{p})$ indica il campo residuo di $A_\mathfrak{p}$). L'immagine di $f \in A$ in $\kappa(\mathfrak{p})$ è il valore *di f in $x = \mathfrak{p}$. Vediamo così che le nostre "funzioni polinomiali" $f \in A$ su $Spec(A)$ non sono vere funzioni (prendono i loro valori in spazi variabili, guardare l'esempio di $Spec(\mathbb{Z})$).*

Esercizio 16 (cf [1], Es. 22, Cap. 1)
Si ricorda che un elemento e dell'anello A è idempotente *se $e^2 = e$. Sia A un anello e $X = Spec(A)$. Mostrare che le condizioni seguenti sono equivalenti:*
1) X è sconnesso

2) Esiste un idempotente $e \neq 0, 1$
3) $A \simeq A_1 \times A_2$.

Esercizio 17 ([1], Es. 12, Cap. 1)
Mostrare che un anello locale non contiene nessun elemento idempotente $e \neq 0, 1$. *Concludere che se* A *è un anello locale, allora* $Spec(A)$ *è connesso.*

3.4 *Proj*(S), S anello graduato.

Veniamo adesso al primo esempio di uno schema non affine, che generalizza lo spazio proiettivo e quindi considerando i sotto schemi, le varietà proiettive.

Sia $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$, un anello graduato. Quindi S è un anello con una decomposizione in somma diretta di gruppi abeliani S_d, tale che $S_d.S_e \subset S_{d+e}$. La teoria si può svolgere per un anello graduato qualsiasi ma nel seguito ci limiteremo a considerare il caso base: $S = k[x_0, ..., x_n]$, con $S_d = k[x_0, ..., x_n]_d$, l'insieme dei polinomi omogenei di grado d (con lo zero). Quindi $S_0 = k$ e S è generato da i suoi elementi di grado uno.

Sia $S_+ = \bigoplus_{i>0} S_i$, l'ideale massimale irrilevante. Come insieme $Proj(S) = \{\mathfrak{p} \subset S \mid \mathfrak{p} \text{ ideale primo omogeneo}, S_+ \not\subset \mathfrak{p}\}$.

Se $I \subset S$ è un ideale omogeneo si pone $\mathbb{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$. Come nel caso classico i $\mathbb{V}(I)$ sono i chiusi di una topologia su $Proj(S)$, la *topologia di Zariski*. Rimane da definire un fascio di funzioni.

Nel caso classico un polinomio $P \in S = k[x_0, ..., x_n]$ non solo non definisce una funzione $\mathbb{P}^n \to k$ ma non ha neanche senso chiedersi se si annulla o meno in un punto p di $\mathbb{P}^n$. Un polinomio *omogeneo*, P, non definisce neanche lui una funzione ma ha senso chiedersi se è zero o meno, cioè $\mathbb{V}(P)$ è definito. Per avere una funzione su $\mathbb{P}^n$ bisogna considerare P/Q dove P, Q sono due polinomi *omogenei, dello stesso grado*. Chiaramente questa funzione è definita (regolare) solo se $Q(x) \neq 0$. Quindi se $U \subset \mathbb{P}^n$ è un aperto, una funzione f è regolare su U se e solo se è *localmente* un quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado ($\forall x \in U, \exists V_x$, $x \in V_x \subset U$, V_x aperto tale che $f = P/Q$ su V_x, con $Q(y) \neq 0, \forall y \in V_x$). Dopo questo piccolo ripasso, cerchiamo di fare esattamente la stessa cosa su $Proj(S)$.

Sia $\mathfrak{p} \in Proj(S)$ e sia T l'insieme degli elementi *omogenei* che non appartengono a $\mathfrak{p}$. L'insieme T è una parte moltiplicativa. Possiamo quindi localizzare rispetto a T. Finalmente sia $S_{(\mathfrak{p})}$ l'insieme degli elementi di grado zero nel localizzato $T^{-1}S$. Quindi $S_{(\mathfrak{p})} = \{m/n \mid n \in S \setminus \mathfrak{p}; m, n \text{ omogenei, dello stesso grado}\}$.

Sia $U \subset Proj(S)$ un aperto, allora $\mathcal{O}(U)$ è l'insieme delle funzioni $s : U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})}$, tali che $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$ e tale che s sia localmente una funzione razionale regolare, cioè: $\forall \mathfrak{p} \in U$, $\exists V$, intorno aperto di $\mathfrak{p}$, contenuto in U, $m, n \in S$ elementi omogenei dello stesso grado, $n \notin \mathfrak{q}$, $\forall \mathfrak{q} \in V$, e con $s(\mathfrak{q}) = m/n \in S_{(\mathfrak{q})}$. Questo definisce un fascio $\mathcal{O}$ su $Proj(S)$.

Definizione 3.5. *Nel seguito si indicherà con $Proj(S)$ lo spazio annellato $(Proj(S), \mathcal{O})$ costruito qui sopra.*

Rimane da vedere che $Proj(S)$ è uno schema, cioè che ogni punto ha un intorno aperto che è uno schema affine. Si tratta quindi di "tradurre" l'operazione ben nota di considerare le carte affini del proiettivo.

Proposizione 3.6. *Con le notazioni precedenti:*
(a) La spiga $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *è isomorfa all'anello locale* $S_{(\mathfrak{p})}$
(b) Per ogni elemento omogeneo $f \in S_+$*, sia* $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$*. Allora* $D_+(f)$ *è aperto in* $Proj(S)$ *e*

$$(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \simeq Spec(S_{(f)})$$

dove $S_{(f)}$ *è l'insieme degli elementi di grado zero di* S_f*. Inoltre gli aperti* $D_+(f)$ *ricoprono* $Proj(S)$
(c) $Proj(S)$ *è uno schema.*

Dimostrazione. Il punto (a) è simile al caso affine. Chiaramente $D_+(f)$ è il complementare dell'ipersuperficie $\mathbb{V}(f) = \{\mathfrak{p} \mid f \in \mathfrak{p}\}$, quindi $D_+(f)$ è aperto. Se $\mathfrak{p} \in Proj(S)$, siccome $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$, esiste $f \in S_+$, tale che $f \notin \mathfrak{p}$, quindi $\mathfrak{p} \in D_+(f)$.

Abbiamo la mappa naturale $S \to S_f$, se $I \subset S$ è un ideale omogeneo possiamo considerare $IS_f \cap S_{(f)}$ (gli elementi di grado zero in IS_f). Questo definisce $\varphi : D_+(f) \to Spec(S_{(f)})$. Si mostra che φ è un omeomorfismo e che induce tra i fasci un isomorfismo $\varphi^{\#}$. Vedere [6], II. Prop. 2.5.

Il punto (c) segue da (a) e (b). □

Osservazione 3.7. Questa costruzione può essere svolta per ogni anello graduato S (ma se S non è generato da i suoi elementi di grado uno, il risultato potrebbe essere diverso da quanto uno si aspetta). In particolare se A è un anello qualsiasi si può considerare $S = A[x_0, ..., x_n]$. In questo caso $Proj(S)$ si indica con $\mathbb{P}^n_A$, l'n-spazio proiettivo su A. Se $A = k$ è un campo l'insieme dei punti chiusi di $Proj(S)$ è omeomorfo alla varietà $\mathbb{P}^n_k$.

Esercizi.

Esercizio 18 *1) Sia* $X = Spec(A)$. *Se* $I \subset A$ *è un ideale, mostrare che* $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\sqrt{I})$ *(attenzione: è una questione puramente topologica, i sotto schemi associati a* I *e* $\sqrt{I}$ *sono diversi in generale).*

2) Sia $\Phi : A \to B$ *un morfismo di anelli e sia* $\varphi : Y = Spec(B) \to X = Spec(A)$, *l'applicazione indotta* $(f(\mathfrak{q}) = \Phi^{-1}(\mathfrak{q}))$. *Mostrare che se* $\mathfrak{b} \subset B$ *è un ideale, allora* $\overline{\varphi(\mathbb{V}(\mathfrak{b})} = \mathbb{V}(\Phi^{-1}(\mathfrak{b}))$.

Esercizio 19 *Sia* $\varphi : A \to B$ *un morfismo di anelli e sia* $\psi : Spec(B) \to Spec(A)$ *il morfismo corrispondente. Mostrare che* ψ *è un'applicazione continua.*

Esercizio 20 *Sia* $\Phi : A \twoheadrightarrow B$ *un morfismo suriettivo di anelli. Sia* $\varphi : Spec(B) \to Spec(A)$ *il morfismo indotto. Mostrare che* φ *induce un omeomorfismo da* $Spec(A/I)$ *su* $\mathbb{V}(I)$, *dove* $I = Ker(\Phi)$.

In particolare se $I \subset A$ *è un ideale, abbiamo* $0 \to I \to A \to A/I \to 0$, *che induce* $Spec(A/I) \to Spec(A)$, *il quale induce un omeomorfismo tra* $Spec(A/I)$ *e* $\mathbb{V}(I)$. *Adesso* $Z = Spec(A/I) \simeq \mathbb{V}(I)$ *ha il suo fascio strutturale* $\mathcal{O}_Z$. *Il morfismo* $A \twoheadrightarrow A/I$ *induce* $A_\mathfrak{p} \twoheadrightarrow (A/I)_\mathfrak{p}$, *cioè un morfismo suriettivo* $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$ *(più precisamente* $\mathcal{O}_X \to i_*(\mathcal{O}_Z)$, *dove* $i : Z \simeq \mathbb{V}(I) \hookrightarrow X$ *è l'inclusione). In conclusione l'ideale* I *definisce una struttura di sotto schema chiuso sul chiuso* $\mathbb{V}(I)$. *Se* $I \neq J$ *sono due ideali tali che* $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(J) = Z$, *le strutture definite da* I *e* J *su* Z *sono* diverse.

Esercizio 21 *Sia* $S := k[x, y]$ *(k algebricamente chiuso).*
1) Siano $I_n = (x, y^n)$, $J_0 = (x^2, y^2, xy)$, $J_1 = (xy, y - x^2)$. *Si definisce* $\alpha_n = Spec(S/I_n)$, $\xi = Spec(S/J_0)$, $\eta = Spec(S/J_1)$; *sono tutti sotto schemi chiusi di* $\mathbb{A}^2 = Spec(S)$ *(Esercizio 20). Determinare lo spazio topologico sotto giacente di ognuno di questi schemi. Determinare* $\dim_k(S/I_n), \dim_k(S/J_i)$. *Confrontare con l'Esercizio 12). Dare una descrizione geometrica di* α_n, ξ, η.
2) Se $I \subset J$ *sono due ideali di* S *e se* $X = SpecS/I, Y = SpecS/J$, *convincersi che* $Y \subset X \subset \mathbb{A}^2$ *(come schemi, cioè* Y *è un sotto schema chiuso di* X*).*
3) Tra gli schemi α_n, ξ, η, *dire chi è contenuto in chi.*
4) Sia $F(x, y) \in S$ *un polinomio e sia* C *la curva piana di equazione* $F = 0$ *(cioè* $C = Spec(S/(F))$*). Mostrare che* C *è singolare nell'origine* $\Leftrightarrow \xi \subset C$ *(come schemi).*

Esercizio 22 (cf [6], II. Ex. 2.1)
Sia $X = Spec(A)$ *e* $f \in A$. *Mostrare che* $(D(f), \mathcal{O}_X|D(f))$ *è isomorfo a* $Spec(A_f)$.

3.5 Prime proprietà degli schemi.

In questa sezione indichiamo rapidamente alcune tra le prime definizioni e proprietà degli schemi. Per complementi il lettore può consultare [6], II.3.

Definizione 3.8. *Uno schema X è connesso (risp. irriducibile) se lo spazio topologico $|X|$ è connesso (risp. irriducibile).*

Definizione 3.9. *Uno schema X è* ridotto *se per ogni $x \in X$, l'anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ non ha elementi nilpotenti. (Questo è equivalente a chiedere che per ogni aperto U $\mathcal{O}_X(U)$ non abbia elementi nilpotenti, cf Esercizio 24).*

Uno schema X è integro *se X è ridotto e irriducibile (questo è equivalente a richiedere che per ogni aperto U, l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ sia integro, [6], II Prop. 3.1).*

Definizione 3.10. *Uno schema X è* localmente noetheriano *se può essere ricoperto da schemi affini $Spec(A_i)$ dove ogni A_i è un anello noetheriano.*

Lo schema X è noetheriano *se può essere ricoperto da un numero* finito *di schemi affini $Spec(A_i)$, con A_i anelli noetheriani.*

Se X è uno schema noetheriano, allora $|X|$ è uno spazio topologico noetheriano (cioè se $...Y_r \subset Y_{r-1} \subset ... \subset Y_2 \subset Y_1$, Y_i chiusi, allora esiste m tale che $Y_i = Y_m$ per $i \geq m$

Definizione 3.11. *La dimensione di uno schema X è la sua dimensione come spazio topologico, cioè $\dim(X) = Sup\{n \mid Z_0 \subset Z_1 \subset ... \subset Z_n$, dove i Z_i sono chiusi irriducibili distinti$\}$.*
Se $X = Spec(A)$, allora $\dim(X)$ è la dimensione di Krull dell'anello A.

Definizione 3.12. *Uno schema X è* regolare *se $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello regolare per ogni $x \in X$.*

Lo spazio tangente di Zariski a X in x è il duale del $k(x)$-spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Si ricorda che un anello locale $(A, \mathfrak{m}, k)$, noetheriano, è regolare se $\dim A = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. In particolare se X è lo schema associato a una varietà $\tilde{X}$ su k algebricamente chiuso, allora X è regolare $\Leftrightarrow \tilde{X}$ è liscia.

Nel suo studio degli schemi, Grothendieck segue alcuni principi generali. Tra le linee guide abbiamo:

-sono più importanti i morfismi degli oggetti
-le costruzioni devono essere relative e funtoriali.

Quindi Grothendieck studia gli schemi su S (S uno schema non meglio specificato): $\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ S \end{array}$, il morfismo f è il morfismo strutturale. Osservare che ogni schema è un $Spec(\mathbb{Z})$ schema (perché per ogni anello A c'è un (unico) morfismo $\mathbb{Z} \to A : n \to n.1_A$).

3.5.1 Prodotto.

Per prima cosa Grothendieck mostra che esiste un prodotto nella categoria Sch/S degli schemi su S (o S-schemi). Per questo si inizia col caso affine: sia $S = Spec(A)$, $X = Spec(B)$. Il morfismo strutturale $X \to S$ corrisponde a un morfismo $A \stackrel{\varphi}{\to} B$ e quindi B è una A-algebra $(A \times B \to B : (a, b) \to b.\varphi(a))$. Sia $Y = Spec(C)$ un altro S-schema affine, allora $X \times_S Y = Spec(B \otimes_A C)$.

Nel caso generale, con un bel po' di pazienza e un bel tubo di colla, si ricopre X, Y, S con aperti affini, si fanno i prodotti parziali e si rincolla tutto, funziona (cf [6], II.3, Thm. 3.3).

Il prodotto è un prodotto nel senso delle categorie ($Hom_S(T, X \times_S Y) = Hom_S(T, X) \times Hom_S(T, Y)$, per ogni S-schema T).

Se ci fossimo limitati alla categoria degli schemi su un campo non ci sarebbe nessun prodotto ($K \otimes_k K'$, in generale non è un campo).

L'insieme sotto giacente a $X \times_S Y$ <u>non</u> è in generale il prodotto (fibrato) degli insiemi sotto giacenti a X, Y (Esercizio 28).

3.5.2 Cambiamento di base.

Sia

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow \\ S' & \to & S \end{array}$$

Vogliamo fare corrispondere al S-schema X un S'-schema: si prende $X \times_S S'$ (X e S' sono entrambi degli S-schemi). Abbiamo

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \to & S \end{array}$$

Si dice che X' è ottenuto da X tramite cambiamento di base. Otteniamo così un funtore $Sch/S \to Sch/S'$. Si capisce adesso il senso del termine *schema*: partendo da uno schema X (su $\mathbb{Z}$) è possibile ottenere, per cambiamenti di base, vari enti geometrici, il nostro X iniziale è lo schema (schemino), scheletro, di tutte queste varietà.

Due esempi di cambiamento di base:

1. *Estensioni degli scalari.*
   Sia $k \subset k'$ un'estensione di campi (per esempio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$). Abbiamo quindi $Spec(k') \to Spec(k)$: ad ogni k-schema possiamo associare un k'-schema. E' chiaro che da un punto di vista aritmetico, questa nozione è fondamentale.
2. *Fibre di un morfismo.*
   Sia $f : X \to S$ e $s \in S$. Ricordiamo che $k(s)$ indica il campo residuo dell'anello locale $\mathcal{O}_{S,s}$. C'è un morfismo iniettivo canonico $S' = Spec(\mathcal{O}_{S,s}) \hookrightarrow S$. Inoltre da $\mathcal{O}_{S,s} \to k(s)$ si ottiene $Spec(k(s)) \to S'$.
   In definitiva $Spec(k(s)) \to S$. Si dimostra (cf [6], p. 89) che esiste un isomorfismo tra lo spazio topologico $X \times_S Spec(k(s))$ e la fibra $f^{-1}(s) \subset X$ (con la topologia indotta da quella di X). Questo permette di considerare la fibra, in modo canonico, come un $k(s)$-schema (quindi uno schema su un campo). Questo è molto importante, specie in geometria "classica", perché ci permetterà di avere una buona nozione di *famiglia di varietà algebriche* e una buona teoria delle deformazioni.

Uno dei temi ricorrenti è lo studio delle proprietà conservate per cambiamento di base.

Un altro tema, in qualche modo opposto, sono i problemi di *discesa.* Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \to & S \end{array}$$

Se $X' \to S'$ ha una certa proprietà, questa proprietà è ancora vera per $X \to S$? I problemi di discesa sono in generale molto più difficili.

3.5.3 Piattezza.

In geometria la nozione di *famiglia* di varietà algebriche è fondamentale. La prima idea che viene in mente è di chiamare famiglia l'insieme delle fibre di un morfismo $f : X \to Y$ (famiglia di sotto varietà di X parametrizzata da Y). Ovviamente senza chiedere niente al morfismo f, questa definizione non rende dei buoni servizi (si vorrebbe almeno che in una "famiglia" la dimensione delle fibre fosse costante). Quale condizione chiedere a f per avere una buona nozione di famiglia?

La risposta data da Grothendieck è di chiedere che il morfismo sia *piatto*. Si ricorda che un A-modulo M è piatto se il funtore $-\otimes_A M$ è esatto (il prodotto tensoriale è sempre esatto a destra, ma non sempre a sinistra).

Definizione 3.13. *Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è piatto nel punto $x \in X$ se $\mathcal{O}_{X,x}$ è un $\mathcal{O}_{Y,y}$-modulo piatto, dove $y = f(x)$ e dove la struttura di $\mathcal{O}_{Y,y}$-modulo è data dal morfismo $f^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$.*

Il morfismo è piatto se è piatto in ogni $x \in X$.

Questa condizione è poco intuitiva ma è proprio quella giusta! Per esempio:

-Sia Y regolare, integro di dimensione uno e sia $p \in Y$ un punto chiuso. Sia $X \subset \mathbb{P}^n \times (Y \setminus p)$, sotto schema chiuso e piatto su $Y \setminus p$, allora esiste un unico sotto schema chiuso $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n \times Y$, piatto su Y che prolunga X. (*si può passare al limite*, [6], III Prop. 9.8).

La nozione di piattezza è fondamentale per l'esistenza dello schema di Hilbert che parametrizza le curve di genere g, grado d in $\mathbb{P}^n$ e per la teoria delle deformazioni.

3.6 Schemi e varietà.

Una varietà non è esattamente uno schema ma è possibile associare ad ogni varietà su un campo k algebricamente chiuso uno schema su k. Più precisamente esiste un funtore $t : Var(k) \to Sch/k$ che associa ad ogni varietà X uno schema $t(X)$. Inoltre l'insieme dei punti chiusi di $|t(X)|$ è omeomorfo a X e $\mathcal{O}_X$ è la restrizione all'insieme dei punti chiusi di $\mathcal{O}_{t(X)}$.

Essenzialmente basta vederlo del caso di una varietà affine X. Se $A = A(X)$ è l'anello delle coordinate di X, allora lo schema associato è *SpecA* (i punti di X corrispondono ai punti di *SpecA* del tipo $\mathfrak{m}_x$, dove $\mathfrak{m}_x \subset A$ è l'ideale delle funzioni che si annullano in $x \in X$) ([6], II prop. 2.6).

Il funtore t è pienamente fedele cioè la mappa naturale $Hom_{Var(k)}(X, Y) \to Hom_{Sch/k}(t(X), t(Y))$ è biiettiva. (Vedere [6], II. Prop. 2.6). L'immagine delle varietà proiettive è l'insieme degli schemi proiettivi, integri ([6], II. Prop. 4.10).

Nel seguito lavoreremo nell'ambito delle varietà (su $k = \overline{k}$), ma, se necessario, non esiteremo a considerare gli schemi associati. In realtà questo non comporta grandi cambiamenti visto che esiste una corrispondenza biunivoca tra sotto schemi chiusi di $\mathbb{P}^n$ e ideali omogenei *saturi*, $I \subset k[x_0, ..., x_n]$ (Sez. 4.5).

Esercizi.

Esercizio 23 *Siano* $f, g \in A$. *Dimostrare:*
1) $D(f) = \emptyset \Leftrightarrow f$ *è nilpotente.*
2) $D(f) = Spec(A) \Leftrightarrow f$ *è invertibile.*
3) $D(f) \cap D(g) = D(fg)$
4) Cosa potete dire di $D(f) \cup D(g)$, *è un aperto fondamentale (cioè della forma* $D(h)$*)?*
5) $D(f) = D(g) \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.

Esercizio 24 (cf [1], Es. 17, Cap. 1)
L'anello A *è ridotto se non ha elementi nilpotenti* ($\sqrt{(0)} = 0$). *Sia* $X = Spec(A)$. *Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
1) A *è ridotto*
2) $A_{\mathfrak{p}}$ *è ridotto per ogni* $\mathfrak{p} \in Spec(A)$
3) $A_{\mathfrak{m}}$ *è ridotto per ogni ideale massimale di* A
4) $\mathcal{O}_X(U)$ *è ridotto per ogni aperto* $U \subset X$.
Se le condizioni 1), ..., 4) sono soddisfatte si dice che X *è uno* schema affine ridotto.

Esercizio 25 ([1], Es. 19, Cap. 1)
Uno spazio topologico X *è irriducibile se è non vuoto e se ogni coppia di aperti non vuoti si incontrano, o in modo equivalente, se ogni aperto non vuoto è denso in* X. *Provare che* $X = Spec(A)$ *è irriducibile se e solo se il nilradicale* ($\sqrt{(0)}$) *di* A *è un ideale primo.*

In particolare se A *è integro* $Spec(A)$ *è irriducibile. Mostrare che se* A *è ridotto (Esercizio 24), allora* $Spec(A)$ *è irriducibile se e solo se* A *è integro.*

Esercizio 26 *Sia* $X = Spec(A)$. *Sia* $B = A/\sqrt{(0)}$. *Si pone* $X_{red} = Spec(B)$.
1) Mostrare che X_{red} *è ridotto (cf Esercizio 24)*
2) Mostrare che X *è irriducibile se e solo se* X_{red} *è irriducibile.*

Esercizio 27 *Sia* X *uno schema su* k *(cioè con un morfismo* $X \to Spec\, k$*).* *Mostrare che* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ *è un* k*-spazio vettoriale.*
Si assume k *algebricamente chiuso. Se* X *è integro e se* $\dim_k(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) < \infty$, *allora* $\dim_k(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) = 1$.

Esercizio 28 *Sia* $X = Spec(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $Y = Spec(\mathbb{Q})$ *e* $S = Spec(\mathbb{Z})$. *Determinare* $X \times_S Y$.

4

Fasci coerenti e moduli graduati.

L'algebra lineare è particolarmente efficace e limpida quando si lavora con spazi vettoriali di dimensione finita; è naturale cercare condizioni analoghe di finitezza in algebra commutativa (A-moduli). La prima nozione è quella di modulo di tipo finito (o finitamente generato). Purtroppo un sotto modulo di un modulo finitamente generato non è necessariamente finitamente generato. Una nozione più forte è quella di anello e modulo noetheriano: se A è noetheriano e se M è un A-modulo di tipo finito, allora M è noetheriano e ogni sotto modulo di M è di tipo finito. In particolare se $f : A^n \to M$ è suriettivo, allora $Ker(f)$ è finitamente generato. Le ipotesi noetheriane formano il quadro naturale della geometria algebrica (cf teorema della base di Hilbert, decomposizione in componenti irriducibili, ecc...). In conclusione, è naturale cercare delle condizioni analoghe di finitezza per gli $\mathcal{O}_X$-moduli. In quest'ottica le nozioni utili sono quelle di fascio di tipo finito e di fascio coerente.

In questo capitolo vogliamo mostrare due cose:
1) esiste una corrispondenza tra certi S-moduli graduati ($S = k[x_0, ..., x_n]$) e i gli $\mathcal{O}_X$-moduli coerenti ($X = \mathbb{P}^n_k$). Questa corrispondenza non è perfetta ma permette di tradurre questioni sui fasci in questioni di algebra commutativa.
2) esiste una corrispondenza perfetta tra sotto schemi chiusi di $\mathbb{P}^n_k$ e ideali saturi $I \subset S$. Quindi da un punto di vista algebrico un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$ è un oggetto facilmente comprensibile.

Il lettore osserverà che nel seguito lavoreremo esclusivamente con fasci coerenti.

4.1 Fasci (quasi)coerenti su $\boldsymbol{Spec(A)}$.

Sia $X = Spec(A)$ uno schema affine e sia M un A-modulo. Vogliamo associare a M un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli (notato nel seguito $M^{\sim}$).

Se $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, definiamo $(M^\sim)_\mathfrak{p}$ come il localizzato di M in $\mathfrak{p}$. Se $U \subset Spec(A)$ è un aperto, definiamo $M^\sim(U)$ come l'insieme delle funzioni $s : U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p}$, tali che $s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$ e che sono localmente una frazione ("definita, regolare") m/f, $m \in M, f \in A$. Più precisamente si richiede che per ogni $\mathfrak{p} \in U$, esista un intorno aperto, V, di $\mathfrak{p}$ in U e elementi $m \in M, f \in A$, tali che per ogni $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ e $s(\mathfrak{q}) = m/f$ in $M_\mathfrak{q}$. Con le mappe di restrizione evidenti questo definisce il fascio $M^\sim$ su $X = Spec(A)$.

Si verifica che $M^\sim$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo, che la spiga di $M^\sim$ nel punto $x = \mathfrak{p}$ è $M_\mathfrak{p}$ e che $\Gamma(X, M^\sim) = M$ (cf [6], II. Prop. 5.1).

Non tutti i fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli su $X = Spec(A)$ sono del tipo $M^\sim$ per un qualche A-modulo M. Tuttavia abbiamo:

Definizione 4.1. *Sia X uno schema. Un fascio, $\mathcal{F}$, di $\mathcal{O}_X$ moduli è* quasi coerente *se X può essere ricoperto da aperti affini $U_i = Spec(A_i)$, tali che per ogni i esista un A_i-modulo M_i, tale che $\mathcal{F}|U_i \simeq M_i^\sim$.*
Si dice che $\mathcal{F}$ è coerente *se ogni M_i è un A_i-modulo di tipo finito (finitamente generato).*

La nozione di fascio coerente <u>non</u> si comporta bene se X non è uno schema noetheriano. Siccome invece noi siamo interessati a lavorare in un ambiente noetheriano ($X = \mathbb{A}_k^n, \mathbb{P}_k^n$, k campo algebricamente chiuso) e vogliamo condizioni di finitezza, la nozione di fascio coerente è quella di maggior interesse per noi.

Se X è uno schema qualsiasi $\mathcal{O}_X$ è coerente (Esercizio 29).

Se $X = Spec(A)$, abbiamo un funtore $M \to M^\sim$, dalla categoria degli A-moduli nella categoria degli $\mathcal{O}_X$-moduli quasi-coerenti. Questo funtore stabilisce un'equivalenza di categoria. Il suo inverso è: $\mathcal{F} \to \Gamma(X, \mathcal{F})$, cioè $\Gamma(X, \mathcal{F})^\sim = \mathcal{F}$.

ATTENZIONE: c'è qualcosa da dimostrare, dalla definizione se $\mathcal{F}$ è quasi-coerente sappiamo solo che $X = Spec(A)$ può essere ricoperto da aperti affini $U_i = Spec(A_i)$ tali che $\mathcal{F}|U_i \simeq M_i^\sim$ (cf [6], II. Prop. 5.4, corollary 5.5).

Se A è noetheriano questo funtore stabilisce un'equivalenza tra la categoria degli A-moduli finitamente generati e la categoria degli $\mathcal{O}_X$-moduli coerenti (cf [6], II. Corollary 5.5).

Quindi se A è noetheriano, darsi un $\mathcal{O}_X$-modulo coerente ($X = Spec(A)$) è la stessa cosa che darsi un A-modulo finitamente generato.

Sia $f : A \to B$ un morfismo di anelli e sia $\varphi : X = Spec(B) \to Y = Spec(A)$ il corrispondente morfismo di schemi affini.

Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo. Quindi $\mathcal{F} = M^\sim$ per un qualche B-modulo M. Allora $\varphi_*\mathcal{F} = ({}_AM)^\sim$, dove ${}_AM$ indica M con la struttura di A-modulo indotta da f.

Sia $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-modulo. Quindi $\mathcal{G} = N^\sim$ per un qualche A-modulo N. Allora $\varphi^*\mathcal{G} = (N \otimes_A B)^\sim$.

Questo segue dalle definizioni della Sezione **??**.

Vediamo adesso cosa succede nell'ambito proiettivo ($X = Proj(S)$, $S = k[x_0, ..., x_n]$).

4.2 Il funtore $M \to M^\sim$, i fasci $\mathcal{O}(a)$.

Prima di tutto ad ogni $S = k[x_0, ..., x_n]$-modulo graduato M si associa un fascio $M^\sim$. La costruzione è simile a quella del caso affine, con le dovute modifiche.

Sia $\mathfrak{p} \in Proj(S)$ e sia T la parte moltiplicativa degli elementi omogenei non contenuti in $\mathfrak{p}$. Finalmente sia $M_{(\mathfrak{p})}$ l'insieme degli elementi di grado zero in $T^{-1}M$. Per ogni U aperto di $Proj(S)$, $M^\sim(U)$ è l'insieme delle applicazioni $s : U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$ che sono localmente delle frazioni. Cioè per ogni $\mathfrak{p} \in U$, esiste un intorno aperto V di $\mathfrak{p}$ e degli elementi omogenei dello stesso grado $m \in M, f \in S$ tali che $f(\mathfrak{q}) \neq 0$ per ogni $\mathfrak{q} \in V$ e $s(\mathfrak{q}) = m/f$ in $M_{(\mathfrak{q})}, \forall \mathfrak{q} \in V$.

Con le mappe di restrizione ovvie, $M^\sim$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli ($X = Proj(S) = \mathbb{P}^n_k$).

Abbiamo:

Proposizione 4.2. *Con le notazioni precedenti:*
1) $(M^\sim)_\mathfrak{p} = M_{(\mathfrak{p})}$
2) Per ogni $f \in S_+$ *omogeneo,* $M^\sim|D_+(f) \simeq (M_{(f)})^\sim$ *(via l'isomorfismo di* $D_+(f)$ *con* $Spec\, S_{(f)}$*, dove* $M_{(f)}$ *è il gruppo degli elementi di grado zero in* M_f*)*
3) $M^\sim$ *è un* $\mathcal{O}_X$*-modulo quasi coerente, se* M *è finitamente generato,* $M^\sim$ *è coerente* ($S = k[x_0, ..., x_n]$)*.*

Dimostrazione. [6], II, Prop. 5.11. □

I fasci $\mathcal{O}_X(a)$*.*

Questo permette di definire i fasci $\mathcal{O}(a)$. Il modulo graduato $S(a)$ è il modulo S traslato di a, cioè $S(a)_m = S_{a+m}$.

Definizione 4.3. *Sia* $S = k[x_0, ..., x_n]$ *e* $\mathbb{P}^n_k = Proj(S)$*. Per ogni* $a \in \mathbb{Z}$ *si pone* $S(a)^\sim = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(a)$*.*

Osservazione 4.4. Tutte le costruzioni precedenti possono essere svolte per un anello graduato qualsiasi S. Per ottenere dei risultati "naturali" è opportuno assumere che S sia generata da S_1 come S_0-algebra (cf [6], II Prop. 5.12, Prop. 5.13, 5.13.1).

Osservazione 4.5. I fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(a)$ definiti qui sopra non sono altri che i fasci associati ai divisori aH, H un iperpiano (cf [4]); in particolare sono localmente liberi di rango uno ([6], II Prop. 5.12).

Osservazione 4.6. Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-modulo si pone $\mathcal{F}(a) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(a)$. Se M è un modulo graduato si ha $M^\sim(a) = (M(a))^\sim$. In particolare $\mathcal{O}(a) \otimes \mathcal{O}(b) = \mathcal{O}(a+b)$.

Il funtore $-^\sim$ non si comporta molto bene:

Proposizione 4.7. *Sia M un S-modulo graduato tale che esista $a \in \mathbb{Z}$ con $M_n = 0$ se $n > a$. Allora $M^\sim = 0$.*

Dimostrazione. La spiga di $M^\sim$ nel punto $x = \mathfrak{p}$ è $M_{(\mathfrak{p})}$. Cioè si considera T la parte moltiplicativa degli elementi omogenei di S che non appartengono a $\mathfrak{p}$. Sia $T^{-1}M = \{m/s \mid m \in M, s \in T\}$, con $m/s = m'/s' \Leftrightarrow \exists t \in T$ tale che $t(ms' - m's) = 0$, il localizzato rispetto a T. Finalmente $M_{(\mathfrak{p})}$ è l'insieme degli elementi di grado zero: $M_{(\mathfrak{p})} = \{m/s \in T^{-1}M \mid \deg m = \deg s\}$. Se $m/s \in M_{(\mathfrak{p})}$, allora $m/s = 0/1 \Leftrightarrow \exists t \in T$ tale che $tm = 0$. Ma questo è sicuramente verificato se t è un elemento omogeneo non in $\mathfrak{p}$ di grado abbastanza grande (basta $\deg m + \deg t > a$). Quindi tutte le spighe di $M^\sim$ sono nulle e $M^\sim = 0$. $\square$

Un caso particolarmente importante è quello dei moduli di lunghezza finita:

Definizione 4.8. *Sia $S = k[x_0, ..., x_n]$. Un S-modulo graduato finitamente generato M è di lunghezza finita se $\{a \mid M_a \neq 0\}$ è un insieme finito.*

Quindi per ogni modulo di lunghezza finita M, $M^\sim = 0$.
Un complemento alla Proposizione 4.7:

Proposizione 4.9. *Sia M un S-modulo graduato <u>finitamente generato</u>. Se $M^\sim = 0$, allora $M_d = 0$ se $d >> 0$.*

Dimostrazione. Se $m \in M$ indichiamo con $J[m] = \{P \in S \mid Pm = 0\}$, è un ideale omogeneo. Siccome $M_{(\mathfrak{p})} = 0$, $\forall x = \mathfrak{p}$ esiste $P \notin \mathfrak{p}$ (cioè con $P(x) \neq 0$) tale che $P \in J[m]$. Quindi $\mathbb{V}(J[m]) = \emptyset$ e per il teorema degli zeri esiste $d(m)$ tale che $\mathfrak{m}^{d(m)} \subset J[m]$, cioè ogni polinomio omogeneo di grado $\geq d(m)$ appartiene a $J[m]$. Siano $m_1, ..., m_r$ dei generatori di M. Se $d \geq max\,\{d(m_i)\}$, allora ogni polinomio P di grado $\geq d$, verifica $Pm = 0, \forall m \in M$. Sia $a \geq 2d$. Un elemento $m \in M_a$ si scrive $m = \sum P_i m_i$, con $\deg P_i = a - \deg m_i \geq d$. Quindi $P_i m_i = 0$ e $m = 0$. Segue che $M_a = 0$ se $a \geq 2d$. $\square$

Questa era la cattiva notizia, la buona notizia è che, sostanzialmente, il fenomeno descritto nella Proposizione 4.7 è l'unico ostacolo a una buona corrispondenza tra i nostri funtori. Intanto abbiamo:

Proposizione 4.10. *Con le notazioni precedenti l'operazione $-^{\sim}$ è un funtore esatto, additivo, covariante dalla categoria degli S-moduli graduati nella categoria degli $\mathcal{O}$-moduli.*

Dimostrazione. Il funtore è esatto perché se $M' \to M \to M''$ è una successione esatta di S-moduli graduati, allora $M'_{(\mathfrak{p})} \to M_{(\mathfrak{p})} \to M''_{(\mathfrak{p})}$ è esatta per le proprietà della localizzazione (cf [1], Cap. III). Quindi la successione di fasci $M'^{\sim} \to M^{\sim} \to M''^{\sim}$ è esatta (perché lo è sulle spighe). L'additività segue dalle proprietà della localizzazione. □

Definizione 4.11. *Sia $\mathcal{C} = \{M \mid M$ è un S-modulo graduato tale che $M_n = 0$ se $n >> 0\}$.*
Un morfismo di S-moduli graduati $\varphi : M \to N$ è detto $\mathcal{C}$-iniettivo (risp. $\mathcal{C}$-suriettivo) se $Ker(\varphi) \in \mathcal{C}$ (risp. $Coker(\varphi) \in \mathcal{C}$). Il morfismo è $\mathcal{C}$-biiettivo se è $\mathcal{C}$-iniettivo e $\mathcal{C}$-suriettivo.

Osservazione 4.12. Segue dal 4.7 che un morfismo $\mathcal{C}$-*iettivo di moduli dà luogo a un morfismo *iettivo di fasci. In particolare sia $M_{\geq n} := \oplus_{p \geq n} M_p$; $M_{\geq n}$ è un sotto modulo di M e il quoziente $M/M_{\geq n}$ appartiene a $\mathcal{C}$, pertanto $M^{\sim} = (M_{\geq n})^{\sim}$; ci sono quindi tanti moduli che definiscono lo stesso fascio.

Rimane da vedere quando il fascio $M^{\sim}$ è coerente.

Definizione 4.13. *Un modulo graduato M è di tipo TF se esiste n tale che il sottomodulo $M_{\geq n}$ sia di tipo finito.*

Proposizione 4.14. *Se M è di tipo TF allora $M^{\sim}$ è coerente. Inoltre, se M è di tipo TF, $M^{\sim} = 0$ se e solo se $M \in \mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Se M è di tipo TF, allora esiste d tale che $M_{\geq d}$ sia finitamente generato. Abbiamo $M^{\sim} = (M_{\geq d})^{\sim}$, quindi (Proposizione 4.2) $M^{\sim}$ è coerente.

Sia $M^{\sim} = 0$. Possiamo assumere M finitamente generato (perché M è di tipo TF). Si conclude con la Proposizione 4.9. □

Corollario 4.15. *Siano M, N due S-moduli graduati di tipo TF e sia $\varphi : M \to N$ un morfismo. Il morfismo $\varphi^{\sim} : M^{\sim} \to N^{\sim}$ è *-iettivo se e solo se φ è $\mathcal{C}$-*iettivo.*

Dimostrazione. Esercizio 30. □

Ad ogni modulo graduato, M, di tipo TF abbiamo associato un fascio coerente $M^{\sim} = \mathcal{F}$, è naturale chiedersi se si ottengono così tutti i fasci coerenti. Per rispondere a questa domanda cercheremo di tornare indietro associando un modulo ad ogni fascio.

Esercizi.

Esercizio 29 *Sia X uno schema. Mostrare che $\mathcal{O}_X$ è coerente.*

Esercizio 30 *Dimostrare il Corollario 4.15*

Esercizio 31 *Sia X uno schema noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo. Allora $\mathcal{F}$ è coerente se e solo se $\mathcal{F}$ è localmente il coker di un morfismo di fasci liberi di rango finito. Cioè se $\forall x$, esiste un intorno aperto U di x e una successione esatta:*

$$\mathcal{O}_U^n \to \mathcal{O}_U^m \to \mathcal{F}|U \to 0$$

(In realtà questa era la definizione iniziale di fascio coerente, vedere [8]).

Esercizio 32 *Sia $X = Spec\,A$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X. Quindi $\mathcal{F} = M^\sim$, con M un A-modulo finitamente generato. Abbiamo $\Gamma(X, \mathcal{F}) \simeq M$. Mostrare che se $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ corrisponde a $m \in M$, allora il supporto di s (vedi Esercizio 6) è $\mathbb{V}(Ann(m))$. Concludere che il supporto di $\mathcal{F}$, $Supp(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$ è chiuso in X.*

Più generalmente il supporto di un fascio coerente su uno schema noetheriano è chiuso.

Esercizio 33 *Sia $S = k[x_0, x_1]$ $(k = \overline{k})$ e sia M l'S-modulo graduato k in grado zero (cioè $M_0 = k$, $M_n = 0$ se $n \neq 0$). Mostrare che la risoluzione libera minimale di M è data da:*

$$0 \to S(-2) \xrightarrow{\psi} 2.S(-1) \xrightarrow{\varphi} S \to M \to 0$$

Qui ψ è data da $\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$ e $\varphi = (x_0, x_1)$.

Dedurne l'esistenza su $\mathbb{P}^1$ di una successione esatta (successione di Eulero):

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \to 2.\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0$$

Dare una costruzione "geometrica" di questa successione.

Esercizio 34 *Siano $C, X \subset \mathbb{P}^2_k$ $(k = \overline{k})$ due curve senza componenti comuni, di equazioni F, G. Sia $I \subset k[x_0, x_1, x_2]$, l'ideale $I = (F, G)$. Mostrare che la risoluzione libera minimale di I è della forma:*

$$0 \to S(-f-g) \to S(-f) \oplus S(-g) \to I \to 0$$

$(f = \deg F, g = \deg G)$ (Hint: guardare l'Esercizio 33). Concludere che esiste una successione esatta su $\mathbb{P}^2$:

$$0 \to \mathcal{O}(-f-g) \to \mathcal{O}(-f) \oplus \mathcal{O}(-g) \to I^\sim \to 0$$

4.3 Il funtore $\mathcal{F} \to H^0_*(\mathcal{F})$.

Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$-modulo ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$). Si pone $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m)$. Sia $\Gamma_*(\mathcal{F})$ (in seguito denotato anche con $H^0_*(\mathcal{F})$) la somma diretta $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathcal{F}(m))$. Allora $H^0_*(\mathcal{F})$ è un S-modulo graduato. Infatti se $f \in S_a$ e $s \in \Gamma(\mathcal{F}(m))$, allora $fs \in \Gamma(\mathcal{F}(a+m))$ è definito nel modo seguente: l'elemento $f \in S_a$ è una sezione globale $f \in \Gamma(\mathcal{O}(a))$ (osservare che $a \geq 0$), quindi corrisponde a un morfismo (iniettivo) $\mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{O}(a)$. Tensorizzando con $\mathcal{F}(m)$, abbiamo $\mathcal{F}(m) \to \mathcal{F}(a+m)$ e quindi $\Gamma(\mathcal{F}(m)) \to \Gamma(\mathcal{F}(a+m))$. L'immagine di s in questo morfismo è $fs \in \Gamma(\mathcal{F}(a+m))$.

Abbiamo quindi associato ad ogni $\mathcal{O}$-modulo $\mathcal{F}$ un S-modulo graduato $\Gamma_*(\mathcal{F})$. Adesso possiamo applicare il funtore $-^\sim$ a questo modulo e la domanda è: chi è $\Gamma_*(\mathcal{F})^\sim$? Viceversa partendo da un S-modulo graduato, M, abbiamo un $\mathcal{O}$-modulo $M^\sim$ e poi un S-modulo graduato $\Gamma_*(M^\sim)$. E' ancora M?

Possiamo limitarci a considerare (come è lecito visto le nostre ipotesi noetheriane: $S = k[x_0, ..., x_n], k$ un campo) fasci coerenti e moduli finitamente generati, o meglio moduli di tipo TF. Ma anche sotto queste ipotesi i funtori $-^\sim$ e H^0_* non sono aggiunti (ma quasi). Intanto abbiamo:

Proposizione 4.16. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su $\mathbb{P}^n$, allora esiste un S-modulo graduato, M, di tipo TF, tale che $M^\sim = \mathcal{F}$.*

Il modo più veloce per dimostrare questa Proposizione è di usare il Teorema A di Serre:

Teorema 4.17. (Teorema A)
Sia X uno schema proiettivo, noetheriano e sia $\mathcal{O}(1)$ un fascio invertibile molto ampio. Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo coerente. Allora esiste un intero n_0 tale che se $n \geq n_0$, $\mathcal{F}(n)$ è generato da un numero finito di sezioni globali (cioè esiste un morfismo suriettivo $a.\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}(n) \to 0$).

Dimostrazione. Diamo alcuni cenni della dimostrazione, per più dettagli vedere [6], II.5, Theorem 5.17 o [8]. Il punto di partenza è la seguente osservazione: sia $X = Spec(A)$, $f \in A$ e $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo quasi-coerente. Sia $s \in \mathcal{F}(D(f))$, allora, esiste $n > 0$, tale che $f^n s$ si estende a una sezione globale di $\mathcal{F}$, cioè esiste $t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tale che $t|D(f) = f^n s$ ([6], Lemma 5.3).

Per dimsotrare il Teorema ci si riduce al caso $X = \mathbb{P}^n_k$. Sull'aperto $D(x_i)$ il fascio $\mathcal{F}$ corrisponde a un $B_i = k[x_0/x_i, ..., x_n/x_i]$ modulo finitamente generato, M_i (perché $D(x_i)$ è affine e $\mathcal{F}$ è coerente). Siano $s_1^{(i)}, ..., s_{j_i}^{(i)} \in M_i$ dei generatori, sono degli elementi di $\mathcal{F}(D(x_i))$. Generalizzando quanto detto sopra (cf [6], Lemma 5.14) esiste un n tale che $x_i^n s_j^{(i)}$ si estenda a una sezione globale, t_{ij}, di $\mathcal{F}(n)$. A priori n dipende da $s_j^{(i)}$, ma siccome abbiamo un numero finito di casi da considerare, il più grande n funzionerà per tutti. Adesso $\mathcal{F}(n)$ corrisponde a un modulo M_i' su $D(x_i)$ e $x_i^n : M_i \to M_i'$ è un isomorfismo ($x^n : \mathcal{O} \to \mathcal{O}(n)$ è un isomorfismo su $D(x)$ e $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n)$). Quindi $x_i^n s_j^{(i)}$ generano M_i' e pertanto le sezioni globali t_{ij} generano $\mathcal{F}(n)$ ovunque. $\square$

Quindi se $\mathcal{F}$ è un fascio coerente su $\mathbb{P}_k^n$, per m abbastanza grande abbiamo $a.\mathcal{O} \to \mathcal{F}(m) \to 0$ e quindi $a.\mathcal{O}(-m) \to \mathcal{F} \to 0$ (qui indichiamo con $a.\mathcal{O}$ la somma diretta di a esemplari di $\mathcal{O}$). Abbiamo quindi $0 \to \mathcal{K} \to a.\mathcal{O}(-m) \to \mathcal{F} \to 0$. Anche il fascio $\mathcal{K}$ è coerente. Questo segue dal

Lemma 4.18. *Sia X uno schema noetheriano. Il ker, coker e l'immagine di un morfismo di fasci coerenti è coerente.*

Dimostrazione. La questione è locale quindi possiamo assumere X affine. Il morfismo $f : \mathcal{F} = M^\sim \to \mathcal{G} = N^\sim$ corrisponde, visto l'equivalenza di categoria tra moduli finitamente generati e fasci coerenti, a un morfismo $\varphi : M \to N$, dove M, N sono A-moduli finitamente generati ($X = Spec\ A$). Quindi anche $Ker(\varphi), Im(\varphi), Coker(\varphi)$ lo sono (A noetheriano). $\square$

Più generalmente se

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

è una successione esatta di $\mathcal{O}$-modulo e se due dei fasci $\mathcal{F}_i$ sono coerenti, allora anche il terzo è coerente (vedere [8]).

Possiamo ripetere il processo con $\mathcal{K}$ e otteniamo:

Lemma 4.19. *Un $\mathcal{O}$-mudulo $\mathcal{F}$ ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$) è coerente se e solo se esiste una successione esatta:*

$$\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{F} \to 0$$

dove $\mathcal{L}_i$ è una somma diretta (finita) di fasci $\mathcal{O}(a)$ ($\mathcal{L}_i = \bigoplus_{j=1}^{r_i} \mathcal{O}(a_j^{(i)})$).

Adesso possiamo dimostrare la Proposizione 4.16:

Dimostrazione. della Proposizione 4.16
Per il Lemma 4.19 abbiamo $\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{F} \to 0$. Applicando il funtore H_*^0 viene $H_*^0(\mathcal{L}_2) \to H_*^0(\mathcal{L}_1)$. Sia M il coker di questa mappa. Siccome il funtore $-^\sim$ è esatto e siccome $(H_*^0(\mathcal{O}(a)))^\sim = \mathcal{O}(a)$, otteniamo:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}_2 & \to & \mathcal{L}_1 & \to & M^\sim & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \mathcal{L}_2 & \to & \mathcal{L}_1 & \to & \mathcal{F} & \to & 0 \end{array}$$

Siccome le frecce verticali sono degli isomorfismi, risulta che $\mathcal{F} \simeq M^\sim$ e siccome M è di tipo TF, la Proposizione è dimostrata. $\square$

In conclusione partendo dai moduli di tipo TF otteniamo, con il funtore $-^\sim$, *tutti* i fasci coerenti.

4.4 Confronto tra H^0_* e $-^\sim$.

Vediamo adesso (con poche dimostrazioni) di confrontare i nostri due funtori.

Lavoriamo sempre $\mathbb{P}^n_k$. Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$-modulo. Definiamo una mappa: $\beta_{\mathcal{F}} : (H^0_*(\mathcal{F}))^\sim \to \mathcal{F}$, nel modo seguente. Per costruzione $(H^0_*(\mathcal{F}))^\sim_x$ è $H^0_*(\mathcal{F})_{(\mathfrak{p})}$ ($x = \mathfrak{p}$). Quindi un elemento della spiga è della forma s/Q, dove $s \in H^0(\mathcal{F}(d))$ e dove Q è omogeneo di grado d, $Q \notin \mathfrak{p}$ (cioè $Q(x) \neq 0$). Possiamo vedere $1/Q$ come un elemento della spiga $\mathcal{O}(-d)_x$. Il germe di s fornisce $s_x \in \mathcal{F}(d)_x$. Quindi $1/Q \otimes s_x \in \mathcal{F}_x = \beta_{\mathcal{F},x}(s/Q)$. (La definizione di $\beta_{\mathcal{F},U}$ su un aperto U è analoga.)

Abbiamo ([6], II Prop. 5.15):

Proposizione 4.20. *Se $\mathcal{F}$ è coerente $\beta_{\mathcal{F}} : (H^0_*(\mathcal{F}))^\sim \to \mathcal{F}$ è un isomorfismo.*

Adesso se M è un S-modulo graduato definiamo $\alpha_M : M \to H^0_*(M^\sim)$ nel modo seguente. Sia $m \in M_d$ un elemento di grado d. Possiamo vedere m come un elemento di grado zero in $M(d)$. Se $x = \mathfrak{p}$, $m/1 \in M(d)_{(\mathfrak{p})}$, quindi $m/1$ definisce un elemento in $M(d)^\sim_x$ per ogni x, ossia una sezione di $M^\sim(d)$. Questa sezione è $\alpha_M(m)$. Abbiamo ([6], II Ex. 5.9, Theorem 5.19):

Proposizione 4.21. *Sia M un S-modulo graduato. Per ogni d abbastanza grande $\alpha_M(d) : M_d \to \Gamma(M^\sim(d))$ è un isomorfismo, ma in generale α_M non è un isomorfismo.*

Per quanto riguarda l'ultima asserzione, abbiamo già visto che se $M \in \mathcal{C}$, allora $M^\sim = 0$, quindi $H^0_*(M^\sim) = 0$.

Definizione 4.22. *Due S-moduli graduati, M, N sono* quasi-isomorfi *se esiste un intero d tale che $M_{\geq d}$ e $N_{\geq d}$ siano isomorfi.*

Quindi M, N sono quasi-isomorfi se esiste un morfismo $f : M \to N$, con $Ker(f) \in \mathcal{C}$ e $Coker(f) \in \mathcal{C}$. L'essere quasi isomorfi è una relazione d'equivalenza. Un modulo di tipo TF è quasi isomorfo a un modulo finitamente generato.

Da quanto detto prima otteniamo:

Proposizione 4.23. *I funtori $-^\sim$ e H^0_* stabiliscono un'equivalenza di categoria tra i moduli di tipo TF modulo la relazione di quasi-isomorfismo e gli $\mathcal{O}$-moduli coerenti su $\mathbb{P}^n_k$.*

4.5 Sotto schemi chiusi di $\mathbb{P}^n_k$ e ideali omogenei.

Ricordiamo (cf Sezione 3.3) la seguente definizione:

Definizione 4.24. *Un sotto schema chiuso X di $\mathbb{P}^n_k$ è (modulo isomorfismo) uno schema $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ tale che $|X| \subset \mathbb{P}^n_k$ sia un chiuso di $\mathbb{P}^n_k$ e tale che ci sia un morfismo suriettivo $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_X \to 0$ ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ in tutto questa sezione).*

Spesso si nota $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_k$ il morfismo di inclusione (è un'immersione chiusa) del sotto schema chiuso $X \subset \mathbb{P}^n_k$ e si nota $i_*(\mathcal{O}_X)$ il fascio $\mathcal{O}_X$, visto come $\mathcal{O}$-modulo. Noi noteremo semplicemente $\mathcal{O}_X$.

Se $X \subset \mathbb{P}^n_k$ è un sotto schema chiuso il ker del morfismo $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_X \to 0$ è un fascio di ideali di $\mathcal{O}$, indicato con $\mathcal{I}_X$ (per ogni aperto U, $\mathcal{I}_X(U)$ è un ideale di $\mathcal{O}(U)$).

Un fascio d'ideali è coerente. Infatti siccome $\mathbb{P}^n_k$ è noetheriano se $U = Spec(A)$ è un aperto affine, A è noetheriano e l'ideale $\Gamma(U, \mathcal{I}_X|U) = I \subset A$ è finitamente generato. Abbiamo una successione esatta di fasci coerenti:

$$0 \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_X \to 0 \tag{4.1}$$

Infatti siccome $\mathcal{I}_X, \mathcal{O}$ sono coerenti, anche $\mathcal{O}_X$ lo è.

Definizione 4.25. *Con le notazioni precedenti la successione (4.1) è la* successione di definizione *del sotto schema chiuso X.*

Vediamo adesso come associare un sotto schema chiuso ad ogni ideale omogeneo $I \subset S = k[x_0, ..., x_n]$.

Se $I \subset S = k[x_0, ..., x_n]$ è un ideale omogeneo, allora $\mathbb{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid I \subset \}$ è un chiuso, $|X|$, di $Proj(S) = \mathbb{P}^n_k$. Siccome $I \subset S$, abbiamo $I^\sim \subset \mathcal{O} = S^\sim$. In altre parole se applichiamo il funtore $-^\sim$ alla successione di S-moduli graduati:

$$0 \to I \to S \to S/I \to 0$$

otteniamo:

$$0 \to I^\sim \to \mathcal{O} \to (S/I)^\sim \to 0$$

Il fascio $(S/I)^\sim$ ha supporto su $|X|$ (cioè se $x \notin |X|$, $(S/I)^\sim_x = 0$) e definisce una struttura di spazio localmente anellato su $|X|$. Poniamo $(S/I)^\sim =: \mathcal{O}_X$. Abbiamo quindi uno spazio localmente anellato $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ e X è un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$. Si ha $I^\sim = \mathcal{I}_X$.

In altri termini il morfismo suriettivo $S \to S/I$ induce un'immersione chiusa $Proj(S/I) \hookrightarrow Proj(S)$ e $Proj(S/I)$ è (isomorfo) a $(|X|, \mathcal{O}_X)$.

Definizione 4.26. *Il sotto schema chiuso $X \subset \mathbb{P}^n_k$ è definito da l'ideale $I \subset S$ se $\mathcal{I}_X = I^\sim$.*

Attenzione:
1) Uno sotto insieme chiuso $|X| \subset \mathbb{P}^n_k$ può avere varie strutture di sotto schema chiuso. Ma, contrariamente a quanto succede nell'affine:
2) **Una stessa struttura di sotto schema chiuso può essere definita da diversi ideali $I \subset S$.**

Esempio 4.27. In $\mathbb{P}^1_k$ consideriamo il sotto insieme chiuso $|X| = \mathbb{V}(x_0) = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid x_0 \subset \mathfrak{p}\}$. Gli ideali primi non banali (non necessariamente omogenei) di $k[x_0, x_1]$ sono gli ideali massimali $(x_0 - a, x_1 - b)$ e gli ideali principali $(F(x_0, x_1))$, F irriducibile. Supponiamo $k = \overline{k}$. Se F è un polinomio omogeneo di grado d, allora F si scrive come un prodotto di forme lineari: $F(x_0, x_1) = \prod L_i(x_0, x_1)^{a_i}$, $\sum a_i = d$, $L_i(x_0, x_1) = \alpha_i x_0 + \beta_i x_1$. Questo per dire che $Proj(S)$ consiste nell'ideale (0) (punto generico) e negli ideali $\mathfrak{p} = (L(x_0, x_1))$, L forma lineare (punti chiusi). Quindi $|X|$ si riduce a un punto ($|X| = \{p\}, p = (0 : 1)$).

• Se $I = (x_0)$, il fascio $\mathcal{O}_X = (S/I)^\sim$ ha supporto sul punto p e la sua spiga in p è l'anello locale k (*fascio grattacielo* in p). Infatti $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_p/\mathcal{I}_{X,p}$, cioè stiamo facendo il quoziente dei germi in p con l'ideale dei germi che si annullano in p, cioè con l'ideale massimale di $\mathcal{O}_p$. Il quoziente è il campo residuo. (Osservare che $I_{((x_0))} = \{P/Q \mid P(p) = 0, Q(p) \neq 0, \deg P = \deg Q\}$, modulo le solite identificazioni).

• Se $I_1 = (x_0^2)$, allora $\mathbb{V}(I_1) = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid (x_0)^2 \subset \mathfrak{p}\}$ è ancora $|X|$, cioè il nostro punto p. Il fascio $(S/I_1)^\sim =: \mathcal{O}_{X_1}$ ha sempre supporto in p, ma la sua spiga in p è $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^2$, dove $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ è l'ideale massimale. Questo anello locale ha un elemento nilpotente corrispondente alla classe di x_0. Quindi i due schemi $(p, \mathcal{O}_X)$ e $(p, \mathcal{O}_{X_1})$ non sono isomorfi.

• Sia $J = (x_0^2, x_0x_1)$. Allora $\mathbb{V}(J)$ è ancora il nostro punto p. Infatti $J \subset \mathfrak{p} = (L)$, implica che la forma lineare L divida x_0^2, quindi $L = x_0$. Chi è il fascio $(S/J)^\sim = \mathcal{O}_Y$? Osserviamo che $I_d = J_d$ se $d \geq 2$. Quindi $I^\sim = J^\sim$. Pertanto i due schemi $(p, \mathcal{O}_X)$ e $(p, \mathcal{O}_Y)$ sono uguali

Per riassumere abbiamo tre sotto schemi di $\mathbb{P}^1_k$, X, X_1 e Y, tutti con lo stesso spazio topologico sotto giacente (il punto p), definiti da tre ideali diversi, inoltre $X = Y$, mentre $X \neq X_1$. Lo schema X_1 è il punto p *doppiato* in $\mathbb{P}^1$ (o *primo intorno infinitesimale* di p in $\mathbb{P}^1_k$). Guardando l'ideale J, vediamo che Y è l'intersezione di $Z = \{p, q\}$ con X_1, quindi $Y = p$ (come schema). Infatti per due sotto schemi chiusi X, Y lo schema intersezione è definito da $\mathcal{I}_{X \cap Y} = \mathcal{I}_X + \mathcal{I}_Y$.

La situazione è quindi un po' confusa e ci rimane da capire quando due ideali definiscono lo stesso schema.

Prima di tutto mostriamo che ogni sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$ può essere definito da un ideale omogeneo.

Proposizione 4.28. *Ogni sotto schema chiuso, X, di $\mathbb{P}^n_k$ può essere definito da un ideale omogeneo (per esempio $H^0_*(\mathcal{I}_X)$).*
Inoltre $H^0_*(\mathcal{I}_X)$ è il più grande ideale che definisce lo schema X.

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{I}_X$ è coerente, $(H^0_*(\mathcal{I}_X))^\sim \simeq \mathcal{I}_X$ (Proposizione 4.20). Quindi l'ideale $I = H^0_*(\mathcal{I}_X)$, definisce X.

Sia I un ideale che definisce X. Abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} I & \stackrel{i}{\to} & S \\ \alpha_I \downarrow & & \alpha_S \downarrow \\ H^0_*(I^\sim) & \to & H^0_*(S^\sim) \end{array}$$

Siccome α_S è un isomorfismo e i è iniettiva abbiamo che $\alpha_I : I \to H^0_*(\mathcal{I}_X)$ è iniettiva ($I^\sim = \mathcal{I}_X$, perché I definisce X). $\square$

Vale la pena soffermarsi un attimo sull'ultima affermazione. Sia I che definisce X e sia $P \in I_d$. Allora $P \in H^0(\mathcal{O}(d))$ e la sua immagine in $H^0(\mathcal{O}_X(d))$ è zero. Più precisamente se applichiamo il funtore $-^\sim$ alla successione

$$0 \to I \to S \to S/I \to 0$$

e prendiamo la coomologia otteniamo:

$$0 \to H^0_*(\mathcal{I}_X) \to H^0_*(\mathcal{O}) \to H^0_*(\mathcal{O}_X)$$

In grado d:

$$0 \to H^0(\mathcal{I}_X(d)) \to H^0(\mathcal{O}(d)) \stackrel{r_d}{\to} H^0(\mathcal{O}_X(d))$$

La mappa r_d non è necessariamente suriettiva (lo è se e solo se $H^1(\mathcal{I}_X(d)) = 0$). L'immagine di r_d è $(S_d/\mathbb{I}_d)$, dove $\mathbb{I} := H^0_*(\mathcal{I}_X)$. Il polinomio $P \in I_d \subset S_d = H^0(\mathcal{O}(d))$ ha un'immagine nulla in $H^0(\mathcal{O}_X(d))$, quindi $P \in \mathbb{I}_d$. L'applicazione r_d può essere interpretata come la *restrizione* a X dei polinomi omogenei di grado d; P si annulla *sullo schema* X (cioè anche come sezione del fascio $\mathcal{O}_X(d)$) se e solo se $r_d(P) = 0$.

Quindi se I definisce X, $I \subset \mathbb{I}$ fornisce $S/I \to S/\mathbb{I} \to 0$ e l'immagine di $S_d = H^0(\mathcal{O}(d))$ in $H^0(\mathcal{O}_X(d))$ è isomorfa a $S_d/\mathbb{I}_d$.

Ci sono sempre tanti ideali che definiscono lo stesso sotto schema chiuso X. Infatti se $\mathbb{I} = H^0_*(\mathcal{I}_X)$, allora ogni ideale $\mathbb{I}_{\geq d}$ definisce X. Cerchiamo di capire quando due ideali definiscono lo stesso X.

Definizione 4.29. *Sia I un ideale omogeneo, il saturato di I è $I^{sat} := \bigcup_{k\geq 1}(I : \mathfrak{m}^k) = \{P \in S \mid \forall i, \exists n$ t.c. $x_i^n P \in I\}$. L'ideale I si dice saturo se $I = I^{sat}$.*

Osservazione 4.30. (i) Osserviamo che I^{sat} è un ideale omogeneo. Infatti $I \subset (I : \mathfrak{m}) \subset \cdots \subset (I : \mathfrak{m}^k) \subset \cdots$, visto che S è noetheriano, esiste k tale che $I^{sat} = (I : \mathfrak{m}^k)$, quindi I^{sat} è un ideale. Inoltre se I, J sono ideali omogenei allora $(I : J)$ è omogeneo (perché se $P \in S$, $(I : P) = \{Q \in S \mid QP \in I\}$ è omogeneo e $(I : J) = \cap(I : P_i)$ dove $J = (P_1, ..., P_r)$).

Lemma 4.31. *Sia $I \subset S$ un ideale omogeneo. Allora $I \subset I^{sat}$ e $I_d = I^{sat}_d$ se $d >> 0$.*

Dimostrazione. Siccome $I^{sat} = (I : \mathfrak{m}^k)$ per un qualche k, è chiaro che $I \subset I^{sat}$. L'ideale I^{sat} è finitamente generato. Sia $\{G_j\}$ un sistema di generatori. Sia $m = \max\{\deg G_j\}$. Se $P \in I^{sat}_d$, allora $P = \sum P_j G_j$, $\deg P_j = d - \deg G_j \geq d - m$. Abbiamo $P_j = \sum a_I x_0^{i_0} ... x_n^{i_n}$, con $i_0 + \cdots i_n = \deg P_j \geq d - m$. Se $\deg P_j \geq (n+1)k$, allora esiste $i_t \geq k$ e $x_t^{i_t} G_j \in I$. Quindi per $d \geq (n+1)k + m$, abbiamo $I_d = I^{sat}_d$. □

Corollario 4.32. *(1) Se $X \subset \mathbb{P}^n_k$ è un sotto schema chiuso, l'ideale $H^0_*(\mathcal{I}_X)$ è saturo.*
(2) Due ideali omogenei, I, J, definiscono lo stesso sotto schema chiuso se e solo se $I^{sat} = J^{sat}$.

Dimostrazione. (1) Sia $\mathbb{I} := H^0_*(\mathcal{I}_X)$. Per il Lemma 4.31, $\mathbb{I}^\sim = (\mathbb{I}^{sat})^\sim$. Quindi $\mathbb{I}^{sat}$ definisce X. Siccome $\mathbb{I}$ è il più grande ideale che definisce X, $\mathbb{I}^{sat} \subset \mathbb{I}$. Quindi $\mathbb{I}^{sat} = \mathbb{I}$.
(2) Se I definisce X, allora $I^\sim = \mathcal{I}_X$ e per il Lemma 4.31, anche I^{sat} definisce X. Segue che $I^{sat} \subset \mathbb{I}$. D'altra parte visto che $I^\sim = \mathbb{I}^\sim$, $I_d = \mathbb{I}_d$ se $d >> 0$ (sono quasi isomorfi). Sia $P \in \mathbb{I}_t$. Per $m >> 0$, $x_i^m P \in \mathbb{I}_{m+t} = I_{m+t}$, quindi $P \in I^{sat}$. Pertanto $I^{sat} = \mathbb{I}$. □

Possiamo finalmente raccogliere il frutto del nostro lavoro:

Corollario 4.33. *Esiste una corrispondenza perfetta:*

$$\{ \text{ ideali omogeni saturi } \} \leftrightarrow \{ \text{ sotto schemi chiusi di } \mathbb{P}^n \}$$

(Naturalmente il vuoto corrisponde all'ideale massimale irrilevante $\mathfrak{m}$). Quindi tutto sommato un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$ non è una cosa così terribile!

Definizione 4.34. *Uno schema X è proiettivo su $\operatorname{Spec} k$ se è isomorfo a un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$ per un qualche n.*

Da quanto abbiamo fatto risulta che X su $Spec\, k$ è proiettivo se e solo se $X = Proj(A)$ per un qualche anello graduato A, con $A_0 = k$ e con A generato da A_1 come k-algebra.

Infatti se X è un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n$ e se $I = H^0_*(\mathcal{I}_X)$, abbiamo $X = Proj(S/I)$ ($S = k[x_0, ..., x_n]$).

Viceversa se A è un anello graduato con $A_0 = k$, generato da A_1 come k-algebra, allora A è un quoziente di un qualche anello di polinomi $S = k[x_0, ..., x_n]$. Se I è il ker di $S \to A \to 0$, allora X è isomorfo al sotto schema di $\mathbb{P}^n$ definito da I.

Esercizi.

Esercizio 35 ([6], II. Lemma 5.3)
Sia $X = Spec(A)$, $f \in A$ e $\mathcal{F} = M^\sim$ un fascio quasi-coerente.
(i) Se $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ è tale che la sua restrizione a $D(f)$ è zero, allora esiste $n > 0$ tale che $f^n s = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{F})$.
(ii) Sia $t \in \mathcal{F}(D(f))$, allora esiste n tale che $f^n t$ si estenda a una sezione globale di $\mathcal{F}$.

Osservazione: Assumendo $\mathcal{F} = M^\sim$ la dimostrazione del Lemma 5.3 è banale. Il punto è che, a priori, se $\mathcal{F}$ è quasi-coerente possiamo solo dire che esiste un ricoprimento di X con aperti affini $U_i = Spec(A_i)$ tali che $\mathcal{F}|U_i = M_i^\sim$. E' solo dopo avere dimostrato il Lemma 5.3 che possiamo dire che ogni fascio quasi-coerente è della forma $\mathcal{F} = M^\sim$, M un A-modulo ([6]II. Prop. 5.4, Corollary 5.5).

Esercizio 36 *Sia X uno schema e $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo.*
(i) $\mathcal{F}$ è generato dalle sezioni globali (si dice anche globalmente generato*) se e solo se esiste un morfismo suriettivo $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$.*
(ii) Se $\mathcal{F}$ è generato dalle sezioni globali e se $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$, allora $\mathcal{G}$ è generato dalle sezioni globali.
(iii) Se $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ sono globalmente generati, allora anche $\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$ e $\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}$ lo sono.
(iv) Se $\mathcal{F}$ è generato dalle sezioni globali e se $Y \subset X$ è un sotto schema chiuso, allora $\mathcal{F}|Y := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y$ è generato dalle sezioni globali.
(v) Sia $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0$ una successione esatta di $\mathcal{O}_X$-moduli. Si assume $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ generati dalle sezioni globali. Inoltre si assume l'applicazione indotta $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{H}(X)$ suriettiva. Mostrare che $\mathcal{F}$ è generato dalle sezioni globali.

Esercizio 37 *Scopo dell'esercizio è mostrare che su $\mathbb{P}^n_k$ il fascio $\mathcal{O}(a)$ è generato dalle sezioni globali se e solo se $a \geq 0$.*
(i) Si assume $a \geq 0$. Mostrare che ogni polinomio omogeneo, P, di grado a determina una sezione globale di $\mathcal{O}(a)$ (quindi $S_a \subset \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(a))$, vedremo poi che questa inclusione è un'uguaglianza).
(ii) Usando (i) mostrare che se $a \geq 0$, allora $\mathcal{O}(a)$ è generato dalle sezioni globali.
(iii) Sia $H \subset \mathbb{P}^n_k$ l'iperpiano di equazione $x_0 = 0$. Indichiamo con S_H il quoziente $S/(x_0) \simeq k[x_1, ..., x_n]$. Mostrare che si ha una successione esatta di moduli graduati

$$0 \to S(-1) \stackrel{x_0}{\to} S \to S_H \to 0$$

Dedurne una successione esatta di $\mathcal{O}^n_{\mathbb{P}}$-moduli:

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

Osservare che questa successione non è altro che la successione di "definizione" del sotto schema chiuso H di $\mathbb{P}^n$: $0 \to \mathcal{I}_H \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_H \to 0$ ($\mathcal{I}_H \simeq \mathcal{O}(-1)$).
(iv) Usando (iii) mostrare che $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-1)) = 0$ e poi che $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(a)) = 0$ se $a < 0$.

5

Coomologia.

Ci sono essenzialmente due modi di vedere la coomologia in geometria algebrica: la coomologia di Čech e la coomologia come funtore derivato (à la Grothendieck). La coomologia di Čech ha il vantaggio che, certe volte, si pososno "fare i conti". Il punto di vista di Grothendieck, più funtoriale è in generale preferibile. Per la coomologia di Čech rimandiamo a [6], III.4, per i funtori derivati a [4] e [6].

Qui ci limiteremo ad usare la coomologia come una macchina (automobile, lavatrice, computer ecc...). Nessuno o pochi sanno veramente cosa succede all'interno di una macchina ma c'è un'interfaccia semplice (pulsanti, pedali, icone ecc...) che ci permette di dare dei comandi e dopodiché avviene il risultato desiderato.

Nel nostro caso la cosa è molto semplice: ad ogni successione esatta di fasci di gruppi abeliani

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

la coomologia associa una *successione lunga di coomologia*

$$0 \to H^0(\mathcal{F}_1) \to H^0(\mathcal{F}_2) \to H^0(\mathcal{F}_3) \to H^1(\mathcal{F}_1) \to ...$$

$$...H^i(\mathcal{F}_1) \to H^i(\mathcal{F}_2) \to H^i(\mathcal{F}_3) \to ...$$

Questa associazione è funtoriale e la coomologia è un funtore additivo cioè $H^i(\bigoplus \mathcal{F}_j) = \bigoplus H^i(\mathcal{F}_j)$.

Questa successione termina (almeno nel nostro caso) in virtù del:

Teorema 5.1. (Grothendieck)
Sia X uno spazio topologico noetheriano di dimensione n. Per ogni fascio di gruppi abeliani su X, $H^i(\mathcal{F}) = 0$, se $i > n$.

Un'altra cosa da tenere presente: se X è una varietà algebrica (o uno schema) e se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo, allora i gruppi $H^i(X, \mathcal{F})$ sono degli

$H^0(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-moduli. Se X è una varietà algebrica (affine o proiettiva) è chiaro che $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ è un k-spazio vettoriale. Se X è uno schema su k, cioè con un morfismo $X \to Spec\, k$, allora abbiamo un morfismo $k \to H^0(X, \mathcal{O}_X)$ e quindi $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ è ancora un k-spazio vettoriale. Se X è una varietà affine di dimensione > 0, allora $\dim_k(H^0(X, \mathcal{O}_X)) = \infty$ (Esercizio 12). Nel caso proiettivo, non solo $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$, ma se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$ modulo coerente, $H^i(X, \mathcal{F})$ è un k-spazio vettoriale di dimensione finita per ogni i. Per vederlo useremo il seguente risultato che si dimostra con calcoli espliciti in coomologia di Čech ([6], III Thm. 5.1)

Teorema 5.2. *Sia $S = k[x_0, ..., x_n]$ e sia $\mathcal{O}(a)$ il fascio $S(a)^\sim$ su $\mathbb{P}^n$.*
i) Per $a \geq 0$, $H^0(\mathcal{O}(a)) = S_a$ (il k-spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado a). Se $a < 0$, $H^0(\mathcal{O}(a)) = 0$.
ii) $H^i(\mathcal{O}(a)) = 0$, se $0 < i < n$, $\forall a \in \mathbb{Z}$
iii) $H^n(\mathcal{O}(a)) \simeq H^0(\mathcal{O}(-a-n-1))^*$

Con questo abbiamo:

Proposizione 5.3. *Sia X una varietà proiettiva (o uno schema proiettivo) su k. Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo coerente, allora per ogni $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ è un k-spazio vettoriale di dimensione finita.*

Dimostrazione. Per definizione abbiamo un'immersione chiusa $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Se $\mathcal{F}$ è coerente su X, allora $i_*\mathcal{F}$ è coerente su $\mathbb{P}^n$ e la coomologia è la stessa. Possiamo quindi limitarci al caso $X = \mathbb{P}^n$.

Abbiamo una successione esatta: $0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$, dove $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}(a_i)$ (Lemma 4.19). Prendendo la coomologia:

$$\cdots \to H^i(\mathcal{E}) \to H^i(\mathcal{F}) \to H^{i+1}(\mathcal{R})$$

Adesso ragioniamo per induzione discendente. Se $i > n$, tutti i gruppi sono nulli (Teorema 5.1). Se $i = n$, $H^n(\mathcal{E})$ ha dimensione finita per il Teorema 5.2, $H^{n+1}(\mathcal{R}) = 0$ e quindi $H^n(\mathcal{F})$ ha dimensione finita. Sia $i < n$, allora $H^i(\mathcal{E})$ ha dimensione finita per il Teorema 5.2, $H^{i+1}(\mathcal{R})$ ha dimensione finita per ipotesi di induzione, pertanto $H^i(\mathcal{F})$ ha dimensione finita. □

Corollario 5.4. *Sia X una varietà proiettiva (o uno schema proiettivo integro) allora $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq k$.*

Dimostrazione. Esercizio 27. □

Si osserverà che esistono degli schemi proiettivi irriducibili X (di dimensione > 0) con $\dim_k(H^0(X, \mathcal{O}_X)) > 1$ (Esercizio 40).

Esercizi.

Esercizio 38 *Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su $\mathbb{P}^n$. Mostrare che esiste n_0 (dipendente da $\mathcal{F}$) tale che $H^i(\mathcal{F}(n)) = 0$ se $n \geq n_0$ e $i > 0$.*

Esercizio 39 *Scopo dell'esercizio è di calcolare in modo "elementare" la coomologia dei fasci $\mathcal{O}(a)$ su $\mathbb{P}^1$ assumendo solo $h^1(\mathcal{O}) = 0$.*
(i) Se $x \in \mathbb{P}^1$ è un punto abbiamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

dove $Z = \{x\}$ (il punto x è un iperpiano, cf Esercizio 37). Si ha $\mathcal{O}_Z \simeq k$ (fascio grattacielo in x). Dedurre che $h^1(\mathcal{O}(-1)) = 0$ e poi che $h^1(\mathcal{O}(a)) = 0$ se $a \geq -1$.
(ii) Mostrare che $h^0(\mathcal{O}(a)) = a + 1$ se $a \geq 0$. Quindi $H^0(\mathcal{O}(a)) = S_a$ (cf Esercizio 37).
(iii) Se $a < 0$ sappiamo già che $h^0(\mathcal{O}(a)) = 0$ (Esercizio 37). Mostrare che $h^1(\mathcal{O}(a)) = -a - 1$ se $a \leq -2$.

Esercizio 40 *Sia $I \subset S = k[x, y, u, v]$, $I = (x^2, y^2, xy, xu - yv)$. Sia $X \subset \mathbb{P}^3$ il sotto schema chiuso definito da I.*
1) Determinare $|X|$, lo spazio topologico sotto giacente. Concludere che X è irriducibile, di dimensione uno (X è una curva).
2) Mostrare che X non è ridotto.
3) Sia H il piano $v = 0$, determinare $X \cap H$ (X è una curva di grado due)
4) Mostrare che $h^0(X, \mathcal{O}_X) > 1$ (hint: In S/I, $xu = yv$. Se $u, v \notin \mathfrak{p}$, allora $x/v = y/u$ in $(S/I)_{(\mathfrak{p})}$. Se $u \in \mathfrak{p}$, ma $v \notin \mathfrak{p}$, allora $x/v \in (S/I)_{(\mathfrak{p})}$. Idem se $v \in \mathfrak{p}$, ma $u \notin \mathfrak{p}$. Se $u, v \in \mathfrak{p}$... Concludere che $x/v = y/u \in H^0(\mathcal{O}_X)$).

6

Fasci localmente liberi.

I fasci localmente liberi sono gli analoghi dei fibrati vettoriali della geometria differenziale.

Definizione 6.1. *Sia X uno schema noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ modulo coerente. Si dice che $\mathcal{F}$ è* localmente libero *(di rango finito) se esiste un ricoprimento aperto di X, $\cup U_i$, tale che $\mathcal{F}|U_i \simeq r.\mathcal{O}_{U_i}$ (r può dipendere da U_i)*

Qui $r.\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_U \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_U$ (r addendi).

Definizione 6.2. *Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo sullo schema X e se $x \in X$, la* fibra vettoriale *(o fibra) di $\mathcal{F}$ in x è $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \simeq \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x.\mathcal{F}_x$.*

Se $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango r (cioè r è costante nella Definizione 6.1) allora per ogni $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_x$-modulo libero di rango r e $\mathcal{F}(x)$ è un $k(x)$-spazio vettoriale di dimensione r.

Si può mostrare che $\mathcal{F}$ è localmente libero se e solo se $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo libero per ogni $x \in X$ (Esercizio 41).

Sia $\varphi(x) := \dim_{k(x)} \mathcal{F}(x)$. La funzione $\varphi(x)$ è semi-continua superiormente (Esercizio 42). Inoltre se X è integro e se $\varphi(x)$ è costante, allora $\mathcal{F}$ è localmente libero (Esercizio 43).

Sia X uno schema integro, noetheriano e sia ξ il suo punto generico. Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo coerente il *rango* di $\mathcal{F}$ è $\dim_{k(\xi)} \mathcal{F}(\xi)$. Qui $k(\xi) = K$, il campo delle funzioni razionali su X. Quindi $\mathcal{F}_\xi$ è un $\mathcal{O}_\xi$-modulo libero ($\mathcal{O}_\xi = K$) e pertanto esiste un aperto U tale che $\mathcal{F}|U$ sia localmente libero di rango r. Osservare che il rango di un fascio coerente è finito (Esercizio 44).

Definizione 6.3. *Sia X uno schema integro, noetheriano. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due $\mathcal{O}_X$-moduli localmente liberi e sia $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morfismo. Per ogni $x \in X$ il* *morfismo f induce $f(x) : \mathcal{F}(x) \to \mathcal{G}(x)$. Il morfismo φ è* iniettivo fibrati *(resp. suriettivo fibrati) se $f(x)$ è iniettivo (risp. suriettivo) per ogni $x \in X$. Più generalmente f è un* morfismo di fibrati *se $f(x)$ ha rango costante al variare di x in X.*

Questa terminologia viene dalla geometria differenziale. Se f è un morfismo di fibrati allora $ker(f)$ e $Im(f)$ sono localmente liberi.

Un morfismo suriettivo di fasci $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tra due fasci localmente liberi è sempre suriettivo fibrati e quindi il ker è localmente libero. Un morfismo iniettivo di fasci non è sempre iniettivo fibrati, quindi il coker non è necessariamente localmente libero (Esercizio 46).

Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X. Per ogni aperto $U \subset X$, $Hom(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$ ha una struttura naturale di gruppo abeliano (attenzione: *non* stiamo considerando $Hom(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$). L'assegnazione $U \to Hom(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$ definisce un fascio di gruppi abeliani su X. Questo fascio viene notato $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Se X è uno schema e se $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono $\mathcal{O}_X$-moduli, il fascio $\mathcal{H}om$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo e viene notato $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (o anche $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ se non c'è rischio di confusione). Attenzione, in generale $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \neq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$!

Definizione 6.4. *Sia X uno schema e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo. Il fascio* duale *di $\mathcal{F}$ è $\mathcal{F}^* := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Si nota anche $\mathcal{F}^\vee$ invece di $\mathcal{F}^*$.*

Se $\mathcal{E}$ è un modulo localmente libero di rango r allora chiaramente $\mathcal{E}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ è localmente libero di rango r. Inoltre per ogni modulo $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}$.

Definizione 6.5. *Sia X uno schema. Un $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{F}$ è invertibile se esiste un $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \simeq \mathcal{O}_X$.*

Si dimostra che $\mathcal{F}$ è invertibile se e solo se $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango uno (prendere $\mathcal{G} = \mathcal{F}^\vee$, Esercizio 45). Su $\mathbb{P}^n$ i fasci $\mathcal{O}(a)$ sono invertibili (si può mostrare che sono tutti e quanti i fasci invertibili su $\mathbb{P}^n$).

Esercizi.

Esercizio 41 ([6] II. Ex. 5.7)
Sia X uno schema noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ modulo coerente.
1) Mostrare che se $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_x$ modulo libero di rango r, allora esiste un intorno aperto di x, U, tale che $\mathcal{F}|U \simeq r.\mathcal{O}_U$
2) Concludere che $\mathcal{F}$ è localmente libero $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_x$-modulo libero per ogni $x \in X$.

Esercizio 42 ([6] II. Ex. 5.8)
Sia X uno schema noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo coerente. Si pone $\varphi(x) = \dim \mathcal{F}(x)$, dove $\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$ è la fibra ridotta *(o vettoriale) di $\mathcal{F}$ in x.*
Mostrare che φ è semi-continua superiormente, cioè se $\dim \mathcal{F}(x) = r$, esiste un intorno aperto U di x tale che $\dim \mathcal{F}(y) \leq r, \forall y \in U$.

Esercizio 43 ([6] II. Ex. 5.8)
Si riprendono le notazioni dell'Esercizio 42. Mostrare che se X è ridotto e se $\varphi(x)$ è costante allora $\mathcal{F}$ è localmente libero.

In particolare se $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ è una successione esatta di $\mathcal{O}_X$-moduli coerenti, dove $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono localmente liberi, allora anche $\mathcal{F}$ è localmente libero.

Esercizio 44 *Sia X uno schema integro, noetheriano. Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo coerente, il* rango *di $\mathcal{F}$ è $\dim_{k(\xi)} \mathcal{F}_\xi$, dove ξ è il punto generico di X.*
1) Mostrare che il rango di un modulo coerente è finito. Se $\mathcal{F}$ ha rango r esiste un aperto non vuoto $U \subset X$ tale che $\mathcal{F}|U$ sia localmente libero di rango r.
2) Il modulo coerente $\mathcal{F}$ è detto di torsione *se $Supp(\mathcal{F}) \neq X$. Mostrare che: $\mathcal{F}$ è di torsione $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ ha rango zero.*

Esercizio 45 *(i) Sia E un k-spazio vettoriale di dimensione uno. Mostrare che $f : E \otimes E^* \to k : v \otimes \varphi \to \varphi(v)$ è un isomorfismo ("canonico").*
(ii) Sia X uno schema e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo. Mostrare che $\mathcal{F}$ è invertibile se e solo se $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango uno.
(iii) Mostrare che su $\mathbb{P}^n$ i fasci $\mathcal{O}(a)$ sono invertibili.

Esercizio 46 *Sia X uno schema integro, noetheriano e siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due $\mathcal{O}_X$-moduli localmente liberi.*
(i) Se $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è suriettivo allora è anche suriettivo fibrati. Se f è un morfismo di fibrati allora $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono localmente liberi.
(ii) Dare un esempio (su $X = \mathbb{P}^1$) di un morfismo iniettivo tra due fasci localmente liberi, dello stesso rango, che non sia iniettivo fibrato.

Parte II

Il teorema di Riemann-Roch per le curve proiettive.

7

Curve proiettive.

7.1 Curve proiettive non singolari: generalità.

Prima di tutto cos'è una curva proiettiva liscia, irriducibile?

Dal punto di vista "classico" C è una curva proiettiva liscia, irriducibile se $C \subset \mathbb{P}^n$, per un qualche n, è un insieme algebrico irriducibile, di dimensione uno, non singolare. Quindi se $\mathbb{I}(C)$ indica l'ideale di <u>tutti</u> i polinomi omogenei che si annullano su C, $\mathbb{I}(C)$ è un ideale primo. Inoltre se $S(C) = S/\mathbb{I}(C)$ è l'anello delle coordinate di C, il campo delle funzioni razionali di C è $K(C) = S(C)_{((0))}$. Dire che C ha dimensione uno significa che $k(C)$ è un'estensione algebrica finita di $k(X)$, il campo delle funzioni razionali in una variabile, oppure che $\dim S(C) = 2$ (dimensione di Krull). Finalmente C è non singolare se è verificato il criterio jacobiano: se $(F_1, ..., F_r)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{I}(C)$, allora la matrice jacobiana $(\partial F_i/\partial x_j)$ ha rango $n-1$ ad ogni punto di C ([6], I. Ex. 5.8). Un'altra definizione più intrinseca: C è non singolare se per ogni $x \in C$, $\mathcal{O}_{C,x}$ è un anello locale regolare di dimensione uno (cioè $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$).

Queste proprietà sembrano dipendere dall'immersione $C \subset \mathbb{P}^n$, ma non lo sono. Il fatto di essere irriducibile, di dimensione uno è una questione topologica. Il fatto di essere non singolare dipende solo dal fascio $\mathcal{O}_C$, il quale non dipende dall'immersione $C \subset \mathbb{P}^n$.

Dal punto di vista delle varietà di Serre la nostra curva C è lo spazio annellato $(C, \mathcal{O}_C)$.

Dal punto di vista degli schemi C è il sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n = Proj(S)$ definito da $\mathbb{I}(C)$ (quindi $\mathbb{I}(C)^\sim = \mathcal{I}_C$). Questo definisce uno schema $(C, \mathcal{O}_C)$, proiettivo, integro, separato, noetheriano su k. E' l'immagine tramite il funtore t della varietà C.

Finalmente c'è un altro modo di costruire delle curve che risale a Dedekind-Weber. Sia K un'estensione finita di $k(X)$ (K è un *function field of dimension* *one*). Si cerca di costruire, in modo algebrico, una curva proiettiva liscia, C_K, con campo delle funzioni razionali isomorfo a K. Per questo si considerano tutte le valutazioni *discrete* di K/k, cioè le $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$ tali che $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$; $\nu(x+y) \geq min\{\nu(x), \nu(y)\}$ e $\nu(\lambda) = 0, \forall \lambda \in k^*$.

Per una tale valutazione $\{x \mid \nu(x) \geq 0\}$ è un anello locale di ideale massimale $\{x \mid \nu(x) > 0\}$. Sia C_K l'insieme degli anelli di valutazione discreta di K/k, allora si può definire su C_K una struttura di curva proiettiva tale che $k(C_K) \simeq K$ (vedere [6], I.6).

Fino alla fine di questa sezione: curva = curva proiettiva, non singolare, irriducibile.

7.2 L'anello locale in un punto di una curva.

Sia C una curva liscia non singolare e sia $x \in C$. L'anello locale $\mathcal{O}_{C,x} =: \mathcal{O}_x$ è un anello locale, noetheriano, regolare di dimensione uno ($\dim_k \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = 1$). Se $f_x \in \mathcal{O}_x$ è tale che $\overline{f}_x$ sia una base del k spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, allora $\mathfrak{m}_x = (f_x)$. Ogni elemento $a \in \mathcal{O}_x$ si scrive, in modo unico, $a = uf_x^n$, dove u è invertibile e $n \in \mathbb{N}$. Si pone $\nu_x(a) = n$. Si dice che f_x è un *parametro locale*. In particolare $\mathcal{O}_x$ è un P.I.D. (Esercizio 47).

Il campo dei quozienti dell'anello integro $\mathcal{O}_x$ è $k(f_x) \simeq k(C)$, dove $k(C)$ è il campo delle funzioni razionali su C. Se $h \in k(C)$, allora $h \in \mathcal{O}_x$ o $1/h \in \mathcal{O}_x$. Quindi h si scrive in modo unico $h = f_x^k.g_x$, dove g_x è invertibile e dove $k \in \mathbb{Z}$. Si pone $\nu_x(h) = k$. Abbiamo quindi $\nu_x : k(C)^* \to \mathbb{Z} : h \to \nu_x(h)$. Se $\nu_x(h) = n$, allora se $n > 0$, h ha uno zero di ordine n in x; se $n < 0$, h ha un polo di ordine $-n$ (se $n = 0$, h è regolare e non si annulla in x).

Osserviamo che ν_x è una valutazione discreta di $k(C)/k$ e si ricupera l'anello locale $\mathcal{O}_x$ come $\{h \mid \nu_x(h) \geq 0\}$ (l'ideale massimale è $\{h \mid \nu_x > 0\}$). Questo giustifica la definizione di C_K data sopra.

7.3 Morfismi tra curve non singolari, morfismi finiti.

Sia $f : X \to Y$ un morfismo non costante tra due curve proiettive irriducibili, non singolari. Siccome $f(X)$ è un chiuso irriducibile, il morfismo è suriettivo e induce $k(Y) \subset k(X)$ (per composizione con f). Questa estensione è finita, diciamo di grado d. Se $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ è un chiuso proprio di X. Quindi $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_r\}$. Vogliamo mostrare che per y generico $r = d$, meglio se contati con molteplicità i punti nella fibra $f^{-1}(y)$ sono sempre d, $\forall y \in Y$ ("f è un rivestimento finito di grado d, ramificato").

Bisogna prima contare i punti di $f^{-1}(y)$ con molteplicità. Sia $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_{Y,y}$. Abbiamo $\mathcal{O}_y \subset k(Y) \subset k(X)$. Inoltre $\mathcal{O}_y$ è contenuto in $\widetilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O}_{x_1} \cap ... \cap \mathcal{O}_{x_r}$. Infatti il morfismo f induce $\mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ e quindi per ogni i: $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_{x_i}$ ("f trasforma funzioni regolari in funzioni regolari"). La struttura di $\widetilde{\mathcal{O}}$ è data dal seguente teorema, molto plausibile e che non dimostreremo:

Teorema 7.1. *L'anello $\widetilde{\mathcal{O}}$ è un P.I.D. con un numero finito di ideali primi. Se t_i è un parametro locale in x_i, allora ogni $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$, $u \neq 0$, si scrive in modo unico: $u = t_1^{m_1}...t_r^{m_r}.v$, v invertibile, $m_i = \nu_{x_i}(u)$.*

Se $t \in \mathcal{O}_y$ è un parametro locale in y (cioè un'equazione locale del punto y in Y), allora $t \in \mathcal{O}_y \subset \widetilde{\mathcal{O}}$ e quindi $t = t_1^{m_1}...t_r^{m_r}.v$. L'intero m_i è la molteplicità con la quale il punto x_i compare nella fibra $f^{-1}(y)$. Poniamo $f^*(y) = \sum m_i x_i$ (come divisore su X). Allora $\deg(f^*(y)) = \sum m_i$.

Conviene adesso introdurre una classe importante di morfismi:

Definizione 7.2. *Un morfismo $f : X \to Y$ è* finito *se esiste un ricoprimento V_i di Y con aperti affini tale che $U_i = f^{-1}(V_i)$ sia affine e tale che $\mathcal{O}(U_i)$ sia un $\mathcal{O}(V_i)$-modulo finitamente generato.*

Vedere [6], II, p. 84. Questa definizione è valida sia nell'ambito delle varietà che in quello degli schemi.

Abbiamo:

Proposizione 7.3. *Un morfismo non costante $f : X \to Y$ tra due curve proiettive, non sinogolari, irriducibili è un morfismo finito.*

Più precisamente:

Teorema 7.4. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo non costante tra due curve proiettive, non singolari, irriducibili. Il morfismo f induce $k(Y) \subset k(X)$, estensione finita. Sia $d = [k(X) : k(Y)]$. Sia $y \in Y$ e sia $f^*(y) = \sum m_i x_i$ il divisore associato. Allora $\sum m_i = d$ (cioè ogni fibra di f consta di d punti, contati con molteplicità).*

Dimostrazione. Vedere l'Appendice 12. □

L'intero d si chiama il *grado* del morfismo f. Le ipotesi di non singolarità sono essenziali.

Esercizi.

Esercizio 47 *Sia* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *un anello locale, noetheriano, regolare di dimensione uno; cioè* $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ *(*$\dim A$ *è la dimensione di Krull).*
1) Mostrare che $\mathfrak{m}$ *è principale:* $\mathfrak{m} = (f)$.
2) Mostrare che ogni elemento $a \in A$ *si scrive* $a = uf^n$*, dove* $n \in \mathbb{N}$ *e dove* u *è invertibile.*
3) Mostrare che f *non è nilpotente. Concludere che* A *è integro e che la scrittura* $a = uf^n$ *di 2) è unica.*
4) Concludere che A *è un P.I.D.*

Per il teorema di struttura dei moduli su un P.I.D., ogni A*-modulo* M *finitamente generato è della forma* $M = A^n \oplus T$ *dove* T *è il sotto modulo di torsione di* M*. In particolare* M *è libero* $\Leftrightarrow M$ *è senza torsione.*

Esercizio 48 *Sia* $f : X \to Y$ *un morfismo tra due curve proiettive non singolari.*
(i) Mostrare che f *è o costante o suriettiva. Osservare che* f *è chiusa.*
(ii) Se f *ha grado uno, allora* f *è un isomorfismo.*

8

Struttura dei fasci coerenti su una curva proiettiva liscia.

8.1 Sotto-modulo di torsione.

Sia A un anello integro e sia M un A-modulo. Un elemento $m \in M$ è detto di torsione se esiste $a \in A, a \neq 0$ tale che $am = 0$. Sia $T(M) = \{m \in M \mid m$ è di torsione$\}$. Si verifica facilmente che $T(M)$ è un sotto-modulo di M.

Definizione 8.1. *Con le notazioni precedenti $T(M)$ è il sotto-modulo di torsione di M.*

Si verifica che il modulo quoziente $M/T(M)$ è senza torsione (Esercizio 49).

Si dimostra poi che $T(M)$ è il nucleo dell'applicazione naturale $\mu : M \to M^{**}$ (M^{**} è il bi-duale di M) (Esercizio 49). Quindi M è senza torsione se e solo se μ è iniettiva. Se μ è un isomorfismo si dice che M è *riflessivo*.

Osservazione 8.2. Se A non è integro, la nozione di elemento di torsione non è chiara. Si può dire che m è di torsione se esiste $a \in A$ non divisore dello zero tale che $am = 0$, ma in questo caso $T(M)$ non è necessariamente un A-modulo.

8.2 Sotto fascio di torsione, fasci di torsione.

Sia X uno schema integro, noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo coerente.

Definizione 8.3. *Il sotto fascio di torsione di $\mathcal{F}$, $T(\mathcal{F})$ è il nucleo del morfismo naturale $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$.*

Il fascio $T(\mathcal{F})$ è coerente (nucleo di un morfismo di fasci coerenti) e $T(\mathcal{F})_x = T(\mathcal{F}_x)$. Il fascio quoziente $\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ è senza torsione.

Definizione 8.4. *Il fascio* $\mathcal{F}$ è di torsione *se* $Supp(\mathcal{F}) \neq X$.

Se $\mathcal{F}$ è di torsione allora $T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Attenzione a non confondere fascio *con* torsione con fascio *di* torsione.

Osservazione 8.5. Siccome X è integro sappiamo che per ogni fascio coerente esiste un aperto non vuoto U tale che $\mathcal{F}|U$ sia localmente libero di rango r. Se $r > 0$, $\mathcal{F}|U$ è senza torsione e $Supp(\mathcal{F}) = X$. Quindi $\mathcal{F}$ è di torsione se e solo se ha rango zero.

8.3 Struttura dei fasci coerenti su una curva proiettiva liscia.

Sia C una curva proiettiva non singolare e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_C$-modulo coerente. Se $\mathcal{F}$ è senza torsione (i.e. $T(\mathcal{F}) = 0$) allora per ogni $x \in C$, $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_{C,x}$-modulo senza torsione. Siccome $\mathcal{O}_{C,x}$ è un P.I.D., $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_x$-modulo libero. Segue che $\mathcal{F}$ è localmente libero.

Se $\mathcal{F}$ ha torsione abbiamo una successione esatta:

$$0 \to T(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/T(\mathcal{F}) \to 0 \quad (+)$$

Il fascio $\mathcal{E} := \mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ è senza torsione e per quanto appena visto è localmente libero.

Il fascio $T(\mathcal{F})$ è di torsione, quindi $Supp(T(\mathcal{F}) = \{p_1, ..., p_r\}$. Nel punto p_i abbiamo (per il teorema di struttura dei moduli su un P.I.D.): $\mathcal{F}_{p_i} = r.\mathcal{O}_{p_i} \oplus T(\mathcal{F})_{p_i}$. Segue che $T(\mathcal{F})$ è fattore diretto in $\mathcal{F}$ e la successione (+) è spezzata: $\mathcal{F} \simeq \mathcal{E} \oplus T(\mathcal{F})$. In conclusione:

Proposizione 8.6. *Sia* $\mathcal{F}$ *un fascio coerente sulla curva* C*, allora* $\mathcal{F} \simeq \mathcal{E} \oplus T(\mathcal{F})$*, dove* $\mathcal{E}$ *è localmente libero di rango* r *(= il rango di* $\mathcal{F}$*).*

In particolare $\mathcal{F}$ *è localmente libero se e solo se è senza torsione.*

Osservazione 8.7. La Proposizione precedente non è più vera su uno schema di dimensione > 1. Per esempio su $\mathbb{P}^2$ esistono dei fasci senza torsione che non sono localmente liberi (Esercizio 50).

L'ipotesi di non singolarità è essenziale.

Esercizi.

Esercizio 49 *Sia A un anello integro e sia M un A-modulo finitamente generato. Un $m \in M$ è di torsione se $Ann(m) \neq 0$ (cioè esiste $a \neq 0, a \in A$ tale che $am = 0$). Sia $T(M)$ l'insieme degli elementi di M di torsione.*
1) Mostrare che $T(M)$ è un sotto modulo di M. Se $T(M) = 0$, si dice che M è senza torsione.
2) Mostrare che $M/T(M)$ è senza torsione.
3) Mostrare che $T(M)$ è il nucleo dell'applicazione $\psi : M \to M \otimes_A K$, dove K è il campo dei quozienti di A e dove ψ è ottenuta tensorizzando con M l'inclusione $A \hookrightarrow K$.
4) Se N è un A-modulo finitamente generato, senza torsione, allora N è un sotto modulo di un modulo libero di tipo finito.
5) Sia $M^* = Hom_A(M, A)$. Mostrare che $T(M)$ è il nucleo dell'applicazione naturale $\mu : M \to M^{**}$.
6) Un A-modulo M è di torsione *se ogni elemento $m \in M$ è di torsione (cioè $T(M) = M$), invece M* ha torsione *se $T(M) \neq 0$. Il modulo M è* riflessivo *se $\mu : M \to M^{**}$ è biiettiva. Dare degli esempi di moduli di torsione, con torsione ma non di torsione, riflessivi.*

Esercizio 50 *1) Sia X uno schema integro, noetheriano. Sia $Z \subset X$ un sotto schema chiuso. Abbiamo:*

$$0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

Mostrare che $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X) = 0$ (hint: dualizzare la successione esatta).
2) Un fascio d'ideali è senza torsione. In particolare se $Z \subset C$ è un sotto schema chiuso della curva liscia C, $\mathcal{I}_Z$ è localmente libero di rango uno.
3) Sia $p \in \mathbb{P}^2_k$. Si ammetterà che $\mathcal{H}om(\mathcal{I}_p, \mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Concludere che $\mathcal{I}_p$ è senza torsione ma non riflessivo, quindi non localmente libero.

9

Il teorema di Riemann-Roch.

9.1 Divisori.

Come al solito C indica una curva proiettiva, liscia, irriducibile su un campo k.

Definizione 9.1. *Un divisore di Weil sulla curva C è una somma (finita) $D = \sum_i n_i P_i$, dove $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in C$. Il grado del divisore è* $\deg(D) := \sum_i n_i$. *Il divisore è* effettivo *se $n_i \geq 0, \forall n_i$.*

Vogliamo associare un divisore a una funzione razionale su C.

Come già detto se h è una funzione razionale su C e $x \in C$, allora $h \in \mathcal{O}_x$ o $1/h \in \mathcal{O}_x$ e quindi possiamo scrivere $h = f_x^k g_x$, $k \in \mathbb{Z}$, dove f_x è un parametro locale in x e dove g_x è invertibile. Si pone $\nu_x(h) = k$. Il divisore della funzione razionale h è $(h) = \sum_{x \in C} \nu_x(h).x$. Se $h \neq 0$, questa somma è finita. Possiamo scrivere $(h) = (h)_0 - (h)_\infty$, dove $(h)_0, (h)_\infty$ sono effettivi (il divisore degli zeri meno quello dei poli).

La funzione razionale h definisce un morfismo $\tilde{h} : C \to \mathbb{P}^1$ (si mandano i poli sull'infinito). Siccome l'immagine è un chiuso irriducibile e siccome il morfismo non è costante, il morfismo è suriettivo, si tratta quindi di un morfismo finito, di grado $d = [k(C) : k(\mathbb{P}^1)]$. Segue che per ogni punto $y \in \mathbb{P}^1$, $\#(\tilde{h}^{-1}(y)) = d$ (contati con molteplicità). Quindi $\deg(h)_0 = \#(\tilde{h}^{-1}(0)) = \deg(h)_\infty = \#(\tilde{h}^{-1}(\infty))$. In conclusione:

Lemma 9.2. *Il divisore di una funzione razionale ha grado zero.*

Definizione 9.3. *Due divisori D, D' sono* linearmente equivalenti *se la loro differenza è il divisore di una funzione razionale: $D - D' = (h)$.*
Due divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado.

Definizione 9.4. *Il gruppo delle classi, $Cl(X)$, è il gruppo dei divisori modulo equivalenza lineare.*
Un divisore è principale *se è il divisore di una funzione razionale. Quindi $Cl(X)$ è isomorfo a $Div(X)$ modulo i divisori principali.*

Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla curva proiettiva liscia X. Sia $g_1 \in \mathfrak{m}_{P_1} \subset \mathcal{O}_{X,P_1}$ un'equazione locale del punto P_1. Prendiamo un rappresentante del germe di g_1: (U_1, g_1). Quindi U_1 è un aperto contenente P_1 e g_1 è una funzione razionale definita su U_1 ($g_1 \in \mathcal{O}(U_1)$), che si annulla in P_1. In particolare g_1 è una funzione razionale su X. Inoltre $div(g_1^{n_1})$ è un divisore della forma $n_1P_1 + \sum m_j Q_j$, $Q_j \neq P_1$. Quindi D e $div(g_1^{n_1})$ differiscono al più nei punti $P_i, i > 1, Q_j$ e quindi coincidono sull'aperto complementare al chiuso costituito dall'unione finita dei $P_i, i > 2, Q_j$.

Questo mostra che $\forall x \in X$, esiste un aperto U_x contenente x e una funzione razionale (non nulla), g_x, tale che $div(g_x) = D$ su U_x. Siccome X è quasi compatto (per la topologia di Zariski) si può ottenere un ricoprimento finito $X = \cup U_i$ e delle funzioni razionali f_i tali che: $div(f_i) = D$ su U_i. Su $U_i \cap U_j$ abbiamo $div(f_i/f_j) = div(f_i) - div(f_j) = D| - D| = 0$. Quindi f_i/f_j è regolare su U_{ij} (niente poli) e non si annulla (niente zeri). Cioè $f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ ($\mathcal{O}^*(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f$ non si annulla su $U\}$).

Definizione 9.5. *Un divisore di Cartier su C consiste nei seguenti dati: un ricoprimento aperto di C, $\cup U_i$ e per ogni aperto U_i, una funzione razionale non identicamente nulla su U_i, tale che $f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$.*

Quindi ad ogni divisore di Weil possiamo associare un divisore di Cartier. Un divisore di Cartier è principale se è il divisore di una funzione razionale ($f_i = f, \forall i$); due divisori di Cartier sono linearmente equivalenti se la loro differenza è un divisore principale. Il gruppo delle classi dei divisori di Cartier è $CaCl(C)$. Si mostra poi che $Cl(C) \simeq CaCl(C)$.

9.2 Il fascio invertibile associato a un divisore.

Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla nostra curva C. A D corrisponde un divisore di Cartier (U_i, f_i). Adesso a questo divisore di Cartier associamo un fascio $\mathcal{O}_C(D)$ (o più semplicemente $\mathcal{O}(D)$) nel modo seguente:

$$\mathcal{O}(D)(U_i) = \{h/f_i \mid h \in \mathcal{O}(U_i)\} \subset K(U_i)$$

A priori questo definisce $\mathcal{O}(D)$ solo sugli aperti U_i, ma (U_i) è un ricoprimento, quindi se V è un aperto qualsiasi, $\mathcal{O}(D)(V) = \{f \in K(V) \mid f|V \cap U_i = h_i/f_i, h_i \in \mathcal{O}(V \cap U_i)\}$. In altri termini $\mathcal{O}(D)$ è il sotto $\mathcal{O}_C$-modulo di $\mathcal{K}$

generato da f_i^{-1} su U_i ($\mathcal{K}$ il fascio delle funzioni razionali). Osservare che, essendo C irriducibile, $\mathcal{K}$ è il fascio costante K: $\mathcal{K}(U) = K(U) = K$. Anche qui si verifica che divisori di Cartier equivalenti definiscono fasci isomorfi.

Definizione 9.6. *Con le notazioni precedenti $\mathcal{O}(D)$ è il fascio associato al divisore D.*

Abbiamo:

Lemma 9.7. *Per ogni divisore D su X abbiamo un isomorfismo di k-spazi vettoriali: $H^0(\mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$, dove $\mathcal{L}(D) = \{f \in K(X)^* \mid div(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$.*

Dimostrazione. Sia (U_i, f_i) il divisore di Cartier associato a D. Una sezione globale di $\mathcal{O}(D)$ (se esiste) è sostanzialmente una funzione razionale g tale $g|U_i = h_i/f_i, h_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Quindi $div(g|U_i) = div(h_i) - div(f_i)$. Per definizione $div(f_i) = D|U_i$. Quindi $div(g|U_i) + D|U_i = div(h_i) \geq 0$, perché $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Siccome questo è vero per ogni i, $div(g) + D \geq 0$ e $g \in \mathcal{L}(D)$.

Viceversa se $f \in \mathcal{L}(D)$ non nulla, allora, se $h_i = f|U_i f_i$, abbiamo $div(h_i) = div(f|U_i) + div(f_i) = (div(f) + D)|U_i \geq 0$. Quindi $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$ e $f|U_i = h_i/f_i$, cioè $f \in H^0(\mathcal{O}(D))$. □

Lemma 9.8. *Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla curva X.*

1. *Il fascio $\mathcal{O}(D)$ è invertibile*
2. *$\mathcal{O}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)^*$.*
   In particolare $\mathcal{O}(-D) \simeq \mathcal{O}(D)^* = \mathcal{H}om(\mathcal{O}(D), \mathcal{O})$.
3. *$D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}(D_1) \simeq \mathcal{O}(D_2)$.*

Dimostrazione. (1) Il fascio $\mathcal{O}|U_i$ è generato da 1, quindi $\mathcal{O}|U_i \to \mathcal{O}(D)|U_i : 1 \to 1/f_i$ è un isomorfismo. (Se preferite per ogni aperto $V \subset U_i$, $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(D)(V) : g \to g/f_i$ definisce l'isomorfismo di cui sopra). Quindi $\mathcal{O}(D)$ è localmente libero di rango uno.
(2) Se D_i è localmente definito da f_i su U_i, allora $\mathcal{O}(D_1 - D_2)|U_i$ è generato da f_2/f_1. Cioè $\mathcal{O}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}(D_1).\mathcal{O}(D_2)^{-1}$ come sotto fascio di $\mathcal{K}$; ma questo prodotto è isomorfo a $\mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)^*$.

Oppure: $\mathcal{O}(D_1)(U_i) \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} \mathcal{O}(-D_2)(U_i) \simeq \{h/f_1 \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} g f_2\} \simeq \{hg/f_1 \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} f_2\}$ e l'isomorfismo è dato da $h/f_1 \otimes f_2 \to h f_2/f_1$. Per l'ultima affermazione prendere $D_1 = 0$.
(3) Mostriamo: $D \sim 0 \Leftrightarrow \mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$. Se $D \sim 0$ allora $D = div(f)$ e $\mathcal{O}(D)$ è globalmente definito da $1/f$, l'isomorfismo cercato è dato da $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(D) : 1 \to 1/f$. Viceversa se $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$, allora $\mathcal{O}(C) \overset{\varphi}{\simeq} \mathcal{O}(D)(C)$. Sia $s = \varphi(1)$, allora s è una sezione globale di $\mathcal{O}(D)$ che non si annulla mai. Nell'isomorfismo $\mathcal{O}(D)(C) \simeq \mathcal{L}(D)$ (Lemma 9.7), s corrisponde a una funzione razionale f tale

che $div(f) + D = 0$ (in generale il divisore effettivo $div(f) + D$ è il luogo degli zeri di s). Cioè $div(f) = -D$. Quindi $div(1/f) = D$ e D è principale.

Finalmente visto che $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow D_1 - D_2 \sim 0$, si conclude con (2). $\square$

Mostriamo adesso che ogni fascio invertibile $\mathcal{L}$ è della forma $\mathcal{O}(D)$ per un qualche divisore D.

Definizione 9.9. *Il gruppo di Picard di C, $Pic(C)$ è il gruppo (per $\otimes$) dei fasci invertibili su C.*

Si verifica facilmente che $Pic(C)$ è un gruppo (il neutro è $\mathcal{O}$ e il simmetrico di $\mathcal{L}$ è $\mathcal{L}^* = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O})$). Abbiamo:

Proposizione 9.10. *Su una curva proiettiva liscia, C, l'applicazione: $Cl(C) \to Pic(C) : D \to \mathcal{O}(D)$ è un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Usando l'isomorfismo $CaCl(X) \simeq Cl(X)$, il Lemma 9.8 mostra che l'applicazione è ben definita ($D \sim D' \Rightarrow \mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}(D')$), è un morfismo di gruppi ($\mathcal{O}(D + D') = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D')$) ed è iniettiva ($\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O} \Rightarrow D \sim 0$). Per concludere basta mostrare che ogni fascio invertibile $\mathcal{L}$ è isomorfo a un sotto fascio del fascio $\mathcal{K}$. Infatti in questo caso essendo $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}$-modulo di rango uno sarà localmente generato da un elemento e si avrà: $\mathcal{L}(U_i) = f_i.\mathcal{O}(U_i) \subset K$ ($f_i \in K$) e se D è il divisore di Cartier $(1/f_i, U_i)$, allora $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{L}$.

Osserviamo che $\mathcal{K}$ è il fascio costante K dove K è il campo delle funzioni razionali di C (questo segue dal fatto che C è irriducibile, quindi due aperti non vuoti hanno un'intersezione non vuota). Se U è un aperto tale che $\mathcal{L}|U \simeq \mathcal{O}|U$, allora $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{K})|U \simeq \mathcal{K}|U$, quindi $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$ è un fascio costante su U. Siccome gli aperti U ricoprono C e siccome C è irriducibile, questo implica $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$. L'applicazione naturale $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$ esprime $\mathcal{L}$ come sotto fascio di $\mathcal{K}$. $\square$

Possiamo definire il grado di un fascio invertibile:

Definizione 9.11. *Per la Proposizione 9.10 ogni fibrato in rette (fascio invertibile) L su C è della forma $\mathcal{O}(D)$. Il* grado *di L è* $\deg(L) := \deg(D)$ *(è ben definito per il Lemma 9.8).*

Osservazione 9.12.

Una presentazione alternativa.

Con il linguaggio degli schemi un altro approccio è possibile per descrivere il fascio invertibile associato a un divisore. Ogni divisore di Weil si scrive come la differenza di due divisori effettivi (un divisore $\sum_i n_i P_i$ è effettivo se $n_i \geq 0, \forall i$), un divisore effettivo è una somma di divisori del tipo $n.P$, $n \geq 0$.

Ad ogni $n.P$ effettivo associamo un sotto schema chiuso di C nel modo seguente: se $U = Spec(A)$ è un aperto affine contenente P allora P corrispondente ad un ideale massimale $\mathfrak{m}$ (P è un punto chiuso), sia $I = \mathfrak{m}^n$, l'ideale I definisce un sotto schema chiuso, Z, di $Spec(A) = U$. Osserviamo che $|Z| = \{P\}$. Adesso definiamo un sotto schema chiuso, sempre notato Z, di C tramite $U \hookrightarrow C$. Sia $\mathcal{I}_Z$ il fascio d'ideali di Z, abbiamo:

$$0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

Il fascio $\mathcal{I}_Z$ è definito da $\mathcal{I}_Z(V) = \mathcal{O}_C(V)$ se $P \notin V$, $\mathcal{I}_Z(V) = \{f \in \mathcal{O}_C(V) \mid \nu_P(f) \geq n\}$ se $P \in V$. Lo schema Z è il punto P "n-uplato sulla curva C". Siccome $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_C$, $\mathcal{I}_Z$ è senza torsione. Siccome $\mathcal{O}_Z$ è di torsione (ha supporto sul punto P), $\mathcal{I}_Z$ ha rango uno. Quindi $\mathcal{I}_Z$ è localmente libero di rango uno. Poniamo $\mathcal{I}_Z = \mathcal{O}(-nP)$ e $\mathcal{O}(nP) := \mathcal{I}_Z^*$. Tensorizzando la successione qui sopra con il fascio invertibile $\mathcal{I}_Z^*$ otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}(nP) \to \mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{I}_Z^* \to 0$$

Siccome $\mathcal{O}_Z$ ha supporto su P e siccome $\mathcal{I}_Z^*$ è localmente libero di rango uno, $\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{I}_Z^* \simeq \mathcal{O}_Z$. Vediamo quindi che $\mathcal{O}(nP)$ ha una sezione che si annulla lungo Z, ma Z è nP.

Se $D = \sum_i n_i P_i$ è effettivo, il fascio associato a D è il prodotto tensoriale dei vari $\mathcal{O}(n_i P_i)$. Se $D = D_1 - D_2$, D_i effettivi, il fascio associato a D è $\mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(-D_2)$.

Il lettore si convincerà che questo approccio è equivalente a quanto fatto prima. Si convincerà anche che tutti i sotto schemi chiusi di C sono della forma $\sum_i n_i P_i$, $n_i > 0$, fatte le dovute identificazioni, come sopra ($Z = n.P$) (cf Esercizio 52).

Quindi il passaggio agli schemi per una curva proiettiva, irriducibile, non singolare aggiunge il punto generico e permette di vedere i divisori effettivi come sotto schemi chiusi di C, e viceversa.

Esercizi.

Esercizio 51 *Sia C una curva e sia $P \in C$. Mostrare che esiste una funzione razionale con un polo in P e regolare altrove.*

Esercizio 52 *Sia $Z \subset C$ un sotto schema chiuso della curva C. Si assume $|Z| = \{P\}$ (Z ha supporto nel punto P). Mostrare che $\mathcal{I}_{Z,P} \subset \mathcal{O}_{C,P}$ è della forma $\mathfrak{m}^n$, dove $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{C,P}$.*
Se $\overline{\mathfrak{m}}$ è l'ideale massimale dell'anello locale $\mathcal{O}_Z$, allora $\overline{\mathfrak{m}}^n = 0$. Dedurne che $\mathcal{O}_Z$ è un anello di dimensione zero. Mostrare che $\mathcal{O}_Z$ è una k-algebra di dimensione n. Quindi $h^0(\mathcal{O}_Z) = n$. Si dice che Z ha grado n.

9.3 Il teorema di Riemann-Roch.

Se C è una curva proiettiva, liscia, irriducibile, su k, per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ su C abbiamo solo due gruppi di coomologia da considerare $H^0(\mathcal{F})$ e $H^1(\mathcal{F})$; entrambi sono k-spazi vettoriali di dimensione finita (Proposizione 5.3). Inoltre $H^0(C, \mathcal{O}_C) \simeq k$ (Corollario 5.4).

Quindi per la nostra curva C, $h^0(\mathcal{O}) = 1$ (se non c'è rischio di confusione scriviamo $\mathcal{O}$ invece di $\mathcal{O}_C$, $H^i(\mathcal{F})$ invece di $H^i(C, \mathcal{F})$. Finalmente $h^i(\mathcal{F}) := \dim_k(H^i(\mathcal{F})))$.

Definizione 9.13. *Il* genere *della curva C è $g(C) := h^1(\mathcal{O})$.*

Se $k = \mathbb{C}$, C può essere vista come una superficie di Riemann compatta e quindi come una superficie reale, compatta, orientabile. Si dimostra che C è omeomorfa a un toro con $g(C)$ buchi. In questo caso, quindi il genere è un invariante topologico. Per un campo qualsiasi non c'è niente di simile. In realtà la definizione più naturale del genere sarebbe: $g(C) = h^0(T_C^*)$, dove $T_C^* = \omega_C$ è il fibrato cotangente. Per la dualità di Serre (che vedremo più avanti) $h^0(\omega_C) = h^1(\mathcal{O})$.

Definizione 9.14. *Sia C una curva proiettiva liscia, irriducibile e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_C$-modulo, la* caratteristica di Eulero-Poincaré *di $\mathcal{F}$ é: $\chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F})$.*

Lemma 9.15. *Sia $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_2 \to 0$ una successione esatta di $\mathcal{O}_C$-moduli coerenti sulla curva C. Allora: $\chi(\mathcal{F}_0) = \chi(\mathcal{F}_1) + \chi(\mathcal{F}_2)$ (*la caratteristica di Eulero-Poincaré è additiva: è vero in qualsiasi dimensione*).*

Dimostrazione. Spezzettare la successione esatta lunga di coomologia in tante successioni esatte corte: esercizio. □

Una prima versione del teorema di Riemann-Roch:

Teorema 9.16. (Riemann-Roch)
Sia C una curva proiettiva liscia, irriducibile, di genere g e sia $D \in Div(C)$ un divisore qualsiasi. Allora:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = \deg(D) - g + 1$$

Dimostrazione. Il teorema è vero se $D = 0$: $h^0(\mathcal{O}) - h^1(\mathcal{O}) = 0 - g + 1$, infatti $h^0(\mathcal{O}) = 1$ perché C è proiettiva e $h^1(\mathcal{O}) = g$ per definizione. Siccome ogni divisore si riconduce al divisore nullo per un numero finito di operazioni di addizione o differenza di un punto, basta mostrare che la formula è vera per D se e solo se è vera per $D - P$, $P \in C$ un punto qualsiasi.

Abbiamo la successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0$$

(qui $\mathcal{O}(-P) = \mathcal{I}_P$). Tensorizzando per $\mathcal{O}(D)$ viene:

$$0 \to \mathcal{O}(D-P) \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

Infatti $\mathcal{O}(D)$ è localmente libero quindi piatto, inoltre siccome localmente $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$ e siccome $\mathcal{O}_P$ ha supporto su P, $\mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}_P \simeq \mathcal{O}_P$.

Per il Lemma 9.15): $\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}(D-P)) + \chi(\mathcal{O}_P)$. Visto che $\chi(\mathcal{O}_P) = h^0(\mathcal{O}_P) - h^1(\mathcal{O}_P) = 1$, abbiamo: $\chi(\mathcal{O}(D)) = 1 + \chi(\mathcal{O}(D-P))$. Quindi la formula è vera per $\mathcal{O}(D)$ se e solo se è vera per $\mathcal{O}(D-P)$. Il teorema è dimostrato. $\square$

Ad ogni varietà (differenziabile, analitica, algebrica) viene associato un oggetto naturale: il suo fibrato tangente.

Definizione 9.17. *Sia X una curva algebrica proiettiva liscia. Il* fibrato canonico *di X, ω_X, è: $\omega_X = T_X^* = \mathcal{H}om(T_X, \mathcal{O}_X)$.*

Da un punto di vista algebrico il fascio canonico è l'oggetto più naturale. Lo si può definire come il fascio dei differenziali regolari.

Definizione 9.18. *Un divisore canonico, K, è un divisore tale che $\mathcal{O}(K) \simeq \omega_X$.*

La definizione ha senso perché sappiamo che ogni fibrato in rette L è della forma $L = \mathcal{O}(D)$ per un qualche divisore.

La dualità di Serre permette, sostanzialmente, di esprimere un h^1 come un h^0; si tratta di un teorema molto generale, il caso particolare che ci interessa è:

Teorema 9.19. (Dualità di Serre)
Sia X una curva proiettiva liscia, irriducibile e sia $D \in Div(X)$ un divisore qualsiasi, allora:

$$H^1(\mathcal{O}(D)) \simeq H^0(\omega_X \otimes \mathcal{O}(-D))^*$$

In particolare $h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(K-D))$.

Usando la dualità di Serre abbiamo un'altra formulazione del teorema di Riemann-Roch:

Teorema 9.20. (Riemann-Roch)
Sia C una curva proiettiva liscia, irriducibile di genere g. Sia $D \in Div(X)$ un divisore qualsiasi, allora:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^0(\mathcal{O}(K-D)) = \deg(D) - g + 1$$

Visto che $h^0(\mathcal{O}(D)) = l(D)$, ritroviamo la formulazione classica: $l(D) - l(K - D) = \deg(D) - g + 1$.

Esercizi.

Esercizio 53 *Sia C una curva di genere g. Usando la dualità di Serre, mostrare che ω_C ha grado $2g-2$ e che $h^1(\omega_C)=1$.*
Sempre usando la dualità di Serre mostrare che ω_C è l'unico fibrato in rette, $\mathcal{L}$, di grado $2g-2$ con $h^1(\mathcal{L})\neq 0$.

Esercizio 54 *Usando la dualità di Serre mostrare che se $\deg D \geq 2g-1$, allora $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D - g + 1$.*

10

Fasci localmente liberi su $\mathbb{P}^1$.

10.1 Sezioni di un fascio invertibile e divisori.

Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile sulla curva C (proiettiva, liscia, irriducibile su un campo k algebricamente chiuso). Una sezione globale $s \in H^0(\mathcal{L}) = \mathcal{L}(C)$ corrisponde ad un morfismo $\mathcal{O} \to \mathcal{L}$ definito da $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{L}(U) : f \to f.s|U$ (cioè se $P \in C$, $\mathcal{O}_P \to \mathcal{L}_P : 1_P \to s_P$). Se $s \neq 0$ il morfismo $\mathcal{O} \to \mathcal{L}$ è non nullo, quindi iniettivo (come morfismo di fasci ma non necessariamente come morfismo di fibrati).

Viceversa un morfismo $\mathcal{O} \to \mathcal{L}$ corrisponde a una sezione globale di $\mathcal{L}$ ($k \simeq H^0(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^0(\mathcal{L})$).

Quindi per ogni $s \in H^0(\mathcal{L})$ abbiamo:

$$0 \to \mathcal{O} \stackrel{s}{\to} \mathcal{L} \to \mathcal{G} \to 0$$

Il fascio $\mathcal{G}$ ha rango zero quindi è un fascio di torsione e il suo supporto è un sotto schema proprio di C.

Visto la corrispondenza tra sotto schemi chiusi di C e divisori effettivi (cf 9.12) possiamo scrivere $Supp(\mathcal{G}) = D$, dove $D = \sum n_i P_i$. Quindi $\mathcal{G} \simeq \mathcal{O}_D$.

Più precisamente in un punto $P \in C$ abbiamo $s : \mathcal{O}_P \to \mathcal{L}_P \simeq \mathcal{O}_P : 1_P \to s_P$. Sia t un parametro locale in P (cioè $\mathfrak{m}_P = (t)$). Abbiamo $s_P = f.t^n, n \geq 0$, dove $f \in \mathcal{O}_P$ è invertibile.

- Se $n = 0$, allora $s_P \notin \mathfrak{m}_P$ (cioè $S(P) \neq 0$) e $(s_P) = \mathcal{O}_P$. Cioè $\mathcal{G}_P = 0$.
- Se $n > 0$, $s_P \in \mathfrak{m}_P$ (quindi $s(P) = 0$) e l'immagine di s è $\mathfrak{m}_P^n$. L'ideale $\mathfrak{m}_P^n$ definisce il sotto schema chiuso $''n.P''$ (cioè il punto P "n-uplato" in C o ancora l'$(n-1)$ intorno infinitesimale del punto P in C).

Definizione 10.1. *Con le notazioni precedenti il divisore $D = \sum n_i P_i$ è il* divisore degli zeri *della sezione $s \in H^0(\mathcal{L})$. Si nota $(s)_0 = D$.*

Osservazione 10.2. Il divisore degli zeri, $(s)_0$, di una sezione $s \in H^0(\mathcal{L})$ è sempre un divisore effettivo.

Una descrizione alternativa è la seguente. La sezione $s \in H^0(\mathcal{L})$ fornisce: $0 \to \mathcal{O} \stackrel{s}{\to} \mathcal{L} \to \mathcal{G} \to 0$. Dualizzando si ottiene: $0 \to \mathcal{L}^* \stackrel{s^*}{\to} \mathcal{O} \to \cdots$. Infatti $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = 0$ perché $\mathcal{G}$ è di torsione (Esercizio 55). L'immagine di s^* è un sotto fascio di $\mathcal{O}$, cioè un fascio di ideali (invertibile di rango uno), pertanto della forma $\mathcal{O}(-D)$ per un qualche sotto schema chiuso D, cioè per un qualche divisore effettivo D. Abbiamo $\mathcal{L}^* \simeq \mathcal{O}(-D)$ e possiamo riscrivere la successione nella forma: $0 \to \mathcal{L}^* \simeq \mathcal{O}(-D) \stackrel{s^*}{\to} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_D \to 0$. Tensorizzando per $\mathcal{L}$ viene: $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_D \to 0$. Vediamo che $\mathcal{G} \simeq \mathcal{O}_D$ e $D = (s)_0$.

Da $\mathcal{L}^* = \mathcal{O}(-D)$ viene $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(D)$. In particolare $\deg D = \deg \mathcal{L}$. Inoltre se $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(\mathcal{D}))$, allora $\mathcal{D} \sim D$.

Proposizione 10.3. *Sia $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\mathcal{D})$ un fascio invertibile sulla curva C.*
(i) Se $s \in H^0(\mathcal{L})$, allora $(s)_0$ è un divisore effettivo linearmente equivalente a $\mathcal{D}$.
(ii) Se $D \sim \mathcal{D}$, D effettivo, allora esiste $s \in H^0(\mathcal{L})$ con $(s)_0 = D$.
(iii) Sia $|\mathcal{D}| = \{D \mid D \geq 0, D \sim \mathcal{D}\}$, allora $|\mathcal{D}| \simeq \mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}))$.

Dimostrazione. (i) E' stato appena visto.
(ii) Se $D \sim \mathcal{D}$, allora $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{L}$. Siccome D è effettivo abbiamo: $0 \to \mathcal{O}(-D) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_D \to 0$. Tensorizzando con $\mathcal{O}(D)$: $0 \to \mathcal{O} \stackrel{s}{\to} \mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{L} \to \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}_D \to 0$. Per costruzione $(s)_0 = D$.
(iii) Visto quanto precede rimane da mostrare che due sezioni $s, \sigma \in H^0(\mathcal{L})$ hanno lo stesso divisore degli zeri se e solo se sono linearmente dipendenti. E' chiaro che $s = \lambda\sigma$ implica $(s)_0 = (\sigma)_0$.

Viceversa supponiamo $(s)_0 = (\sigma)_0 = D$. In questa situazione i due morfismi $\mathcal{L}^* \stackrel{s^*}{\to} \mathcal{O}$, $\mathcal{L}^* \stackrel{\sigma^*}{\to} \mathcal{O}$ hanno immagini isomorfe (a $\mathcal{O}(-D)$) in $\mathcal{O}$. Quindi s^* e σ^* differiscono per un automorfismo di $\mathcal{O}(-D)$. Siccome $\mathcal{H}om(\mathcal{O}(-D), \mathcal{O}(-D)) = \mathcal{O}(-D)^* \otimes \mathcal{O}(-D) = \mathcal{O}$ e $H^0(\mathcal{O}) = k$, $s^* = \lambda\sigma^*$, cioè $s = \lambda\sigma$. $\square$

L'insieme, $|\mathcal{D}|$, di tutti i divisori *effettivi* linearmente equivalenti a $\mathcal{D}$ è quindi naturalmente munito di una struttura di spazio proiettivo. Come vedremo più avanti questo fatto è fondamentale.

Definizione 10.4. *Sia $\mathcal{D}$ un divisore (non necessariamente effettivo), allora $|\mathcal{D}|$, l'insieme di* tutti *i divisori* effetivi *linearmente equivalenti a $\mathcal{D}$, è il* sistema lineare completo *associato a $\mathcal{D}$.*

Per concludere osserviamo due fatti elementari ma molto utili:

Corollario 10.5. *Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su C.*
(i) Se $\deg \mathcal{L} < 0$*, allora* $h^0(\mathcal{L}) = 0$.
(ii) Se $\deg \mathcal{L} = 0$ *e* $h^0(\mathcal{L}) > 0$*, allora* $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}$.

Dimostrazione. Esercizio 56. $\square$

Esercizi.

Esercizio 55 *Sia X uno schema integro, noetheriano.*
*(i) Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$-modulo coerente. Mostrare che $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ è senza torsione (*duality kills torsion*).*
(ii) Se $\mathcal{F}$ è di torsione (cioè $Supp(\mathcal{F}) \neq X$), allora $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}) = 0$

Esercizio 56 *Dimostrare il Corollario 10.5.*

Esercizio 57 *Sia C una curva (proiettiva, liscia, irriducibile, definita su k algebricamente chiuso). Un sotto schema, $Z \subset C$, 0-dimensionale di C è un sotto schema chiuso proprio di C. Il grado di Z è $\deg Z := h^0(\mathcal{O}_Z)$.*

Si indica con $\mathcal{H}ilb^d(\mathbb{P}^1)$ l'insieme dei sotto schemi 0-dimensionali, di grado d, di $\mathbb{P}^1$. Mostrare che $\mathcal{H}ilb^d(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(d))$.

10.2 Fasci invertibili su $\mathbb{P}^1$.

Indichiamo con $\mathbb{P}^1$ la retta proiettiva $Proj(k[x_0, x_1])$, dove k è un campo algebricamente chiuso.

Sia $P = (a : b) \in \mathbb{P}^1$, allora P è "radice" (o luogo degli zeri) del polinomio $L(x_0, x_1) = bx_0 - ax_1$. Più generalmente se $F(x_0, x_1) = \prod_1^r L_i(x_0, x_1)^{n_i}$, dove $L_i(x_0, x_1) = b_i x_0 - a x_1$ e dove $\sum n_i = d$, le radici di F sono i punti $P_i = (a_i : b_i)$, con molteplicità n_i. Cioè il luogo degli zeri di F è il divisore effettivo $D = \sum_1^r n_i P_i$. Detto ciò abbiamo:

Proposizione 10.6. *(i) Sia $P \in \mathbb{P}^1$. Ogni divisore $D \in Div(\mathbb{P}^1)$, di grado $d \in \mathbb{Z}$, è linearmente equivalente a $d.P$. Quindi $Cl(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}$.*
(ii) Abbiamo $Pic(\mathbb{P}^1) = \{\mathcal{O}(a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. (i) Possiamo assumere $P = (0 : 1)$. Sia $D = \sum^r n_i P_i$ un divisore effettivo di grado n. Sia $P_i = (a_i : b_i)$, $L_i(x_0, x_1) = bx_0 - ax_1$ e $F(x_0, x_1) = \prod^r L_i(x_0, x_1)^{n_i}$. Il polinomio F ha grado n e il suo luogo degli zeri è D. Consideriamo $h(x_0, x_1) = F(x_0, x_1)/x_0^n$; h è una funzione razionale su $\mathbb{P}^1$ il cui divisore è: $(h) = D - nP$. Quindi $D \sim nP$.

Sia adesso D un divisore qualsiasi di grado d. Possiamo scrivere $D = D_1 - D_2$, con D_i effettivi, di gradi d_i (con $d = d_1 - d_2$). Abbiamo $D_i \sim d_i P$, quindi $D \sim d.P$.

Segue che $Cl(\mathbb{P}^1) = \{d.P \mid d \in \mathbb{Z}\}$.
(ii) Abbiamo un isomorfismo $Cl(\mathbb{P}^1) \to Pic(\mathbb{P}^1) : D \to \mathcal{O}(D)$ (Proposizione 9.10). Chiaramente $\mathcal{O}(P) = \mathcal{O}(1)$ e più generalmente $\mathcal{O}(d.P) = \mathcal{O}(d)$.

Se preferite dall'isomorfismo $Cl(\mathbb{P}^1) \simeq Pic(\mathbb{P}^1)$ segue che $Pic(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}$. D'altra parte $\{\mathcal{O}(a)\} \subset Pic(\mathbb{P}^1)$ è un sotto gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}$, quindi sono uguali. Guardando ai gradi è chiaro che $d.P$ corrisponde a $\mathcal{O}(d)$. □

Se P e Q sono due punti di $\mathbb{P}^1$, allora $P \sim Q$ (d'altra parte $|P| \simeq \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(P)) \simeq \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathbb{P}^1)$. Questa proprietà caratterizza $\mathbb{P}^1$:

Proposizione 10.7. *(i) Ogni curva proiettiva liscia, irriducibile su k, di genere zero è isomorfa a $\mathbb{P}^1$.*
(ii) Sia C una curva (proiettiva, liscia, irriducibile, su k) e sia $P \in C$. Se $g(C) > 0$, allora $|P| = \{P\}$.

Dimostrazione. Sia C con $g(C) = 0$ e sia $P \in C$. Per il teorema di Riemann-Roch: $h^0(\mathcal{O}(P)) = 1-0+1+h^1(\mathcal{O}(P)) \geq 2$. Quindi esiste un divisore effettivo, di grado uno, diverso da P linearmente equivalente a P. Cioè esiste un punto Q con $P \sim Q$. Quindi esiste una funzione razionale f, con $(f) = P - Q$, ossia f ha uno zero in P e un polo in Q, per il resto f è regolare e non si annulla. Quindi abbiamo $f : C \to \mathbb{P}^1$ di grado uno e f è un isomorfismo (Esercizio 48).

(ii) Se $|P| \neq \{P\}$, ragionando come prima vediamo che $C \simeq \mathbb{P}^1$. Ma questo è assurdo se $g(C) > 0$ (se $C \simeq X$, $\mathcal{O}_C \simeq \mathcal{O}_X$ e quindi $g(C) = g(X)$). □

Per concludere osserviamo che la dualità di Serre è verificata su $\mathbb{P}^1$:

Proposizione 10.8. *Su $\mathbb{P}^1$ esiste un unico fibrato in rette di grado -2, $\omega_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(-2)$, con $h^1(\omega_{\mathbb{P}^1}) = 1$.*
Inoltre per ogni fibrato in rette $\mathcal{L}$ su $\mathbb{P}^1$, abbiamo $h^1(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}^* \otimes \omega_{\mathbb{P}^1})$.

Dimostrazione. Visto la Proposizione 10.6 e la coomologia dei fasci $\mathcal{O}(a)$ (Teorema 5.2) è una semplice verifica. □

10.3 Classificazione dei fasci localmente liberi su $\mathbb{P}^1$.

Scopo di questa sezione è di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 10.9. (Grothendieck)
Sia $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango r su $\mathbb{P}^1$. Esistono degli interi $a_1 \leq \cdots \leq a_r$ (univocamente determinati) tali che $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r)$.

Osservazione 10.10. Anche se attribuito a Grothendieck questo risultato era già noto (in termini di matrici) all'inizio del secolo scorso.

Questo risultato non ha nulla a che fare con la dualità di Serre!

Lemma 10.11. *Sia $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango r su $\mathbb{P}^1$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{Z}$ tale che $h^0(\mathcal{E}(n_0)) \neq 0$ e $h^0(\mathcal{E}(m)) = 0$, se $m < n_0$ (dove, come al solito $\mathcal{E}(m) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(m)$).*

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{E}^*$ è coerente su $\mathbb{P}^1$, esiste n tale che $\mathcal{E}^*(n)$ sia generato dalle sezioni globali (Teorema 4.17), quindi abbiamo: $0 \to \mathcal{F} \to t.\mathcal{O} \to \mathcal{E}^*(n) \to 0$. Dualizzando, otteniamo, visto che $\mathcal{E}$ è localmente libero (quindi riflessivo) $\mathcal{E}(-n) \hookrightarrow t.\mathcal{O}$. Segue che $h^0(\mathcal{E}(-n-1)) = 0$ (perché $\mathcal{E}(-n-1) \hookrightarrow t.\mathcal{O}(-1)$).

Tensorizzando la successione esatta $0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0$ per $\mathcal{E}(m)$ e ragionando per induzione, vediamo che $h^0(\mathcal{E}(m)) = 0$ se $m \leq -n-1$.

L'esistenza di n_0 segue dal fatto che $h^0(\mathcal{E}(s)) \neq 0$ se $s >> 0$ (perché $\mathcal{E}(s)$ è generato dalle sezioni globali se $s >> 0$, Teorema 4.17). $\square$

Osservazione 10.12. Il Lemma è falso se $\mathcal{E}$ non è localmente libero. Infatti se $P \in \mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}_P(n) \simeq \mathcal{O}_P$ e quindi $h^0(\mathcal{O}_P(n)) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Più generalmente se $\mathcal{T}$ è di torsione su $\mathbb{P}^1$, $h^0(\mathcal{T}(n)) \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ (cf Esercizio 61).

Lemma 10.13. *Siano $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango r su $\mathbb{P}^1$ e n_0 come nel Lemma 10.11. Se $s \in H^0(\mathcal{E}(n_0))$ allora abbiamo una successione esatta:*

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} \mathcal{E}(n_0) \to \mathcal{F} \to 0$$

dove $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango $r-1$.

Dimostrazione. Il fascio $\mathcal{F}$ è coerente e per il teorema di struttura (Proposizione 8.6) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{T}$, dove $\mathcal{F}_0$ è localmente libero e dove $\mathcal{T}$ è di torsione. Tensorizzando la successione del Lemma per $\mathcal{O}(-1)$ otteniamo $0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{E}(n_0-1) \to \mathcal{F}(-1) \to 0$ (la successione rimane esatta perché $\mathcal{O}(-1)$ è localmente libero). Siccome $h^0(\mathcal{E}(n_0-1)) = h^1(\mathcal{O}(-1)) = 0$, viene $h^0(\mathcal{F}(-1)) = 0$ e questo mostra che $\mathcal{F}$ è senza torsione ($\mathcal{T} = 0$ per l'Osservazione 10.12), quindi localmente libero. $\square$

Lemma 10.14. *Sia* $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H} \to 0$ *una successione esatta di fasci localmente liberi sullo schema* X. *Se* $h^1(\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{F}) = 0$, *la successione è spezzata e quindi* $\mathcal{G} \simeq \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$.

Dimostrazione. Tensorizzando la successione per $\mathcal{H}^*$ e prendendo la coomologia otteniamo un'applicazione suriettiva $H^0(\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*) \to H^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*)$. Siccome i fasci considerati sono localmente liberi abbiamo $H^0(\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*) = Hom(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ e $H^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*) = Hom(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ([6], II Ex. 5.1). In conclusione l'applicazione $Hom(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \to Hom(\mathcal{H}, \mathcal{H}) : f \to \varphi \circ f$ è suriettiva. Quindi esiste $g \in Hom(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ tale che $\varphi \circ g = Id_{\mathcal{H}}$, cioè φ ha una sezione e la successione è spezzata. □

Possiamo finalmente dimostrare il nostro teorema.

Dimostrazione (del Teorema 10.9).
Si procede per induzione sul rango. Se $r = 1$, il teorema segue dalla Proposizione 10.6.

Assumiamo il risultato vero per $r - 1$ e mostriamolo per r. Sia quindi $\mathcal{E}$ localmente libero di rango r. Abbiamo una successione esatta

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E}(n_0) \to \mathcal{F} \to 0 \quad (+)$$

dove n_0 è quello del Lemma 10.13 e dove $\mathcal{F}$ è localmente libero (Lemma 10.13). Per definizione di n_0 e visto che $h^1(\mathcal{O}(-1)) = 0$, abbiamo $h^0(\mathcal{F}(-1)) = 0$. Per ipotesi di induzione $\mathcal{F} \simeq \oplus^{r-1}\mathcal{O}(b_i)$. Da $h^0(\mathcal{F}(-1)) = 0$ segue che $b_i - 1 < 0, \forall i$. Abbiamo $h^1(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{O}) = h^1(\oplus \mathcal{O}(-b_i))$. Siccome $-b_i \geq 0$, viene $h^1(\mathcal{F}^*) = 0$ e la successione (+) è spezzata (Lemma 10.14), cioè $\mathcal{E}(n_0) \simeq \mathcal{O} \oplus (\bigoplus^{r-1} \mathcal{O}(b_i))$.

Questo mostra che ogni fascio localmente libero di rango r si scrive come somma diretta di r fasci $\mathcal{O}(a_i)$. Rimane da mostrare che questa scrittura è unica.

Supponiamo $\mathcal{E} = \bigoplus^r \mathcal{O}(a_i) \simeq \bigoplus^r \mathcal{O}(b_i) =: \mathcal{F}$, con $a_1 \leq \cdots \leq a_r$, $b_1 \leq \cdots \leq b_r$. Vogliamo mostrare $(a_1, ..., a_r) = (b_1, ..., b_r)$. procediamo per induzione su r. Se $r = 1$ il risultato è chiaro. Assumiamo il risultato per $r - 1$ e mostriamolo per r.

Se $b_r > a_r$, abbiamo $h^0(\mathcal{F}(-b_r)) > 0$, mentre $h^0(\mathcal{E}(-b_r)) = 0$ (perché $a_i - b_r < 0, \forall i$). Questo è assurdo, quindi $b_r = a_r$. Abbiamo $\mathcal{E}/\mathcal{O}(b_r) \simeq \mathcal{F}/\mathcal{O}(b_r)$ e concludiamo per induzione che $(a_i) = (b_i)$. □

Osservazione 10.15. Si può dimostrare che $\mathbb{P}^1$ è l'unica varietà proiettiva X tale che ogni fascio localmente libero su X sia somma diretta di fibrati in rette.

Esercizi.

Esercizio 58 *Sia D un divisore effettivo sulla curva C. Mostrare che se $P \in C$ è sufficientemente generale, allora $h^0(\mathcal{O}(D-P)) = h^0(\mathcal{O}(D)) - 1$. Concludere che $h^0(\mathcal{O}(D)) \leq \deg D + 1$. Mostrare che si ha uguaglianza se e solo se $D = 0$ o $g = 0$.*

Esercizio 59 *(i) Sia $S = k[x_0, x_1]$. Per $a > 0$, sia $\psi : S(-a) \oplus S(-a) \stackrel{(x_0^a, x_1^a)}{\to} S$. Mostrare che ψ dà luogo a un morfismo suriettivo: $2.\mathcal{O}(-a) \to \mathcal{O} \to 0$. Mostrare che il nucleo di questo morfismo è $\mathcal{O}(-2a)$. Quindi non tutte le successioni esatte di fasci localmente liberi su $\mathbb{P}^1$ sono spezzate.*
(ii) Se $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \to t.\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ è un morfismo iniettivo di fasci allora $b \leq a$. Mostrare che per ogni $b \leq a$ e ogni $t \geq 2$ esiste un morfismo iniettivo fibrati $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \to t.\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$.

Esercizio 60 *Si dimostra esattamente come nella Proposizione 10.6 che ogni fibrato in rette su $\mathbb{P}^n$ è della forma $\mathcal{O}(a), a \in \mathbb{Z}$.*

Il fascio $\mathcal{O}(1)$ è generato dalle sue sezioni globali, quindi abbiamo: $(n+1)\mathcal{O} \to \mathcal{O}(1) \to 0$ e il ker, $\mathcal{E}$, è localmente libero di rango n.
(i) Se $n \geq 2$, mostrare che $\mathcal{E}$ non è una somma diretta di fibrati in rette (considerare la coomologia).
(ii) Se $L \subset \mathbb{P}^n$ è una retta, per il teorema di Grothendieck $\mathcal{E}_L := \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_L$ è della forma $\bigoplus_1^n \mathcal{O}_L(a_i)$ (gli a_i a priori dipendono da L). Mostrare che $\sum^n a_i = -1$ (hint: considerare le caratteristiche di Eulero nella successione esatta $0 \to \mathcal{E}_L \to (n+1).\mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_L(1) \to 0$). Mostrare che $a_i \leq 0, \forall i$. Concludere che per ogni *retta $L \subset \mathbb{P}^n$, $\mathcal{E}_L \simeq \mathcal{O}_L(-1) \oplus (n-1).\mathcal{O}_L$. (N.B.: si ha $\mathcal{E} = \Omega(1)$, dove Ω è il fibrato cotangente di $\mathbb{P}^n$).*

Esercizio 61 *Sia $\mathcal{T}$ un fascio (coerente) di torsione sulla curva (liscia, irriducibile) C. Mostrare che $\mathcal{T}$ è isomorfo a una somma diretta $\mathcal{O}_{D_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{D_t}$, dove $D_i = \sum n_j P_j^{(i)}$ è un sotto schema chiuso (= divisore effettivo) di C (hint: usare il teorema di struttura dei moduli su un P.I.D.).*

11

Dualità di Serre.

In questo capitolo diamo alcuni cenni, seguendo [2], sulla dimostrazione della dualità di Serre. La dimostrazione che segue non è quella usuale (con i residui) ma usa invece (tranne in alcuni punti) il materiale visto finora. Si lavora come al solito su un campo k algebricamente chiuso, di caratteristica zero.

Si definisce prima la mappa canonica osservando che se $g(C) > 0$, allora $h^0(\mathcal{O}(P)) = 1$, per ogni $P \in C$. Si definisce poi il fibrato canonico, ω come il pull-back del divisore iperpiano. Finalmente si dimostra la dualità di Serre:

Teorema 11.1. (Dualità di Serre)
Sia L un fascio invertibile sulla curva liscia C. Esiste un isomorfismo: $H^0(\omega \otimes L^{-1}) \overset{\simeq}{\to} H^1(L)^*$.

In particolare: $h^0(L) - h^0(\omega \otimes L^{-1}) = \deg L - g + 1$.

Abbiamo già verificato la dualità di Serre su $\mathbb{P}^1$, prima di passare al caso generale ($g \geq 2$) conviene trattare a parte il caso delle curve ellittiche ($g = 1$).

11.1 Curve di genere uno.

Sia C una curva di genere uno (si dice anche che C è una *curva ellittica*). La coomologia dei fibrati in rette è data dal grado. Dal teorema di Riemann-Roch abbiamo: $h^0(L) - h^1(L) = \deg L$.

• Se $\deg L = 0$ e $L \neq \mathcal{O}$, allora $h^1(L) = 0$. Infatti abbiamo $h^0(L) = 0$ (altrimenti $L \simeq \mathcal{O}$) e quindi, per Riemann-Roch, $h^1(L) = 0$.

• Sia L con $\deg L = n > 0$. Se $P_1, ..., P_n$ sono n punti generici allora $L(-\sum P_i) \neq \mathcal{O}$ (altrimenti prendiamo $P_1, ..., P_{n-1}, Q$, se $L(-\sum P_i - Q)$ ha anche lui una sezione allora $P_n \sim Q$, impossibile se $P_n \neq Q$). Per quanto visto prima $h^1(L - \sum P_i) = 0$ e questo implica $h^1(L) = 0$ (Esercizio **??**).

In conclusione se $\deg L \geq 0$ e $L \not\simeq \mathcal{O}$, $h^1(L) = 0$ e $h^0(L) = \deg L$.

• Se $\deg L < 0$, allora $h^0(L) = 0$ e $h^1(L) = -\deg L$.

In conclusione:

Proposizione 11.2. *Sia L un fascio invertibile di grado d sulla curva ellittica C.*
(i) Se $d \geq 0$ e se $L \neq \mathcal{O}$, allora $h^0(L) = d$ e $h^1(L) = 0$
(ii) Se $d < 0$, $h^0(L) = 0$ e $h^1(L) = -d$.
In particolare se $\omega_C := \mathcal{O}$, abbiamo $h^1(L) = h^0(\omega_C \otimes L^*) = h^1(L^*)$.

Si osserverà che $\omega = \mathcal{O}$ è l'unico fibrato in rette di grado zero $(= 2g - 2)$ con $h^1(\omega) = 1$.

11.2 L'applicazione ϕ_K e il fibrato canonico.

Supponiamo fino alla fine di questo capitolo $g \geq 2$. (e k algebricamente chiuso, $ch(k) = 0$).

Sia $P \in C$ un punto, abbiamo: $0 \to \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0$. Tensorizzando con $\mathcal{O}(P)$ otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(P) \to \mathcal{O}_P \simeq k_P \to 0 \tag{11.1}$$

Prendendo la ccomologia otteniamo:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}) \to H^0(\mathcal{O}(P)) \to k_P \to H^1(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}(P)) \to 0$$

Se la mappa $k_P \to H^1(\mathcal{O})$ è nulla, allora $h^0(\mathcal{O}(P)) = 2$. Esiste quindi un punto $Q \neq P$ tale che $Q \sim P$. Questo implica che C è razionale. Per ipotesi $g \geq 2$ quindi questo non è possibile. Pertanto $k_P \to H^1(\mathcal{O})$ è non nulla e quindi iniettiva. Sia $l_P \subset H^1(\mathcal{O})$ la sua immagine.

Quindi ad ogni punto $P \in C$ possiamo associare una retta $l_P \subset H^1(\mathcal{O})$. Questo definisce un'applicazione $\phi_K : C \to \mathbb{P}(H^1(\mathcal{O})) \simeq \mathbb{P}^{g-1}$.

Proposizione 11.3. *L'applicazione $\phi_K : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ è un morfismo chiamato il* morfismo canonico *della curva C.*

Dimostrazione. In base al principio delle costruzioni algebro-geometriche l'enunciato è più che plausibile; una dimostrazione rigorosa è assai tecnica e faticosa, rimandiamo a [2] per i dettagli. □

Definizione 11.4. *Si pone $\omega_C := \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(1))$. Il fibrato ω_C è il* fibrato canonico *di C. Ogni divisore $K \in \mathbb{P}(H^0(\omega_C))$ viene chiamato divisore canonico di C.*

Osservazione 11.5. Si può mostrare (cf [2]) che ϕ_K è iniettiva tranne se C è iper-ellittica (cioè esiste un morfismo di grado due $f : C \to \mathbb{P}^1$), in tal caso ϕ_K è 2:1. Non useremo questo fatto.

Lemma 11.6. *Siano $P_1, ..., P_n \in C$, n punti distinti. La successione esatta*

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(P_1 + ... + P_n) \to k_{P_1} \oplus ... \oplus k_{P_n} \to 0$$

induce $f : H^0(k_{P_1} \oplus ... \oplus k_{P_n}) \to H^1(\mathcal{O})$. L'immagine di f è $l_{P_1} + ... + l_{P_n}$. In altri termini $\mathbb{P}(Im(f)) \subset \mathbb{P}(H^1(\mathcal{O}))$ è $\langle \phi_K(P_1), ..., \phi_K(P_n) \rangle$, il sotto spazio generato dai punti $\phi_K(P_i)$.

In particolare: $H^1(\mathcal{O}(P_1 + ... + P_n)) \simeq H^1(\mathcal{O})/Im(f)$.

Dimostrazione. Chiaro (l'applicazione f è la somma diretta delle applicazioni $k_{P_i} \to H^1(\mathcal{O})$). □

Osservazione 11.7. Supponiamo $H^1(\mathcal{O})/Im(f)) \neq 0$, allora $H^1(\mathcal{O})/Im(f)$ è isomorfo all'insieme degli iperpiani contenenti $Im(f)$. Quindi $\mathbb{P}(H^1(\mathcal{O}(P_1 + ... + P_n)) \simeq \{H \subset \mathbb{P}^{g-1} \mid \langle \phi_K(P_1), ..., \phi_K(P_n) \rangle \subset H\}$ (*Riemann-Roch geometrico*).

Se $D = P_1 + \cdots + P_n$ è speciale (cioè $h^1(\mathcal{O}(D)) \neq 0$), allora D è contenuto in un divisore canonico (quindi esiste un divisore effettivo D' e un divisore canonico K tali che $K = D + D'$). In particolare $\deg D \leq \deg K$.

Lemma 11.8. *(1) Se $n >> 0$, $L = \mathcal{O}(P_1 + \cdots + P_n)$ è non speciale (i.e. $h^1(L) = 0$).*
(2) La curva $X = \phi_K(C)$ è non degenere in $\mathbb{P}^{g-1}$.
(3) $h^0(\omega_C) \geq g$.

Dimostrazione. (1) Segue dall'Osservazione 11.7: se $n > \deg \omega_C$, L è non speciale.
(2) Se $h^1(L) = 0$, $\langle \phi_K(P_1), ..., \phi_K(P_n) \rangle = \mathbb{P}^{g-1}$ (Lemma 11.6, Osservazione 11.7), quindi la curva $X = \phi_K(C)$ non è contenuta in nessun iperpiano.
(3) Per (2) ogni iperpiano di $\mathbb{P}^{g-1}$ sega su X un divisore effettivo il cui pull-back su C è un divisore canonico effettivo, luogo degli zeri di una sezione di ω_C. Quindi $h^0(\omega_C) \geq g$. □

Corollario 11.9. *Se $P_1, ..., P_g$ sono g punti generici, allora $h^1(\mathcal{O}(P_1 + \cdots + P_g) = 0$.*

Dimostrazione. Se i P_i sono generici allora, siccome $\phi_K(C)$ è non degenere, $\langle \phi_K(P_1), ..., \phi_K(P_g) \rangle = \mathbb{P}^{g-1}$. Quindi (Lemma 11.6) $h^1(\mathcal{O}(P_1 + \cdots + P_g) = 0$. □

Corollario 11.10. *Sia L un fascio invertibile su C. Se* $\deg L > 2g-2$*, allora* $h^1(L) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo $h^1(L) > 0$. La formula di Riemann-Roch fornisce: $h^0(L) = \deg L - g + 1 + h^1(L) \geq 2g - 1 - g + 1 + 1 = g + 1$. Quindi se $P_1, ..., P_g$ sono g punti generici, esiste $s \in H^0(L)$ tale che $(s)_0 = P_1 + \cdots + P_g + D$ (cf Esercizio 58). Quindi abbiamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(P_1 + \cdots + P_g) \to L \to \mathcal{O}_D \to 0$$

Segue che (Lemma 11.9) $h^1(L) = 0$; contraddizione. Quindi $h^1(L) = 0$. □

Proposizione 11.11. *Abbiamo* $\deg \omega_C = 2g - 2$*,* $h^0(\omega_C) = g$*,* $h^1(\omega_C) = 1$.

Dimostrazione. Per il Lemma 11.6, $h^1(\omega_C) = 1$.

Per il Corollario 11.10, $\deg \omega_C \leq 2g - 2$.

Per la formula di Riemann-Roch: $h^0(\omega_C) = \deg \omega_C - g + 2 \leq 2g - 2 - g + 2 = g$. Per il Lemma 11.8 $h^0(\omega_C) \geq g$. Segue che $h^0(\omega_C) = g$ e $\deg \omega_C = 2g - 2$. □

11.3 Dimostrazione della dualità di Serre.

L'osservazione di base è il seguente lemma:

Lemma 11.12. *Siano F, L due fasci invertibili su C. Si assume $h^1(L) = 1$. Allora esiste un'applicazione naturale, iniettiva:*

$$Hom(F, L) = H^0(F^\vee \otimes L) \hookrightarrow H^1(F)^*.$$

Dimostrazione. Sia $s \in Hom(F, L)$, $s \neq 0$. Allora s fornisce un morfismo iniettivo di fasci $0 \to F \xrightarrow{s} L$ il cui coker è un fascio di torsione (considerare i ranghi). Pertanto abbiamo $0 \to F \to L \to \mathcal{T} \to 0$. Prendendo la coomologia otteniamo $\cdots \to H^1(F) \xrightarrow{s^*} H^1(L) \simeq k \to 0$. Il morfismo s^* è non nullo perché suriettivo. Quindi ad ogni $s \in Hom(F, L)$ abbiamo associato $s^* \in H^1(F)^*$. Questo definisce $f : Hom(F, L) \to H^1(F)^*$. Chiaramente $f(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$. Siccome f è un morfismo di gruppi, f è iniettivo. □

Corollario 11.13. *Sia L un fascio invertibile su C. Esiste un morfismo naturale, iniettivo* $\delta : Hom(L, \omega_C) = H^0(L^\vee \otimes \omega_C) \hookrightarrow H^1(L)^*$.

Si tratta di mostrare che questo morfismo iniettivo è biiettivo. Per questo distingueremo tre casi:

(A) $h^0(L) = 0$

(B) L è generato dalle sezioni globali

(C) $h^0(L) > 0$ e L non è generato dalle sezioni globali.

Il caso (A) non pone problemi:

Lemma 11.14. *Sia L un fascio invertibile su C. Se $h^0(L) = 0$, l'applicazione naturale $\delta : H^0(L^\vee \otimes \omega_C) \to H^1(L)^*$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Per la formula di Riemann-Roch: $h^0(\omega_C \otimes L^\vee) = 2g - 2 - \deg L - g + 1 + h^1(\omega_C \otimes L^\vee) = g - 1 - \deg L + h^1(\omega_C \otimes L^\vee)$. D'altra parte, sempre per Riemann-Roch: $h^0(L) - h^1(L) = \deg L - g + 1$, quindi $h^1(L) = g - 1 - \deg L$. Segue che $h^0(\omega_C \otimes L^\vee) \geq h^1(L)$. Dal Corollario 11.13, il morfismo δ è biiettivo. □

Passiamo adesso al caso (B):

Lemma 11.15. *Sia L un fascio invertibile sulla curva C, generato dalle sezioni globali. Se $s \in H^0(L)$ è sufficientemente generale, allora $(s)_0$ è liscio (cioè il divisore degli zeri di s consta di punti distinti (con molteplicità uno)).*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{P} := \mathbb{P}(H^0(L))$ e sia $Z \subset \mathbb{P} \times C$, $Z = \{([s], x) \mid s(x) = 0\}$. La mappa $p : Z \to C$ indotta dalla proiezione naturale, verifica $p^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}(H^0(L(-x)))$. Siccome L è generato dalle sezioni globali $H^0(L(-x))$ è un iperpiano di $H^0(L)$ (Esercizio **??**). Quindi tutte le fibre di p sono lisce, irriducibili, della stessa dimensione. Questo implica che Z è liscio, irriducibile (e $\dim Z = \dim C + \dim \mathbb{P} - 1$). Per il teorema di liscità generica ($ch(k) = 0$!) la fibra generica dell'applicazione indotta dalla proiezione $f : Z \to \mathbb{P}$ è liscia. Ma $f^{-1}([s]) = \{x \mid s(x) = 0\} = (s)_0$. □

Lemma 11.16. *Sia L un fascio invertibile su C, generato dalle sezioni globali. Il morfismo naturale $\delta : H^0(\omega_C \otimes L^\vee) \to H^1(L)^*$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Possiamo assumere $h^1(L) \neq 0$ (altrimenti dal Corollario 11.13, $h^0(\omega_C \otimes L^\vee) = 0$ e δ è il morfismo nullo). Se L è generato dalle sezioni globali allora L ammette una sezione con zeri semplici:

$$0 \to \mathcal{O} \to L \to \mathcal{O}_D \to 0$$

dove $D = P_1 + \cdots + P_n$, P_i punti distinti (Lemma 11.15). Abbiamo $\mathbb{P}(H^1(L)) \simeq \{H \mid \langle \phi_K(P_1), ..., \phi_K(P_n) \rangle \subset H\}$ (Lemma 11.6, Osservazione 11.7). Quindi ad ogni elemento di $H^1(L)$ corrisponde un iperpiano contenente i $\phi_K(P_i)$ e quindi (dopo pull-back per ϕ_K) un divisore canonico contenente i P_i: $K = \sum P_i + D'$, dove D' è effettivo e dove $D' \in \mathbb{P}(H^0(K - D)) \simeq H^0(\omega_C \otimes L^\vee)$. Questa corrispondenza è biunivoca, quindi $h^1(L) = h^0(\omega_C \otimes L^\vee)$ e δ è un isomorfismo. □

Il caso (C) per concludere:

Lemma 11.17. *Sia L un fascio invertibile su C con $h^0(L) > 0$. Allora δ : $H^0(\omega_C \otimes L^\vee) \to H^1(L)^*$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Possiamo assumere $h^1(L) \neq 0$. Sia $\varepsilon : H^0(L) \otimes \mathcal{O} \to L$ la mappa di valutazione delle sezioni globali. L'immagine è un sotto fascio $F \subset L$ senza torsione, quindi localmente libero. Chiaramente F è generato dalle sezioni globali e $h^0(F) = h^0(L)$. Per il Lemma 11.16, $h^1(F) = h^0(\omega_C \otimes F^\vee)$. Abbiamo una successione esatta:

$$0 \to F \to L \to \mathcal{T} \to 0$$

dove $\mathcal{T}$ è un fascio di torsione. Abbiamo: $\chi(L) = \chi(F) + h^0(\mathcal{T})$. In particolare $h^0(\mathcal{T}) = \deg L - \deg F$ (usare la formula di Riemann-Roch). Siccome $h^0(L) = h^0(F)$, segue che $h^1(L) = h^1(F) - h^0(\mathcal{T})$.

Dualizzando la successione qui sopra otteniamo:

$$0 \to L^\vee \to F^\vee \to \mathcal{T}' \to 0$$

Osserviamo che $h^0(\mathcal{T}') = \deg L - \deg F = h^0(\mathcal{T})$. Tensorizzando per ω_C otteniamo:

$$0 \to L^\vee \otimes \omega_C \to F^\vee \otimes \omega_C \xrightarrow{g} \mathcal{T}' \to 0$$

Segue che $h^0(\omega_C \otimes L^\vee) = h^0(\omega_C \otimes F^\vee) - \dim(Im(g)) \geq h^0(\omega_C \otimes F^\vee) - h^0(\mathcal{T})$. Pertanto $h^0(\omega_C \otimes L^\vee) \geq h^1(F) - h^0(\mathcal{T}) = h^1(L)$. Segue che δ è un isomorfismo.

$\square$

Questo conclude la dimostrazione della dualità di Serre.

11.4 Sistemi lineari, morfismi nello spazio proiettivo.

Ad ogni divisore $\mathcal{D}$ sulla curva X abbiamo associato un fibrato in rette (fascio localmente libero di rango uno) $L = \mathcal{O}(\mathcal{D})$ e abbiamo visto che $|\mathcal{D}| \simeq \mathbb{P}(H^0(L))$, qui $|\mathcal{D}| := \{D \mid D$ è un divisore effettivo con $D \sim \mathcal{D}\}$ è il *sistema lineare completo* associato a $\mathcal{D}$.

Definizione 11.18. *Un* sistema lineare δ *è un sotto spazio lineare di un sistema lineare completo. La dimensione di* δ *è la sua dimensione in quanto spazio proiettivo.*

Se $\delta \subset |D_0|$, allora $\delta = \mathbb{P}(V)$ dove V è un sotto spazio vettoriale di $H^0(\mathcal{O}(D_0))$. Se $\dim \delta = r$ (nella terminologia classica si usa dire che δ è ∞^r), allora $\dim_k V = r + 1$ è la dimensione "vettoriale" del sistema lineare.

Un sistema lineare ha anche un grado: se $\delta \subset |D_0|$ e se $d = \deg D_0$, si dice che δ ha grado d. Nella terminologia classica un g^r_d è un sistema ∞^r, di grado d ("una famiglia lineare ∞^r di divisori di grado d").

Definizione 11.19. *Un sistema lineare δ è senza punti base se per ogni punto $x \in X$ esiste un divisore $D \in \delta$ tale che $x \notin D$.*
Quindi δ è senza punti base se non tutti i divisori di δ passano per uno stesso punto di X.

Sia $\delta = \mathbb{P}(V)$ un sistema lineare, ∞^n, senza punti base e sia $(s_0, s_1, ..., s_n)$ una base di $V \subset H^0(\mathcal{O}(D_0))$. Possiamo definire un morfismo $X \to \mathbb{P}^n$ tramite $x \to (s_0(x) : s_1(x) : ... : s_n(x))$ (qui $s_i(x) \in \mathcal{O}(D_0)(x) = \mathcal{O}(D_0)_x / m_x \mathcal{O}(D_0)_x \simeq k$). Siccome non tutti gli s_i si annullano in x, abbiamo un punto di $\mathbb{P}^n$ ben definito.

Detto in un altro modo, sia X_i l'aperto di X dove $(s_i)_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{O}(D_0)_x$. Definiamo un'applicazione da X_i nell'aperto standard di $\mathbb{P}^n$, $U_i = \{x_i \neq 0\}$ nel modo seguente: abbiamo $U_i = \mathit{Spec}\, k[y_1, ..., y_n]$ $(y_j = x_j/x_i)$, allora il morfismo di anelli $k[y_1, ..., y_n] \to \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) : y_j \to s_j/s_i$, fornisce $X_i \to U_i$ ([6], II Ex. 2.4). Siccome gli X_i ricoprono X (δ senza punti base) e siccome tutti questi morfismi si incollano, otteniamo un morfismo $X \to \mathbb{P}^n$.

Una descrizione "geometrica" più intrinseca è la seguente. Sia $\varphi : X \to \delta^* = \mathbb{P}(V)^*$, tale che se $x \in X$, $\varphi(x)$ è l'iperpiano (perché δ è senza punti base), h, dei divisori di δ che contengono x. L'iperpiano h corrisponde ad un punto nello spazio duale δ^*.

Viceversa se $C \subset \mathbb{P}^n$ è una curva non degenere (i.e. non contenuta in nessun iperpiano), allora, se H è un iperpiano, $C \cap H$ è un insieme finito di punti, cioè un divisore. Se H' è un altro iperpiano, il divisore $C \cap H'$ è linearmente equivalente al divisore $C \cap H$ (considerare la funzione razionale

H/H'). In particolare (se contati con molteplicità) $\deg(C \cap H) = \deg(C \cap H')$. Considerando tutti gli iperpiani otteniamo un sistema lineare, δ, ∞^n, senza punti base, di grado $d = \deg(C \cap H)$.

Definizione 11.20. *Con le notazioni precedenti, il fascio invertibile $\mathcal{O}_C(1)$ è il fascio $\mathcal{O}_C(D)$ dove D è un* divisore iperpiano *($D = C \cap H$ per un qualche iperpiano H). Il grado di $\mathcal{O}_C(1)$ è il grado di $C \subset \mathbb{P}^n$.*

Osservazione 11.21. Un'altra descrizione del fascio $\mathcal{O}_C(1)$ è la seguente: $\mathcal{O}_C(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} \mathcal{O}_C$, cioè $\mathcal{O}_C(1)$ è la *restrizione* a C di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Attenzione che si tratta della restrizione *algebrica* (l'unica che abbia un senso).

Vediamo quindi che esiste una corrispondenza tra sistemi lineari senza punti base su C e morfismi da C nello spazio proiettivo (questo spiega l'importanza della nozione di sistema lineare).

Abbiamo un criterio coomologico per decidere se un sistema lineare *completo* è senza punti base.

Lemma 11.22. *Sia D_0 un divisore sulla curva C. Sono equivalenti:*
1) Il sistema lineare completo $|D_0|$ è senza punti base
2) Il fascio invertibile $\mathcal{O}_C(D_0)$ è generato dalle sezioni globali.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Sia $x \in C$. Siccome $|D_0|$ è senza punti base, esiste $D \in |D_0|$ che non contiene x. Per la Proposizione 10.3 D corrisponde a una sezione $s \in H^0(\mathcal{O}_C(D_0))$ il cui divisore degli zeri $(s)_0$ è D. In particolare $s(x) \neq 0$. Quindi $s(x)$ genera $\mathcal{O}_C(D_0))(x)$ e (Nakayama) s_x genera $\mathcal{O}_C(D_0))_x$.
2) $\Rightarrow$ 1). Sia $x \in C$. Siccome $\mathcal{O}_C(D_0)$ è generato dalle sezioni globali, esiste $s \in H^0(\mathcal{O}_C(D_0))$ tale che $s(x) \neq 0$. Per la Proposizione 10.3, s corrisponde a un divisore $D \in |D_0|$ tale che $(s)_0 = D$, quindi $x \notin D$. □

Lemma 11.23. *Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile sulla curva C. Allora $\mathcal{L}$ è generato dalle sezioni globali se e solo se: $h^0(\mathcal{L}(-x)) = h^0(\mathcal{L}) - 1, \forall x \in C$.*

Qui $\mathcal{L}(-x) := \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-x)$.

Dimostrazione. Sia $x \in C$, abbiamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(-x) \to \mathcal{O} \to k(x) \to 0$$

Qui $k(x)$ indica il fascio grattacielo di spiga $\mathcal{O}_{\{x\}} \simeq k$, cioè il fascio che ha supporto nel punto x e la cui spiga è k. Tensorizzando con $\mathcal{L}$ otteniamo:

$$0 \to \mathcal{L}(-x) \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}(x) \simeq k \to 0$$

Infatti siccome $\mathcal{L}$ è localmente libero la successione rimane esatta a sinistra. Inoltre $\mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) = \mathcal{L}(x) \simeq k$.

Prendendo la coomologia abbiamo:

$$0 \to H^0(\mathcal{L}(-x)) \to H^0(\mathcal{L}) \xrightarrow{f_x} k \simeq \mathcal{L}(x) \to \cdots$$

L'applicazione f_x non è altro che $v_x : s \to s(x)$. Adesso $\mathcal{L}$ è generato dalle sezioni globali se e solo se v_x è suriettiva $\forall x \in C$ e questo è equivalente a: $h^0(\mathcal{L}(-x)) = h^0(\mathcal{L}) - 1$, $\forall x \in C$. □

Questo Lemma ha una conseguenza importante:

Corollario 11.24. *Sia D un divisore sulla curva C. Se $\deg D \geq 2g$, allora $|D|$ è senza punti base.*

Dimostrazione. Per il teorema di Riemann-Roch abbiamo: $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D - g + 1 + h^1(\mathcal{O}(D))$. Per dualità di Serre: $h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\omega_C(-D))$. Abbiamo $\deg(\omega_C(-D)) = 2g - 2 - \deg D < 0$. Quindi $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D - g + 1$.

Nello stesso modo calcoliamo $h^0(\mathcal{O}(D - x))$. Siccome $\deg(\omega_C(-D + x)) = 2g - 2 - \deg D + 1 < 0$, concludiamo che $h^0(\mathcal{O}(D - x)) = \deg D - 1 - g + 1 = h^0(\mathcal{O}(D)) - 1$. Si conclude con il Lemma 11.23. □

Un sistema lineare, δ, senza punti base fornisce un morfismo $\varphi : C \to \mathbb{P}^n$, rimane da capire quand'è che φ è un'immersione chiusa (in questo caso l'immagine sarà una curva liscia di $\mathbb{P}^n$).

Una condizione necessaria è che φ sia iniettiva. Dal punto di vista dei divisori questo si traduce nel modo seguente: siano $x \neq y$ due punti distinti di C. Abbiamo $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ se esiste un divisore $D \in \delta$ tale che $x \in D$, $y \notin D$ ("δ separa i punti"). Infatti il divisore D corrisponde a un iperpiano che contiene $\varphi(x)$, ma non contiene $\varphi(y)$.

Se φ è iniettiva, è biiettiva sull'immagine. L'applicazione φ è continua e, trattandosi di un morfismo tra varietà proiettive, è chiusa. Quindi se φ è iniettiva, $C \to \varphi(C)$ è un omeomorfismo. Per vedere che φ è un isomorfismo basta vedere che $X = \varphi(C)$ è liscia. Infatti in questo caso φ è un morfismo di grado uno tra due curve lisce, quindi un isomorfismo. Adesso $X \subset \mathbb{P}^n$ è liscia nel punto $P \in X$ se e solo se esiste un iperpiano H che interseca X in P con molteplicità uno. Se $P = \varphi(x)$, questo equivale a dire che esiste $D \in \delta$ che contiene x ma non $2x$ ("δ separa i vettori tangenti").

Definizione 11.25. *Un sistema lineare δ sulla curva C è* molto ampio *se:*

1. *"separa i punti": Per ogni $x, y \in C, x \neq y$, $\dim(\delta - x - y) = \dim(\delta) - 2$ (cioè y non è un punto base di $\delta - x$)*

2. "separa i vettori tangenti": Per ogni $x \in C$, $\dim(\delta - 2x) = \dim(\delta) - 2$ (x non è un punto base di $\delta - x$).

Un sistema molto ampio è chiaramente senza punti base. Abbiamo visto:

Proposizione 11.26. *Se δ è un sistema lineare molto ampio sulla curva C allora il morfismo corrispondente $\varphi : C \to \mathbb{P}^n$ è un'immersione chiusa. Quindi $X = \varphi(C)$ è una curva liscia isomorfa a C.*

Nel caso dei sistemi lineari *completi* abbiamo ancora un criterio coomologico:

Lemma 11.27. *Il sistema lineare completo $|D|$ è molto ampio se e solo se: $\forall x, y \in C$ (x e y non necessariamente distinti):*

$$h^0(\mathcal{O}(D - x - y)) = h^0(\mathcal{O}(D)) - 2.$$

Dimostrazione. Analoga a quella del Lemma 11.23. □

Anche questa volta abbiamo un corollario importante:

Corollario 11.28. *Sia D un divisore su C. Se $\deg D \geq 2g + 1$, allora il sistema lineare completo $|D|$ è molto ampio.*

Dimostrazione. Analoga a quella del Corollario 11.24. □

Si osserverà che non c'è nessun criterio "numerico" (sul grado) per i sistemi non completi.

Il risultato che segue mostra che $\mathbb{P}^3$ è l'ambiente naturale per studiare le curve (cf Esercizio 62):

Teorema 11.29. *Ogni curva proiettiva liscia può essere immersa in $\mathbb{P}^3$.*

Dimostrazione. Sia C una curva proiettiva liscia di genere g. Sia D un divisore di grado $d > 2g$. Per il Corollario 11.28, il sistema lineare $|D|$ è molto ampio e immerge C in $\mathbb{P}^n$, con $n = d - g$. Sia $\varphi(C) = X \subset \mathbb{P}^n$. Se p è un punto di $\mathbb{P}^n$ che non sta su una bi-secante o una tangente a X, allora la restrizione a X della proiezione di centro p induce un morfismo $\pi_p : X \to \mathbb{P}^{n-1}$ che è un isomorfismo sull'immagine. Sia $Sec(X)$ la chiusura di $\bigcup \langle x, y \rangle$, $x, y \in X, x \neq y$ ($Sec(X)$ è la varietà delle secanti di X). La varietà $Sec(X)$ può essere parametrizzata nel modo seguente: darsi un punto di $Sec(X)$ torna a darsi due punti x, y di X (∞^2 parametri) e un punto sulla retta $\langle x, y \rangle$ (∞^1 parametri). Vediamo quindi che $\dim(Sec(X)) \leq 3$. Quindi se $n > 3$ possiamo sempre proiettare isomorficamente X in $\mathbb{P}^{n-1}$. □

Esercizi.

Esercizio 62 *Sia* $C \subset \mathbb{P}^2$ *(*$k = \overline{k}$*) una curva liscia di grado* d*.*
1) Mostrare che C *è irriducibile.*
2) Mostrare che esiste una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

Concludere che $g(C) = (d-1)(d-2)/2$*. Si osserverà che non tutti i generi possibili sono realizzati (non esiste nessuna curva piana liscia di genere 2).*

Esercizio 63 *Sia* C *una curva di genere* g *e sia* L *un fascio invertibile su* C*. Si dice che* L *è molto ampio se il sistema completo* $\mathbb{P}(H^0(L))$ *è molto ampio.*
(i) Se $g = 0$*,* L *è molto ampio se e solo se* $L = \mathcal{O}(a)$*, con* $a \geq 1$*.*
(ii) Se $g = 1$*,* L *è molto ampio se e solo se* $\deg(L) \geq 3$*. In particolare ogni curva di genere uno può essere immersa in* $\mathbb{P}^2$*, con immagine una cubica piana liscia.*
(iii) Se $g = 2$*,* L *è molto ampio se e solo se* $\deg(L) \geq 5$ *(in particolare* ω_C *non è molto ampio).*

Esercizio 64 *Sia* C *una curva di genere* g*.*
(i) Mostrare che se $g \geq 2$*,* ω_C *è senza punti base. Quindi il sistema lineare completo* $\mathbb{P}(H^0(\omega_C))$ *determina un morfismo* $C \to \mathbb{P}^{g-1}$*; questo morfismo non è altro che il morfismo* ϕ_K *della Proposizione 11.3.*
(ii) Mostrare che ω_C *è molto ampio se e solo se* C *non possiede un* g_2^1 *(sistema lineare* ∞^1*, di grado due). Una curva con un* g_2^1 *si dice* iper-ellittica.
(iii) Mostrare che C *è iper-ellittica se e solo se esiste un morfismo di grado due* $C \to \mathbb{P}^1$*.*
(iv) Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ *una quartica piana liscia. Mostrare che* X *non è iper-ellittica.*

— : That's all folks! : —

Parte III

Appendice A.

12

Morfismi finiti tra curve.

Ricordiamo la definizione:

Definizione 12.1. *Un morfismo $f : X \to Y$ è* finito *se esiste un ricoprimento V_i di Y con aperti affini tale che $U_i = f^{-1}(V_i)$ sia affine e tale che $\mathcal{O}(U_i)$ sia un $\mathcal{O}(V_i)$-modulo finitamente generato.*

Vedere [6], II, p. 84. Questa definizione è valida sia nell'ambito delle varietà che in quello degli schemi.

Proposizione 12.2. *Un morfismo non costante $f : X \to Y$ tra due curve proiettive, non sinogolari, irriducibili è un morfismo finito.*

Prima di dimostrare questa proposizione ricordiamo alcuni fatti di algebra. Siano A, B due anelli $A \subset B$. Un elemento $b \in B$ è *intero* su A se b è radice di un polinomio monico a coefficienti in A. L'insieme degli elementi di B interi su A è un sotto anello di B, chiamato la chiusura integrale di A in B. L'anello B è *intero* su A se ogni $b \in B$ è intero su A (cioè B è la chiusura integrale di A in B).

Se A è integro, A è *integralmente chiuso* se è uguale alla sua chiusura integrale in K, il suo campo dei quozienti.

Useremo il seguente risultato ([6], I Thm. 3.9A):

Teorema 12.3. *Sia A un anello integro che è un k-algebra di tipo finito (k un campo). Sia L un'estensione finita di K, il campo dei quozienti di A. Se A' è la chiusura integrale di A in L, allora A' è un A-modulo finitamente generato e una k-algebra di tipo finito.*

Dimostriamo adesso la Proposizione 12.2:

Dimostrazione. Sia $y \in Y$ e sia V un intorno affine di y. Allora $\mathcal{O}(V) \subset k(Y) \subset k(X)$. Sia A la chiusura integrale di $\mathcal{O}(V)$ in $k(X)$. Per il Teorema

12.3, A è un $\mathcal{O}(V)$-modulo finitamente generato e una k-algebra di tipo finito. Quindi possiamo vedere A come l'anello di una varietà affine $A = \mathcal{O}(U)$, dove U è una curva affine. Siccome il campo dei quozienti di A è $k(X)$, la curva U è birazionale a X, pertanto possiamo identificare U a un aperto affine di X. Per concludere la dimostrazione basta vedere che $f^{-1}(V) = U$.

Sia $y_0 \in V$ e supponiamo che esista $x_0 \notin U$ tale che $f(x_0) = y_0$. Mostriamo che questo conduce ad un assurdo. Indichiamo con $x_1, ..., x_t$ gli $x \in U$ con $f(x) = y_0$. Possiamo trovare una funzione razionale g su X con $g \notin \mathcal{O}_{x_0}$ ma g regolare in $x_1, ..., x_t$. Possiamo trovare $h \in \mathcal{O}(V)$ tale che $h(y_0) \neq 0$ e tale che $gh \in \mathcal{O}(U)$. Infatti se g ha un polo in $z \in U$, allora $g_z = v/t_z^m$, dove t_z è un parametro locale. Abbiamo $f(z) = y \neq y_0$. Sia t un parametro locale in y. Allora $f^* t_z = t_z^k$. Sia $h \in \mathcal{O}(V)$ con $h(y_0) \neq 0$ e con $\nu_y(h) = n$, $nk \geq m$, allora gh (cioè $g.(h \circ f)$) è regolare in z.

Quindi $gh \in \mathcal{O}(U) = A$ e pertanto gh è intero su $\mathcal{O}(V)$:

$$(gh)^n + b_1(gh)^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

con $b_i \in \mathcal{O}(V)$. Segue che: $-(gh) = b_1 + \dfrac{b_2}{gh} + \cdots + \dfrac{b_n}{(gh)^{n-1}}$. Ma gh non è regolare in x_0 perché g non lo è e $h(x_0) \neq 0$. Questo implica che $1/gh$ è regolare in x_0. Quindi nell'ultima uguaglianza il membro di sinistra non è regolare in x_0, mentre quello di destra lo è: assurdo. □

Tornando alla dimostrazione

Proposizione 12.4. *L'anello $\widetilde{\mathcal{O}}$ è un $\mathcal{O}_y$-modulo libero di rango d.*

Dimostrazione. Mostriamo prima che $\widetilde{\mathcal{O}}$ è un $\mathcal{O}_y$-modulo finitamente generato. Riprendiamo le notazioni della dimostrazione della Proposizione 12.2. Quindi $f : U \to V$, U, V affini, $y \in V$, $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_r\}$, $\mathcal{O}(V) \subset \mathcal{O}(U)$ e $\mathcal{O}(U)$ è un $\mathcal{O}(V)$-modulo finitamente generato. Sia $g \in \widetilde{\mathcal{O}}$ e siano z_i i poli di g in U. Possiamo trovare $h \in \mathcal{O}(V)$ tale che: $h(y) \neq 0$, $h(y_i) = 0$ ($y_i = f(z_i)$, quindi $y_i \neq y$) e $gh \in \mathcal{O}(U)$. Siccome $h(y) \neq 0$, $1/h \in \mathcal{O}_y$. Quindi $g \in (1/h).\mathcal{O}(U)$. Questo mostra $\widetilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_y.\mathcal{O}(U)$. L'inclusione opposta è chiara (pensare a $\mathcal{O}_y = \{(f^{-1}(V_i) = U_i, g_y \circ f)\}$, dove $(V_i, g_y) \in \mathcal{O}_{Y,y}$ è un germe in y). Siccome $\mathcal{O}(U)$ è generato da, diciamo, $h_1, ..., h_m$ su $\mathcal{O}(V)$, ogni elemento di $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_y.\mathcal{O}(U)$ si scrive $\sum(s_i b_i)h_i$, con $s_i b_i \in \mathcal{O}_y$. Quindi $\widetilde{\mathcal{O}}$ è un $\mathcal{O}_y$-modulo finitamente generato.

Per il teorema di struttura dei moduli su un P.I.D. $\widetilde{\mathcal{O}}$ è somma diretta di un modulo libero di tipo finito con un modulo di torsione. Siccome $\widetilde{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{O}_y$ sono contenuti nel campo $k(Y)$, il modulo di torsione è nullo. Segue che $\widetilde{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}_y^m$. La dimensione m è il massimo numero di elementi di $\widetilde{\mathcal{O}}$ indipendenti su $\mathcal{O}_y$. Siccome il campo dei quozienti dell'anello integro $\mathcal{O}_y$ è $k(Y)$, m è anche il massimo numero di elementi indipendenti su $k(Y)$. Siccome $\widetilde{\mathcal{O}} \subset k(X)$, abbiamo $m \leq d := [k(X) : k(Y)]$. Sia $(g_1, ..., g_d)$ una base di $k(X)$ su $k(Y)$. Sia p il massimo degli ordini dei poli dei g_j nei punti x_i. Allora $g_j t^p$ è regolare in $x_i, \forall i$. Infatti da $t = t_1^{k_1} ... t_r^{k_r}.v$, segue che $\nu_{x_i}(g_j t^p) > 0$. Quindi $g_1 t^p, ..., g_d t^p \in \widetilde{\mathcal{O}}$. Chiaramente i $g_j t^p$ sono indipendenti su $k(Y)$ perché i g_j lo sono. Quindi $m = d$. $\square$

Possiamo finalmente dimostrare il nostro teorema:

Teorema 12.5. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo non costante tra due curve proiettive, non singolari, irriducibili. Il morfismo f induce $k(Y) \subset k(X)$, estensione finita. Sia $d = [k(X) : k(Y)]$. Sia $y \in Y$ e sia $f^*(y) = \sum m_i x_i$ il divisore associato. Allora $\sum m_i = d$ (cioè ogni fibra di f consta di d punti, contati con molteplicità).*

Dimostrazione. Riprendiamo le notazioni precedenti: $t \in \mathcal{O}_y$ è un parametro locale. Allora $t \in \mathcal{O}_y \subset \widetilde{\mathcal{O}}$ e quindi (Teorema 7.1) $t = t_1^{m_1} ... t_r^{m_r}.v$, v invertibile. Siccome i t_i sono due a due primi tra di loro, per il teorema cinese: $\widetilde{\mathcal{O}}/(t) \simeq \bigoplus \widetilde{\mathcal{O}}/(t_i^{m_i})$. Adesso non è troppo difficile vedere che $\dim_k(\widetilde{\mathcal{O}}/t_i^{m_i}) = m_i$. Quindi $\dim_k(\widetilde{\mathcal{O}}/(t)) = \sum m_i$. Per la Proposizione 12.4, $\widetilde{\mathcal{O}}/(t) \simeq (\mathcal{O}_y/(t))^d$. Ma $\mathcal{O}_y/(t) = \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y \simeq k$. Quindi $\sum m_i = d$. $\square$

Un altro modo di arrivare a questo risultato è il seguente. Il morfismo $f : X \to Y$ è piatto per [6], III, Proposition 9.7 (osservare l'ipotesi Y non singolare). Siccome $X \subset \mathbb{P}^n$, abbiamo

$$\begin{array}{ccc} X & \subset & \mathbb{P}^n \times Y \\ & f \searrow & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

Quindi le fibre di f formano una famiglia piatta di sotto schemi chiusi zero-dimensionali di X, quindi di $\mathbb{P}^n$, parametrizzata da Y. Quindi il polinomio di Hilbert delle fibre è costante ([6], III, Thm. 9.9). Questo significa che il grado delle fibre è costante. Rimane da vedere che questo grado è genericamente d.

Bibliografia

1. Atiyah, M.F.-Macdonald, I.G.: *Introduzione a l'algebra commutativa* con l'Appendice di P. maroscia, Feltrinelli (1981)
2. Bogomolov, F.-Petrov, T.: *Algebraic curves and one dimensional fields*, Courant Lectures Notes in Mathematics, **8**, xi, 1-214 (2002)
3. Eisenbud, D.: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, GTM **150**, Springer (1995)
4. Ellia, Ph.: *Riemann-Roch in 9 settimane e 1/2*
5. Griffiths, Ph.-Harris, J.: *Principles of algebraic geometry*, Wiley and Sons (1978)
6. Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*, GTM **52**, Springer (1977)
7. Matsumura, H.: *Commutative algebra (Second Ed.)*, Math. Lectue Notes Serie, Benjamin (1980)
8. Serre, J.P.: *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Maths, **61**, 197-278 (1955)
9. Shafarevich, I.: *Basic algebraic geometry, 1*, Second Ed., Springer-Verlag (1994)