L'infinito (parte II).

Ph. Ellia

9 Giugno 2014

Alla ricerca di un infinito $> c$.

Dopo avere dimostrato $\aleph_0 < c$, Cantor parte alla ricerca di un infinito più grande di c.

Alla ricerca di un infinito $> c$.

Dopo avere dimostrato $\aleph_0 < c$, Cantor parte alla ricerca di un infinito più grande di c.

Abbiamo visto che $c = card(]0,1[)$, quindi l'idea naturale è considerare un quadrato nel piano. Per esempio $K =]0,1[\times]0,1[$.

Alla ricerca di un infinito $> c$.

Dopo avere dimostrato $\aleph_0 < c$, Cantor parte alla ricerca di un infinito più grande di c.

Abbiamo visto che $c = card(]0,1[)$, quindi l'idea naturale è considerare un quadrato nel piano. Per esempio $K =]0,1[\times]0,1[$.

Ma se $(x,y) \in K$, allora $x = 0, a_0 a_1 ... a_n...$ e $y = 0, b_0 b_1 ... b_n...$ e possiamo associare a (x,y) il punto $0, a_0 b_0 a_1 b_1 ... a_n b_n...$ di $J =]0,1[$. Prendendo le solite precauzioni (unicità dello sviluppo), vediamo che abbiamo un'applicazione iniettiva $\varphi : K \to J$.

Alla ricerca di un infinito $> \mathsf{c}$.

L'applicazione non è suriettiva: per esempio $0,102010...1020...$ non è nell'immagine: dovrebbe venire da $x = 0,1212...12...$ e $y = 0,00...00...$ ma $y = 0$ non è permesso per un punto di K.

Alla ricerca di un infinito $> c$.

L'applicazione non è suriettiva: per esempio $0,102010...1020...$ non è nell'immagine: dovrebbe venire da $x = 0,1212...12...$ e $y = 0,00...00...$ ma $y = 0$ non è permesso per un punto di K.

Ad ogni modo l'applicazione iniettiva φ mostra $card(K) \leq card(J) = c$.

Alla ricerca di un infinito $> c$.

L'applicazione non è suriettiva: per esempio $0,102010...1020...$ non è nell'immagine: dovrebbe venire da $x = 0,1212...12...$ e $y = 0,00...00...$ ma $y = 0$ non è permesso per un punto di K.

Ad ogni modo l'applicazione iniettiva φ mostra $card(K) \leq card(J) = c$.

Siccome $\psi : J \to K : a \to (a, 1/2)$ è chiaramente iniettiva, abbiamo $c = card(J) \leq card(K)$ e dal teorema di Cantor-Bernstein segue che $card(K) = c$.

Alla ricerca di un infinito $> c$.

L'applicazione non è suriettiva: per esempio $0,102010...1020...$ non è nell'immagine: dovrebbe venire da $x = 0,1212...12...$ e $y = 0,00...00...$ ma $y = 0$ non è permesso per un punto di K.

Ad ogni modo l'applicazione iniettiva φ mostra $card(K) \leq card(J) = c$.

Siccome $\psi : J \to K : a \to (a, 1/2)$ è chiaramente iniettiva, abbiamo $c = card(J) \leq card(K)$ e dal teorema di Cantor-Bernstein segue che $card(K) = c$.

Niente da fare!! Bisogna trovare qualcos'altro.

L'insieme delle parti.

Se X è un insieme possiamo considerare $\mathcal{P}(X)$ *l'insieme delle parti di* X, cioè l'insieme i cui elementi sono i sotto insiemi di X.

Per esempio se $X = \{a, b\}$ è un insieme con due elementi, allora $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Qui $\emptyset$ è (l'unico) insieme che non ha elementi (ha 0 elementi)...
L'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme.

L'insieme delle parti.

Se X è un insieme possiamo considerare $\mathcal{P}(X)$ *l'insieme delle parti di* X, cioè l'insieme i cui elementi sono i sotto insiemi di X.

Per esempio se $X = \{a, b\}$ è un insieme con due elementi, allora $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Qui $\emptyset$ è (l'unico) insieme che non ha elementi (ha 0 elementi)... L'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme.

Se $X = \{a, b, c\}$ ha tre elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(X)$?

L'insieme delle parti.

Se X è un insieme possiamo considerare $\mathcal{P}(X)$ *l'insieme delle parti di* X, cioè l'insieme i cui elementi sono i sotto insiemi di X.

Per esempio se $X = \{a, b\}$ è un insieme con due elementi, allora $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Qui $\emptyset$ è (l'unico) insieme che non ha elementi (ha 0 elementi)...
L'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme.

Se $X = \{a, b, c\}$ ha tre elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(X)$?

In questo caso $\mathcal{P}(X)$ ha 8 elementi.

L'insieme delle parti.

Problema:

Se X è un insieme con n elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(X)$?

La risposta é:

L'insieme delle parti.

Problema:

Se X è un insieme con n elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(X)$?

La risposta é:

Teorema:

Se X è un insieme (finito) con n elementi, allora $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

L'insieme delle parti.

Problema:

Se X è un insieme con n elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(X)$?

La risposta é:

Teorema:

Se X è un insieme (finito) con n elementi, allora $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

Come si dimostra?

L'insieme delle parti.

Problema:

Se X è un insieme con n elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(X)$?

La risposta é:

Teorema:

Se X è un insieme (finito) con n elementi, allora $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

Come si dimostra?

Per induzione...

Il metodo di dimostrazione per induzione.

La dimostrazione per induzione si basa sul *principio del minimo*:

Principio del minimo:

Ogni sotto insieme non vuoto $X \subset \mathbb{N}$ ha un più piccolo elemento.
Cioè esiste $m_0 \in X$ tale che $n \in X \Rightarrow n \geq m_0$.

Il metodo di dimostrazione per induzione.

La dimostrazione per induzione si basa sul *principio del minimo*:

Principio del minimo:

Ogni sotto insieme non vuoto $X \subset \mathbb{N}$ ha un più piccolo elemento. Cioè esiste $m_0 \in X$ tale che $n \in X \Rightarrow n \geq m_0$.

Se voglio dimostrare una proprietà $P(n)$ che dipende da $n \in \mathbb{N}$ (per esempio: se X ha n elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi), mi basta dimostrare:

- $P(0)$
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Infatti sia $Z = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è falsa } \}$. Supponiamo Z non vuoto, allora ammette un più piccolo elemento, m. Abbiamo $m > 0$ perché $P(0)$ è vera. Quindi $m - 1 \in \mathbb{N}$ e $m - 1 \notin Z$. Pertanto $P(m-1)$ è vera. Ma $P(m-1) \Rightarrow P(m)$, quindi $P(m)$ è vera, cioè $m \notin Z$: contraddizione.
Pertanto Z è vuoto e $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Infatti sia $Z = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è falsa }\}$. Supponiamo Z non vuoto, allora ammette un più piccolo elemento, m. Abbiamo $m > 0$ perché $P(0)$ è vera. Quindi $m - 1 \in \mathbb{N}$ e $m - 1 \notin Z$. Pertanto $P(m-1)$ è vera. Ma $P(m-1) \Rightarrow P(m)$, quindi $P(m)$ è vera, cioè $m \notin Z$: contraddizione.
Pertanto Z è vuoto e $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Nel nostro caso $P(0)$ è: se X ha zero elementi (cioè $X = \emptyset$), allora $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\emptyset)$ ha $2^0 = 1$ elemento.

Infatti: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (l'unico sottinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto)

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Sia Y un insieme con $n+1$ elementi. Per ipotesi di induzione sappiamo che ogni insieme, X, con n elementi verifica $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

Sia $x_0 \in Y$. Ci sono due tipi di sotto insiemi di Y: quelli che contengono x_0 e quelli che non contengono x_0.

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Sia Y un insieme con $n+1$ elementi. Per ipotesi di induzione sappiamo che ogni insieme, X, con n elementi verifica $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

Sia $x_0 \in Y$. Ci sono due tipi di sotto insiemi di Y: quelli che contengono x_0 e quelli che non contengono x_0.

Un sotto insieme che contiene x_0 si scrive $\{x_0\} \cup A$ (dove $x_0 \notin A$).

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Sia Y un insieme con $n+1$ elementi. Per ipotesi di induzione sappiamo che ogni insieme, X, con n elementi verifica $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

Sia $x_0 \in Y$. Ci sono due tipi di sotto insiemi di Y: quelli che contengono x_0 e quelli che non contengono x_0.

Un sotto insieme che contiene x_0 si scrive $\{x_0\} \cup A$ (dove $x_0 \notin A$).

La corrispondenza $\{x_0\} \cup A \;\; \leftrightarrow \;\; A$ mostra che il numero di sotto insiemi che contengono x_0 è uguale al numero di sotto insiemi che non contengono x_0.

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Sia Y un insieme con $n+1$ elementi. Per ipotesi di induzione sappiamo che ogni insieme, X, con n elementi verifica $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

Sia $x_0 \in Y$. Ci sono due tipi di sotto insiemi di Y: quelli che contengono x_0 e quelli che non contengono x_0.

Un sotto insieme che contiene x_0 si scrive $\{x_0\} \cup A$ (dove $x_0 \notin A$).

La corrispondenza $\{x_0\} \cup A \quad \leftrightarrow \quad A$ mostra che il numero di sotto insiemi che contengono x_0 è uguale al numero di sotto insiemi che non contengono x_0.
Sia k questo numero, quindi $card(\mathcal{P}(Y)) = 2k$.

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Sia Y un insieme con $n+1$ elementi. Per ipotesi di induzione sappiamo che ogni insieme, X, con n elementi verifica $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

Sia $x_0 \in Y$. Ci sono due tipi di sotto insiemi di Y: quelli che contengono x_0 e quelli che non contengono x_0.

Un sotto insieme che contiene x_0 si scrive $\{x_0\} \cup A$ (dove $x_0 \notin A$).

La corrispondenza $\{x_0\} \cup A \;\leftrightarrow\; A$ mostra che il numero di sotto insiemi che contengono x_0 è uguale al numero di sotto insiemi che non contengono x_0.
Sia k questo numero, quindi $card(\mathcal{P}(Y)) = 2k$.
Se $x_0 \notin A$, allora $A \subset Y \setminus \{x_0\} := X$ che ha n elementi. Quindi $k = 2^n$ e $card(\mathcal{P}(Y)) = 2.2^n = 2^{n+1}$.

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Abbiamo quindi dimostrato $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e quindi $P(n)$ è vera per ogni n: il teorema è dimostrato.

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Abbiamo quindi dimostrato $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e quindi $P(n)$ è vera per ogni n: il teorema è dimostrato.

In particolare, se X è un insieme finito: $card(X) < card(\mathcal{P}(X))$. Infatti $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$.

Il metodo di dimostrazione per induzione.

Abbiamo quindi dimostrato $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e quindi $P(n)$ è vera per ogni n: il teorema è dimostrato.

In particolare, se X è un insieme finito: $card(X) < card(\mathcal{P}(X))$. Infatti $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$.

A questo punto Cantor si chiede:

Cosa succede se X è infinito?

Infiniti transfiniti.

Arriviamo al grande teorema di Cantor la cui dimostrazione è semplice, elegante, sorprendente:

Teorema (Cantor):

Sia X un insieme qualsiasi (finito o infinito), allora **non** esiste nessuna applicazione bi-univoca $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$.

La dimostrazione è una variante del procedimento diagonale.

Infiniti transfiniti.

Supponiamo che esista una tale applicazione bi-univoca. Ad ogni $x \in X$ viene associato un sotto insieme $\varphi(x)$ di X e se $Y \subset X$ è un sotto insieme abbiamo $Y = \varphi(x)$ per un qualche $x \in X$.

Infiniti transfiniti.

Supponiamo che esista una tale applicazione bi-univoca. Ad ogni $x \in X$ viene associato un sotto insieme $\varphi(x)$ di X e se $Y \subset X$ è un sotto insieme abbiamo $Y = \varphi(x)$ per un qualche $x \in X$.

Sia $D = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$. Abbiamo $D = \varphi(z)$ per un qualche $z \in X$.

Infiniti transfiniti.

Supponiamo che esista una tale applicazione bi-univoca. Ad ogni $x \in X$ viene associato un sotto insieme $\varphi(x)$ di X e se $Y \subset X$ è un sotto insieme abbiamo $Y = \varphi(x)$ per un qualche $x \in X$.

Sia $D = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$. Abbiamo $D = \varphi(z)$ per un qualche $z \in X$.

La domanda fatale: $z \in D$?

Infiniti transfiniti.

Supponiamo che esista una tale applicazione bi-univoca. Ad ogni $x \in X$ viene associato un sotto insieme $\varphi(x)$ di X e se $Y \subset X$ è un sotto insieme abbiamo $Y = \varphi(x)$ per un qualche $x \in X$.

Sia $D = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$. Abbiamo $D = \varphi(z)$ per un qualche $z \in X$.

La domanda fatale: $z \in D$?

- Se $z \in D$, allora $z \notin \varphi(z) = D$: contraddizione!

Infiniti transfiniti.

Supponiamo che esista una tale applicazione bi-univoca. Ad ogni $x \in X$ viene associato un sotto insieme $\varphi(x)$ di X e se $Y \subset X$ è un sotto insieme abbiamo $Y = \varphi(x)$ per un qualche $x \in X$.

Sia $D = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$. Abbiamo $D = \varphi(z)$ per un qualche $z \in X$.

La domanda fatale: $z \in D$?

- Se $z \in D$, allora $z \notin \varphi(z) = D$: contraddizione!
- Se $z \notin D$, allora $z \in \varphi(z) = D$: contraddizione!!

Infiniti transfiniti.

Supponiamo che esista una tale applicazione bi-univoca. Ad ogni $x \in X$ viene associato un sotto insieme $\varphi(x)$ di X e se $Y \subset X$ è un sotto insieme abbiamo $Y = \varphi(x)$ per un qualche $x \in X$.

Sia $D = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$. Abbiamo $D = \varphi(z)$ per un qualche $z \in X$.

La domanda fatale: $z \in D$?

- Se $z \in D$, allora $z \notin \varphi(z) = D$: contraddizione!
- Se $z \notin D$, allora $z \in \varphi(z) = D$: contraddizione!!

Questa doppia contraddizione mostra che φ non può esistere. Il teorema è dimostrato.

Infiniti transfiniti.

In realtà si è dimostrato che non esiste nessuna applicazione suriettiva $X \to \mathcal{P}(X)$.

Infiniti transfiniti.

In realtà si è dimostrato che non esiste nessuna applicazione suriettiva $X \to \mathcal{P}(X)$.

Per capire la semplicità e la genialità dell'argomento quello che sta dicendo Cantor è: per ogni insieme X e ogni applicazione $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$, se $D = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$, allora $D \notin Imm(\varphi)$, cioè non esiste nessun $x \in X$ tale che $D = \varphi(x)$.

Infiniti transfiniti.

In realtà si è dimostrato che non esiste nessuna applicazione suriettiva $X \to \mathcal{P}(X)$.

Per capire la semplicità e la genialità dell'argomento quello che sta dicendo Cantor è: per ogni insieme X e ogni applicazione $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$, se $D = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$, allora $D \notin Imm(\varphi)$, cioè non esiste nessun $x \in X$ tale che $D = \varphi(x)$.

Provare per credere!

Infiniti transfiniti.

Corollario:

Per ogni insieme X si ha: $card(X) < card(\mathcal{P}(X))$.

Infatti $X \to \mathcal{P}(X) : x \to \{x\}$ è iniettiva, quindi $card(X) \leq card(\mathcal{P}(X))$ e si conclude con il teorema di Cantor.

Infiniti transfiniti.

Corollario:

Per ogni insieme X si ha: $card(X) < card(\mathcal{P}(X))$.

Infatti $X \to \mathcal{P}(X) : x \to \{x\}$ è iniettiva, quindi $card(X) \leq card(\mathcal{P}(X))$ e si conclude con il teorema di Cantor.

Cantor ha raggiunto il suo scopo:

$$c = card(\mathbb{R}) < card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

Infiniti transfiniti.

Corollario:

Per ogni insieme X si ha: $card(X) < card(\mathcal{P}(X))$.

Infatti $X \to \mathcal{P}(X) : x \to \{x\}$ è iniettiva, quindi $card(X) \leq card(\mathcal{P}(X))$ e si conclude con il teorema di Cantor.

Cantor ha raggiunto il suo scopo:

$$c = card(\mathbb{R}) < card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

Ma si può fare ben peggio:

Infiniti transfiniti.

Corollario:

Per ogni insieme X si ha: $card(X) < card(\mathcal{P}(X))$.

Infatti $X \to \mathcal{P}(X) : x \to \{x\}$ è iniettiva, quindi $card(X) \leq card(\mathcal{P}(X))$ e si conclude con il teorema di Cantor.

Cantor ha raggiunto il suo scopo:

$$c = card(\mathbb{R}) < card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

Ma si può fare ben peggio:

$$\aleph_0 < c < card(\mathcal{P}(\mathbb{R})) < card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))) < card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})))) < \ldots$$

Infiniti transfiniti.

Corollario:

Per ogni insieme X si ha: $card(X) < card(\mathcal{P}(X))$.

Infatti $X \to \mathcal{P}(X) : x \to \{x\}$ è iniettiva, quindi $card(X) \leq card(\mathcal{P}(X))$ e si conclude con il teorema di Cantor.

Cantor ha raggiunto il suo scopo:

$$c = card(\mathbb{R}) < card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

Ma si può fare ben peggio:

$$\aleph_0 < c < card(\mathcal{P}(\mathbb{R})) < card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))) < card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})))) < \dots$$

N.B.: Si ha $card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = c$ (che si scrive anche $2^{\aleph_0} = c$).

L'insieme di tutti gli insiemi.

Una conseguenza dei risultati di Cantor è che

L'insieme di tutti gli insiemi...

L'insieme di tutti gli insiemi.

Una conseguenza dei risultati di Cantor è che

L'insieme di tutti gli insiemi...
...**non** è un insieme!!

L'insieme di tutti gli insiemi.

Una conseguenza dei risultati di Cantor è che

L'insieme di tutti gli insiemi...
...**non** è un insieme!!

Supponiamo che $\mathcal{I}$ sia l'insieme di tutti gli insiemi. Allora $\mathcal{I}$ contiene tutti gli insiemi, quindi non può essere ampliato, è l'insieme più grande in assoluto.

L'insieme di tutti gli insiemi.

Una conseguenza dei risultati di Cantor è che

L'insieme di tutti gli insiemi...
...**non** è un insieme!!

Supponiamo che $\mathcal{I}$ sia l'insieme di tutti gli insiemi. Allora $\mathcal{I}$ contiene tutti gli insiemi, quindi non può essere ampliato, è l'insieme più grande in assoluto. Però per il teorema di Cantor

$$card(\mathcal{I}) < card(\mathcal{P}(\mathcal{I}))$$

L'insieme di tutti gli insiemi.

Una conseguenza dei risultati di Cantor è che

L'insieme di tutti gli insiemi...
...**non** è un insieme!!

Supponiamo che $\mathcal{I}$ sia l'insieme di tutti gli insiemi. Allora $\mathcal{I}$ contiene tutti gli insiemi, quindi non può essere ampliato, è l'insieme più grande in assoluto. Però per il teorema di Cantor

$$card(\mathcal{I}) < card(\mathcal{P}(\mathcal{I}))$$

E quindi abbiamo una bella contraddizione nella teoria degli insiemi!

L'insieme di tutti gli insiemi.

Cantor si accorse del problema nel 1895.

L'insieme di tutti gli insiemi.

Cantor si accorse del problema nel 1895.

Un altro modo di formulare il problema è con il paradosso di Russell:

L'insieme di tutti gli insiemi.

Cantor si accorse del problema nel 1895.

Un altro modo di formulare il problema è con il paradosso di Russell:

Il paradosso di Russell

In un villaggio c'è un barbiere che fa la barba solo ed esclusivamente a tutti quelli che non si fanno la barba da sé. Chi fa la barba al barbiere?

L'insieme di tutti gli insiemi.

Cantor si accorse del problema nel 1895.

Un altro modo di formulare il problema è con il paradosso di Russell:

Il paradosso di Russell

In un villaggio c'è un barbiere che fa la barba solo ed esclusivamente a tutti quelli che non si fanno la barba da sé. Chi fa la barba al barbiere?

- Se il barbiere si fa la barba allora il barbiere non si fa la barba (da sé)

L'insieme di tutti gli insiemi.

Cantor si accorse del problema nel 1895.

Un altro modo di formulare il problema è con il paradosso di Russell:

Il paradosso di Russell

In un villaggio c'è un barbiere che fa la barba solo ed esclusivamente a tutti quelli che non si fanno la barba da sé. Chi fa la barba al barbiere?

- Se il barbiere si fa la barba allora il barbiere non si fa la barba (da sé)
- Se il barbiere non si fa la barba da sé, allora il barbiere gli fa la barba cioè il barbiere si fa la barba!

L'insieme di tutti gli insiemi.

L'unico modo per venirne fuori è decidere che la collezione di tutti gli insiemi non è un insieme, è qualcos'altro.

L'insieme di tutti gli insiemi.

L'unico modo per venirne fuori è decidere che la collezione di tutti gli insiemi non è un insieme, è qualcos'altro.

Ma allora cos'è un insieme? Ci sono certe "collezioni" che sono degli insiemi e altre che non lo sono, come si fa a decidere?

L'insieme di tutti gli insiemi.

L'unico modo per venirne fuori è decidere che la collezione di tutti gli insiemi non è un insieme, è qualcos'altro.

Ma allora cos'è un insieme? Ci sono certe "collezioni" che sono degli insiemi e altre che non lo sono, come si fa a decidere?

Si fa (non è facile, è pura logica-matematica) e si riesce pure a definire $\mathbb{N}$ con la teoria assiomatizzata degli insiemi (chiedere ai logici-matematici).

L'insieme di tutti gli insiemi.

L'unico modo per venirne fuori è decidere che la collezione di tutti gli insiemi non è un insieme, è qualcos'altro.

Ma allora cos'è un insieme? Ci sono certe "collezioni" che sono degli insiemi e altre che non lo sono, come si fa a decidere?

Si fa (non è facile, è pura logica-matematica) e si riesce pure a definire $\mathbb{N}$ con la teoria assiomatizzata degli insiemi (chiedere ai logici-matematici).

Ma in concreto, nel mondo "reale", l'infinito esiste?

L'insieme di tutti gli insiemi.

L'unico modo per venirne fuori è decidere che la collezione di tutti gli insiemi non è un insieme, è qualcos'altro.

Ma allora cos'è un insieme? Ci sono certe "collezioni" che sono degli insiemi e altre che non lo sono, come si fa a decidere?

Si fa (non è facile, è pura logica-matematica) e si riesce pure a definire $\mathbb{N}$ con la teoria assiomatizzata degli insiemi (chiedere ai logici-matematici).

Ma in concreto, nel mondo "reale", l'infinito esiste?
Penso che nessuno sia in grado di dare un esempio *concreto, reale* di un insieme infinito. L'infinito è un concetto (che vive nella mente dei matematici).

L'ipotesi del continuo.

Abbiamo visto $\aleph_0 < c$. Cantor si è chiesto se esistesse o meno un cardinale, $\aleph_1$, tra $\aleph_0$ e c ($\aleph_0 < \aleph_1 < c$).
L'ipotesi del continuo afferma che non esiste alcun cardinale tra $\aleph_0$ e c.

L'ipotesi del continuo.

Abbiamo visto $\aleph_0 < c$. Cantor si è chiesto se esistesse o meno un cardinale, $\aleph_1$, tra $\aleph_0$ e c ($\aleph_0 < \aleph_1 < c$).
L'ipotesi del continuo afferma che non esiste alcun cardinale tra $\aleph_0$ e c.

Nel 1940 Goedel (1906-1978) ha dimostrato, usando la teoria assiomatizzata degli insiemi, che non era possibile *dimostrare che l'ipotesi del continuo era falsa* (cioè è logicamente consistente con gli assiomi della matematica).

L'ipotesi del continuo.

Abbiamo visto $\aleph_0 < c$. Cantor si è chiesto se esistesse o meno un cardinale, $\aleph_1$, tra $\aleph_0$ e c ($\aleph_0 < \aleph_1 < c$).
L'ipotesi del continuo afferma che non esiste alcun cardinale tra $\aleph_0$ e c.

Nel 1940 Goedel (1906-1978) ha dimostrato, usando la teoria assiomatizzata degli insiemi, che non era possibile *dimostrare che l'ipotesi del continuo era falsa* (cioè è logicamente consistente con gli assiomi della matematica).

Ma questo non dice che sia vera!!

L'ipotesi del continuo.

Abbiamo visto $\aleph_0 < c$. Cantor si è chiesto se esistesse o meno un cardinale, $\aleph_1$, tra $\aleph_0$ e c ($\aleph_0 < \aleph_1 < c$).
L'ipotesi del continuo afferma che non esiste alcun cardinale tra $\aleph_0$ e c.

Nel 1940 Goedel (1906-1978) ha dimostrato, usando la teoria assiomatizzata degli insiemi, che non era possibile *dimostrare che l'ipotesi del continuo era falsa* (cioè è logicamente consistente con gli assiomi della matematica).

Ma questo non dice che sia vera!!

Nel 1963 Paul Cohen ha dimostrato che non era possibile dimostrare che l'ipotesi del continuo era vera!

L'ipotesi del continuo.

Quindi l'ipotesi del continuo è *indecidibile*: si può fare una matematica nella quale è vera e una dove è falsa: entrambe le matematiche sono ugualmente valide!

L'ipotesi del continuo.

Quindi l'ipotesi del continuo è *indecidibile*: si può fare una matematica nella quale è vera e una dove è falsa: entrambe le matematiche sono ugualmente valide!

E' come l'assioma delle parallele!

L'ipotesi del continuo.

Quindi l'ipotesi del continuo è *indecidibile*: si può fare una matematica nella quale è vera e una dove è falsa: entrambe le matematiche sono ugualmente valide!

E' come l'assioma delle parallele!

Si capisce che Cantor non sia mai riuscito a dimostrare l'ipotesi del continuo!

L'ipotesi del continuo.

Quindi l'ipotesi del continuo è *indecidibile*: si può fare una matematica nella quale è vera e una dove è falsa: entrambe le matematiche sono ugualmente valide!

E' come l'assioma delle parallele!

Si capisce che Cantor non sia mai riuscito a dimostrare l'ipotesi del continuo!

Lo stesso Goedel ha poi dimostrato un risultato sconcertante:

Il teorema di Goedel

Non è possibile (con gli strumenti della matematica) dimostrare che la matematica è non contraddittoria.

Conclusione.

Quindi c'è un po' di incertezza, qualcuno un giorno potrebbe trovare una contraddizione nella matematica!?...

Conclusione.

Quindi c'è un po' di incertezza, qualcuno un giorno potrebbe trovare una contraddizione nella matematica!?...

Siccome sono più di 2.500 anni che si dimostrano teoremi, che questi teoremi hanno avuto, come diceva Einstein, un impatto enorme, decisivo nella nostra comprensione della natura, il matematico *addetto ai lavori* dorme tranquillo e sereno.

Conclusione.

Quindi c'è un po' di incertezza, qualcuno un giorno potrebbe trovare una contraddizione nella matematica!?...

Siccome sono più di 2.500 anni che si dimostrano teoremi, che questi teoremi hanno avuto, come diceva Einstein, un impatto enorme, decisivo nella nostra comprensione della natura, il matematico *addetto ai lavori* dorme tranquillo e sereno.