L'infinito.

Ph. Ellia

9 Giugno 2014

Questioni fondamentali

Questioni fondamentali

Chi siamo? Da dove veniamo? Dove andiamo?

Questioni fondamentali

Chi siamo? Da dove veniamo? Dove andiamo?
Cosa c'era prima? Cosa ci sarà dopo?

Questioni fondamentali

Chi siamo? Da dove veniamo? Dove andiamo?
Cosa c'era prima? Cosa ci sarà dopo?
L'universo è finito? Infinito?

Questioni fondamentali

Chi siamo? Da dove veniamo? Dove andiamo?
Cosa c'era prima? Cosa ci sarà dopo?
L'universo è finito? Infinito?

Tentativi di risposte: superstizione, magia, religione, arte, filosofia, scienza.

Questioni fondamentali

Chi siamo? Da dove veniamo? Dove andiamo?
Cosa c'era prima? Cosa ci sarà dopo?
L'universo è finito? Infinito?

Tentativi di risposte: superstizione, magia, religione, arte, filosofia, scienza.
Noi ci occuperemo dell'aspetto scientifico, anzi matematico. Per esempio:

Questioni fondamentali

Chi siamo? Da dove veniamo? Dove andiamo?
Cosa c'era prima? Cosa ci sarà dopo?
L'universo è finito? Infinito?

Tentativi di risposte: superstizione, magia, religione, arte, filosofia, scienza.
Noi ci occuperemo dell'aspetto scientifico, anzi matematico. Per esempio:

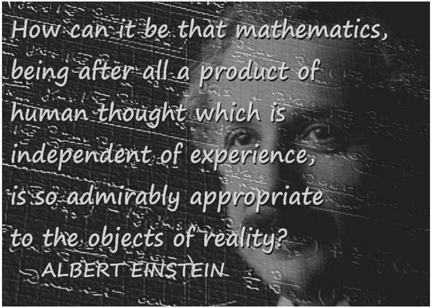
Infinito?

Ma cosa significa? Cos'è l'infinito?
Quant'è grande? Esiste davvero?

Questioni fondamentali

E poi:

Come può essere che la matematica che tutto sommato è un prodotto della mente umana, la quale è indipendente dall'esperienza, sia così straordinariamente appropriata a descrivere la realtà?



Questioni fondamentali.

La matematica si scopre o si inventa? Cioè esiste un grande libro che contiene già tutti i teoremi ("The Book") e noi lo stiamo faticosamente leggendo, oppure lo stiamo scrivendo noi?

Questioni fondamentali.

La matematica si scopre o si inventa? Cioè esiste un grande libro che contiene già tutti i teoremi ("The Book") e noi lo stiamo faticosamente leggendo, oppure lo stiamo scrivendo noi?

La matematica è vera? Cioè si può dimostrare che la matematica è vera?

Questioni fondamentali.

La matematica si scopre o si inventa? Cioè esiste un grande libro che contiene già tutti i teoremi ("The Book") e noi lo stiamo faticosamente leggendo, oppure lo stiamo scrivendo noi?

La matematica è vera? Cioè si può dimostrare che la matematica è vera?

Numeri naturali, razionali, reali.

Prima di iniziare ricordiamo alcune definizioni:

Numeri interi.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ *è l'insieme dei* **numeri naturali**.
Mentre:
$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ *è l'insieme dei* **numeri interi (relativi)**.

Poi:

Numeri razionali, reali.
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ *è l'insieme dei* **numeri razionali**.
Finalmente indicheremo con $\mathbb{R}$ *l'insieme dei* **numeri reali**.

Quindi $\mathbb{Q}$ è l'insieme delle frazioni, più precisamente $\mathbb{Q}$ è l'insieme delle "classi d'equivalenza" di frazioni: $\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{7}{14}$ sono frazioni diverse che "rappresentano" lo stesso numero razionale: $\frac{1}{2} = 0,5$.

Numeri naturali, razionali, reali.

E' più difficile descrivere $\mathbb{R}$, per il momento diciamo che possiamo rappresentarci i numeri reali come i punti della retta reale (non è una definizione matematica!).

Numeri naturali, razionali, reali.

E' più difficile descrivere $\mathbb{R}$, per il momento diciamo che possiamo rappresentarci i numeri reali come i punti della retta reale (non è una definizione matematica!).
Abbiamo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e tutte le inclusioni sono strette.

Numeri naturali, razionali, reali.

E' più difficile descrivere $\mathbb{R}$, per il momento diciamo che possiamo rappresentarci i numeri reali come i punti della retta reale (non è una definizione matematica!).
Abbiamo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e tutte le inclusioni sono strette.

Per l'ultima abbiamo per esempio:

Teorema:
Radice di due non è razionale: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Più generalmente se $d \in \mathbb{N}$ *non è un quadrato,* $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

Quindi $\sqrt{14} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ma in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ci sono anche $\sqrt[3]{2}$, π, e (quello dei logaritmi) e tanti altri...

Costruzione dei numeri.

Come si costruiscono (definiscono) matematicamente i numeri? E' importante sapere che esistono dei procedimenti matematici rigorosi (e tutto sommato abbastanza semplici) per costruire tutti i numeri partendo dai numeri naturali.

Costruzione dei numeri.

Come si costruiscono (definiscono) matematicamente i numeri? E' importante sapere che esistono dei procedimenti matematici rigorosi (e tutto sommato abbastanza semplici) per costruire tutti i numeri partendo dai numeri naturali.
Per avere $\mathbb{Z}$ si aggiungono i simmetrici: $n + (-n) = 0$.

Costruzione dei numeri.

Come si costruiscono (definiscono) matematicamente i numeri? E' importante sapere che esistono dei procedimenti matematici rigorosi (e tutto sommato abbastanza semplici) per costruire tutti i numeri partendo dai numeri naturali.
Per avere $\mathbb{Z}$ si aggiungono i simmetrici: $n + (-n) = 0$.
Per avere $\mathbb{Q}$ si prendono i "quozienti" ($\mathbb{Q}$ è il campo dei quozienti dell'anello integro $\mathbb{Z}$).

Costruzione dei numeri.

Come si costruiscono (definiscono) matematicamente i numeri? E' importante sapere che esistono dei procedimenti matematici rigorosi (e tutto sommato abbastanza semplici) per costruire tutti i numeri partendo dai numeri naturali.

Per avere $\mathbb{Z}$ si aggiungono i simmetrici: $n + (-n) = 0$.

Per avere $\mathbb{Q}$ si prendono i "quozienti" ($\mathbb{Q}$ è il campo dei quozienti dell'anello integro $\mathbb{Z}$).

Per avere $\mathbb{R}$ si fa il completamento topologico di $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ è l'insieme dei limiti delle successioni di Cauchy di numeri razionali).

Costruzione dei numeri.

Come si costruiscono (definiscono) matematicamente i numeri? E' importante sapere che esistono dei procedimenti matematici rigorosi (e tutto sommato abbastanza semplici) per costruire tutti i numeri partendo dai numeri naturali.
Per avere $\mathbb{Z}$ si aggiungono i simmetrici: $n + (-n) = 0$.
Per avere $\mathbb{Q}$ si prendono i "quozienti" ($\mathbb{Q}$ è il campo dei quozienti dell'anello integro $\mathbb{Z}$).
Per avere $\mathbb{R}$ si fa il completamento topologico di $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ è l'insieme dei limiti delle successioni di Cauchy di numeri razionali).

Il grande problema

Il grande problema è quello di costruire $\mathbb{N}$!

Per questo si usa la teoria degli insiemi (ma vedremo che non è così semplice!).

Insiemi infiniti: definizione.

Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito.

Insiemi infiniti: definizione.

Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito.

Non esiste un più grande numero naturale ($n + 1 > n$). Quindi la lista dei numeri naturali non termina mai.

Insiemi infiniti: definizione.

Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito.

Non esiste un più grande numero naturale ($n + 1 > n$). Quindi la lista dei numeri naturali non termina mai.

Infinito "potenziale".

Insiemi infiniti: definizione.

Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito.

Non esiste un più grande numero naturale ($n + 1 > n$). Quindi la lista dei numeri naturali non termina mai.

Infinito "potenziale".

C'è un altro modo di vedere la vita.

Insiemi infiniti: definizione.

Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito.

Non esiste un più grande numero naturale ($n + 1 > n$). Quindi la lista dei numeri naturali non termina mai.

Infinito "potenziale".

C'è un altro modo di vedere la vita. Infinito "compiuto"

Insiemi infiniti: definizione.

Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito.

Non esiste un più grande numero naturale ($n + 1 > n$). Quindi la lista dei numeri naturali non termina mai.

Infinito "potenziale".

C'è un altro modo di vedere la vita. Infinito "compiuto"
Sia $\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ l'insieme dei numeri pari.

Ci sono più numeri o più numeri pari?

Cioè ci sono più elementi in $\mathbb{N}$ o in $\mathcal{P}$?

Insiemi infiniti: definizione.

A priori siccome $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{P} \neq \mathbb{N}$ (ci sono i numeri dispari) verrebbe da dire che ci sono più numeri che numeri pari!

Insiemi infiniti: definizione.

A priori siccome $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{P} \neq \mathbb{N}$ (ci sono i numeri dispari) verrebbe da dire che ci sono più numeri che numeri pari!

Osserviamo che gli elementi di $\mathcal{P}$ si possono scrivere: $0 = 2.0$, $2 = 2.1$, $4 = 2.2$, $6 = 2.3$,..., $2n = 2.n$.
Quindi abbiamo un'applicazione (funzione):

$$f : \mathcal{P} \to \mathbb{N} : 2n \to n$$

Ad ogni numero pari $2m$ corrisponde un numero (m).

Insiemi infiniti: definizione.

A priori siccome $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{P} \neq \mathbb{N}$ (ci sono i numeri dispari) verrebbe da dire che ci sono più numeri che numeri pari!

Osserviamo che gli elementi di $\mathcal{P}$ si possono scrivere: $0 = 2.0$, $2 = 2.1$, $4 = 2.2$, $6 = 2.3$,..., $2n = 2.n$.
Quindi abbiamo un'applicazione (funzione):

$$f : \mathcal{P} \to \mathbb{N} : 2n \to n$$

Ad ogni numero pari $2m$ corrisponde un numero (m).
Inoltre ogni numero, $n \in \mathbb{N}$, è associato ad un unico numero pari $(2n)$.

Insiemi infiniti: definizione.

A priori siccome $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{P} \neq \mathbb{N}$ (ci sono i numeri dispari) verrebbe da dire che ci sono più numeri che numeri pari!

Osserviamo che gli elementi di $\mathcal{P}$ si possono scrivere: $0 = 2.0$, $2 = 2.1$, $4 = 2.2$, $6 = 2.3$,..., $2n = 2.n$.
Quindi abbiamo un'applicazione (funzione):

$$f : \mathcal{P} \to \mathbb{N} : 2n \to n$$

Ad ogni numero pari $2m$ corrisponde un numero (m).
Inoltre ogni numero, $n \in \mathbb{N}$, è associato ad un unico numero pari ($2n$).
Abbiamo quindi una corrispondenza perfetta (bi-univoca) tra elementi di $\mathcal{P}$ ed elementi di $\mathbb{N}$.

Insiemi infiniti: definizione.

Riassumendo: ad ogni numero pari corrisponde uno ed un unico numero e viceversa: $2n \leftrightarrow n$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leftrightarrow & 0 = 2.0 \\ 1 & \leftrightarrow & 2 = 2.1 \\ 2 & \leftrightarrow & 4 = 2.2 \\ 3 & \leftrightarrow & 6 = 2.3 \\ \dots & \dots & \dots \\ n & \leftrightarrow & 2n = 2.n \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Siccome la lista dei numeri (come quella dei numeri pari) non termina mai, questa corrispondenza è perfetta, andrà sempre avanti! Non sarà mai in difetto!

Insiemi infiniti: definizione.

In conclusione:

Ci sono altrettanto numeri che numeri pari!

Questo è contrario al "buon senso" (*Il tutto è più grande della parte*)!

Insiemi infiniti: definizione.

In conclusione:

Ci sono altrettanto numeri che numeri pari!

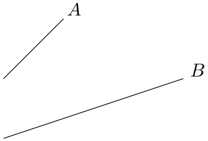
Questo è contrario al "buon senso" (*Il tutto è più grande della parte*)!
E' l'infinito bellezza!

Insiemi infiniti: definizione.

In conclusione:

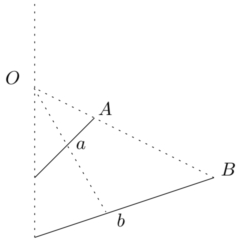
Ci sono altrettanto numeri che numeri pari!

Questo è contrario al "buon senso" (*Il tutto è più grande della parte*)!
E' l'infinito bellezza!
Un altro esempio: ci sono più punti nel segmento A o nel segmento B?



Insiemi infiniti: definizione.

Per ogni punto $a \in A$, proiettando da O, ottengo uno ed un unico punto $b \in B$; viceversa per ogni punto $b \in B$ ottengo uno ed un unico punto $a \in A$: c'è una corrispondenza perfetta tra i punti di A e i punti di B. Ci sono altrettanto punti in A che in B!



Due modi di contare.

Come contare con l'infinito?

Due modi di contare.

Come contare con l'infinito?

Gli studenti entrano nell'aula, ci saranno abbastanza sedie?

Due modi di contare.

Come contare con l'infinito?

Gli studenti entrano nell'aula, ci saranno abbastanza sedie?

- Contare le sedie e contare gli studenti

Due modi di contare.

Come contare con l'infinito?

Gli studenti entrano nell'aula, ci saranno abbastanza sedie?

- Contare le sedie e contare gli studenti
- Dire agli studenti di sedersi. Se nessuno rimane in piedi ci sono altrettanto o più sedie che studenti, se qualcuno rimane in piedi ci sono più studenti che sedie.

Useremo il secondo metodo (cioè le applicazioni), non è più necessario contare gli elementi uno dopo l'altro.

Due modi di contare.

Come contare con l'infinito?

Gli studenti entrano nell'aula, ci saranno abbastanza sedie?

- Contare le sedie e contare gli studenti
- Dire agli studenti di sedersi. Se nessuno rimane in piedi ci sono altrettanto o più sedie che studenti, se qualcuno rimane in piedi ci sono più studenti che sedie.

Useremo il secondo metodo (cioè le applicazioni), non è più necessario contare gli elementi uno dopo l'altro.
Stiamo usando un "infinito compiuto".

Insiemi infiniti: definizione.

Definizione:

Un insieme X è infinito se esiste $Y \subset X$, $Y \neq X$ e una corrispondenza bi-univoca $f : X \to Y$.

Cioè esiste un sotto insieme stretto Y di X che ha "altrettanto" elementi di X.

Insiemi infiniti: definizione.

Definizione:

Un insieme X è infinito se esiste $Y \subset X$, $Y \neq X$ e una corrispondenza bi-univoca $f : X \to Y$.

Cioè esiste un sotto insieme stretto Y di X che ha "altrettanto" elementi di X.

Abbiamo appena **dimostrato** che $\mathbb{N}$ è infinito.

Insiemi infiniti: definizione.

Definizione:

Un insieme X è infinito se esiste $Y \subset X$, $Y \neq X$ e una corrispondenza bi-univoca $f : X \to Y$.

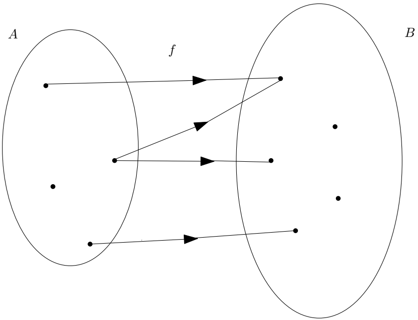
Cioè esiste un sotto insieme stretto Y di X che ha "altrettanto" elementi di X.

Abbiamo appena **dimostrato** che $\mathbb{N}$ è infinito.
Prima di andare avanti ripassiamo il nostro nuovo modo di "contare", cioè le applicazioni.

Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive.

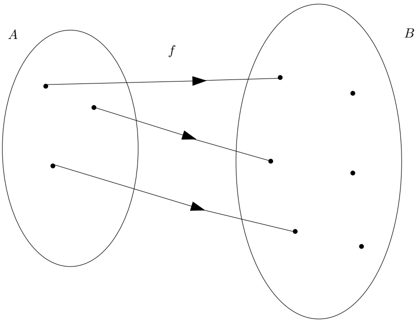
Un'applicazione da un insieme A in un insieme B, $f : A \to B$ è "una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed uno solo elemento di B.

Questa f *NON* è un'applicazione



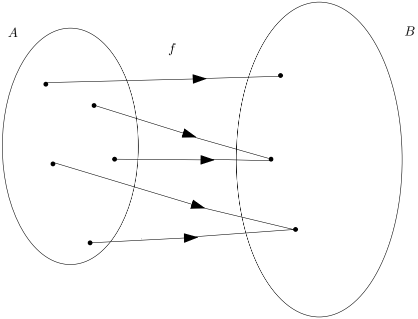
Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive.

Questa f è *iniettiva* $(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$; A ha meno elementi di B $(card(A) \leq card(B))$



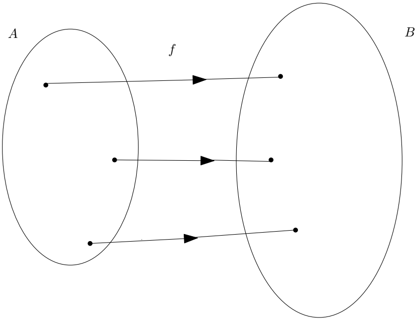
Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive.

Questa f è *suriettiva* ($\forall z \in B, \exists x \in A$ tale che $f(x) = z$); A ha più elementi di B ($card(A) \geq card(B)$)



Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive.

Un'applicazione è biiettiva se è iniettiva e suriettiva.
Questa f è *biiettiva* o bi-univoca ($\forall z \in B, \exists! x \in A$ tale che $f(x) = z$); A ha altrettanto elementi di B ($card(A) = card(B)$).
Invertendo le frecce si può definire un'applicazione $f^{-1} : B \to A : f(x) \to x$ (è ben definita perché ogni $y \in B$ si scrive in modo unico $y = f(x)$).



Esempi.

Siccome $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ con $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ è naturale chiedersi se $\mathbb{Z}$ è "più" infinito di $\mathbb{N}$.

Esempi.

Siccome $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ con $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ è naturale chiedersi se $\mathbb{Z}$ è "più" infinito di $\mathbb{N}$.

Con i numeri pari contiamo i numeri positivi, con i dispari quelli negativi:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : \begin{cases} 2n \to n \\ 2n+1 \to -n-1 \end{cases}$$

Questa applicazione è bi-univoca.
Ci sono altrettanto numeri che interi relativi!

Esempi.

Siccome $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ con $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ è naturale chiedersi se $\mathbb{Z}$ è "più" infinito di $\mathbb{N}$.

Con i numeri pari contiamo i numeri positivi, con i dispari quelli negativi:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : \begin{cases} 2n \to n \\ 2n+1 \to -n-1 \end{cases}$$

Questa applicazione è bi-univoca.
Ci sono altrettanto numeri che interi relativi!

Ci sono più numeri interi o più numeri razionali?

Esempi.

Siccome $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ con $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ è naturale chiedersi se $\mathbb{Z}$ è "più" infinito di $\mathbb{N}$.

Con i numeri pari contiamo i numeri positivi, con i dispari quelli negativi:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : \begin{cases} 2n \to n \\ 2n+1 \to -n-1 \end{cases}$$

Questa applicazione è bi-univoca.
Ci sono altrettanto numeri che interi relativi!

Ci sono più numeri interi o più numeri razionali?

Ricordiamo che ogni intervallo, piccolo quanto vogliamo, della retta reale c'è sempre un numero razionale (in realtà un'infinità). Per esempio se $I =]0, \varepsilon[$, con ε molto piccolo, positivo. Allora $x = 1/\varepsilon$ è molto grande, se N è la parte intera di x, allora $M = N + 1 > x$, quindi $1/M < 1/x = \varepsilon$, cioè $1/M \in I$.

Esempi.

Ci aspettiamo che ci siano più razionali che numeri interi...

Esempi.

Ci aspettiamo che ci siano più razionali che numeri interi...

Invece no! Ci sono altrettanto numeri interi che numeri razionali!!

Esempi.

Ci aspettiamo che ci siano più razionali che numeri interi...

Invece no! Ci sono altrettanto numeri interi che numeri razionali!!

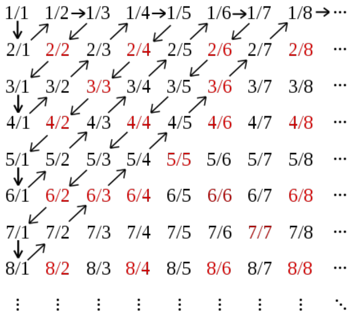
Questo si vede con il *procedimento diagonale* di **Cantor**:

Esempi.

Ci aspettiamo che ci siano più razionali che numeri interi...

Invece no! Ci sono altrettanto numeri interi che numeri razionali!!

Questo si vede con il *procedimento diagonale* di **Cantor**:



Esempi.

A questo punto, rassegnati, pensiamo che ci saranno altrettanto numeri interi che numeri reali?!...

Esempi.

A questo punto, rassegnati, pensiamo che ci saranno altrettanto numeri interi che numeri reali?!...

Invece no!! I numeri reali sono "più" infiniti dei numeri interi!!

Esempi.

A questo punto, rassegnati, pensiamo che ci saranno altrettanto numeri interi che numeri reali?!...

Invece no!! I numeri reali sono "più" infiniti dei numeri interi!!

Questo si vede con il *procedimento diagonale* di Cantor.

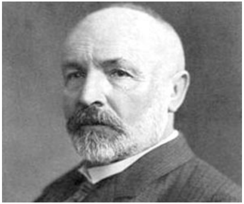
Esempi.

A questo punto, rassegnati, pensiamo che ci saranno altrettanto numeri interi che numeri reali?!...

Invece no!! I numeri reali sono "più" infiniti dei numeri interi!!

Questo si vede con il *procedimento diagonale* di Cantor.

Georg Cantor (1845-1918), il creatore della teoria degli insiemi e dei numeri trans-finiti



Esempi.

Mostriamo che non esiste nessuna corrispondenza bi-univoca tra $\mathbb{N}$ e $J =]0,1[$.
Ogni $x \in J$ ha un sviluppo decimale $0, a_0 a_1 a_2 ... a_n ...$, $a_i \in \mathbb{N}$. Per esempio: $1/2 = 0,5000...$, $1/3 = 0,3333...$, $1/\sqrt{2} = 0,70710...$
Però: $1/2 = 0,500... = 0,4999...$. Scegliamo il primo. Con questa scelta lo sviluppo è unico.
Se c'è una corrispondenza bi-univoca tra $\mathbb{N}$ e J:

$\mathbb{N}$	J
0	$0, a_0 a_1 a_2 ... a_n ...$
1	$0, b_0 b_1 b_2 ... b_n ...$
2	$0, c_0 c_1 c_2 ... c_n ...$
$\dots$	$\dots$
n	$0, d_0 d_1 d_2 ... d_n ...$
$\dots$	$\dots$

Esempi.

Siccome la corrispondenza è bi-univoca, ogni $x \in J$ compare nella colona di destra. Appena avete scritto la vostra corrispondenza, Cantor vi trova un $z \in J$ che *sicuramente* non compare nella tabella.

Sia $z = 0, e_0 e_1 e_2 ... e_n ...$ dove $e_0 \neq a_0$ e $e_0 \notin \{0, 9\}$, $e_1 \neq b_1$, $e_1 \notin \{0, 9\}$, ecc , $e_n \neq d_n$, $e_n \notin \{0, 9\}$.

Esempi.

Siccome la corrispondenza è bi-univoca, ogni $x \in J$ compare nella colona di destra. Appena avete scritto la vostra corrispondenza, Cantor vi trova un $z \in J$ che *sicuramente* non compare nella tabella.
Sia $z = 0, e_0 e_1 e_2 ... e_n ...$ dove $e_0 \neq a_0$ e $e_0 \notin \{0, 9\}$, $e_1 \neq b_1$, $e_1 \notin \{0, 9\}$, ecc , $e_n \neq d_n$, $e_n \notin \{0, 9\}$.

- $z \in J$ perché $z \neq 0 = 0, 000...$, $z \neq 1 = 0, 999...$
- z non è nella tabella perché se z corrisponde a n si dovrebbe avere $d_n = e_n$

Esempi.

Teorema

L'infinito di $\mathbb{R}$ è "più grande" dell'infinito di $\mathbb{N}$.

Esempi.

Teorema

L'infinito di $\mathbb{R}$ è "più grande" dell'infinito di $\mathbb{N}$.

Infatti $g : J \to \mathbb{R} : x \to (2x - 1)/(x - x^2)$ è bi-univoca, quindi se ci fosse una biiezione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ ce ne sarebbe una tra J e $\mathbb{N}$.

Esempi.

Teorema

L'infinito di $\mathbb{R}$ è "più grande" dell'infinito di $\mathbb{N}$.

Infatti $g : J \to \mathbb{R} : x \to (2x-1)/(x-x^2)$ è bi-univoca, quindi se ci fosse una biiezione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ ce ne sarebbe una tra J e $\mathbb{N}$.
Per distinguere questi infiniti:

Definizione:

Due insiemi X, Y sono *equipotenti* o hanno la stessa *cardinalità* se esiste un'applicazione bi-univoca $f : X \to Y$.

Esempi.

Teorema

L'infinito di $\mathbb{R}$ è "più grande" dell'infinito di $\mathbb{N}$.

Infatti $g : J \to \mathbb{R} : x \to (2x - 1)/(x - x^2)$ è bi-univoca, quindi se ci fosse una biiezione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ ce ne sarebbe una tra J e $\mathbb{N}$.
Per distinguere questi infiniti:

Definizione:

Due insiemi X, Y sono *equipotenti* o hanno la stessa *cardinalità* se esiste un'applicazione bi-univoca $f : X \to Y$.

Se X è un insieme finito, $card(X)$ (cardinalità di X) è esattamente il suo "numero" di elementi. Nel caso infinito è un'altra cosa, una nuova specie di numero (*cardinale transfinito*).

Insiemi numerabili.

Definizione:

Siano X, Y due insiemi allora:

1. $card(X) \leq card(Y) \Leftrightarrow$ esiste $f : X \to Y$ iniettiva
2. $card(X) \geq card(Y) \Leftrightarrow$ esiste $g : X \to Y$ suriettiva
3. $card(X) = card(Y) \Leftrightarrow$ esiste $h : X \to Y$ biiettiva

Definizione:

Sia $\aleph_0 := card(\mathbb{N})$ (*aleph zero*) e sia $c := card(\mathbb{R})$ (c come *continuo*).

Il cardinale $\aleph_0$ è il "primo" cardinale transfinito.

Insiemi numerabili.

Definizione:

Un insieme X è *numerabile* se esiste una biiezione $f : X \to \mathbb{N}$, cioè se $card(X) = \aleph_0$.

Abbiamo:

Teorema:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili, mentre $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Insiemi numerabili.

Definizione:

Un insieme X è *numerabile* se esiste una biiezione $f : X \to \mathbb{N}$, cioè se $card(X) = \aleph_0$.

Abbiamo:

Teorema:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili, mentre $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Abbiamo $\aleph_0 \leq c$ e $\aleph_0 \neq c$, possiamo indicare questa situazione nel modo seguente: $\aleph_0 < c$.

Insiemi numerabili.

Definizione:

Un insieme X è *numerabile* se esiste una biiezione $f : X \to \mathbb{N}$, cioè se $card(X) = \aleph_0$.

Abbiamo:

Teorema:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili, mentre $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Abbiamo $\aleph_0 \leq c$ e $\aleph_0 \neq c$, possiamo indicare questa situazione nel modo seguente: $\aleph_0 < c$. Osserviamo che se α, β sono due cardinali tali che: $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, allora non è immediato concludere che $\alpha = \beta$.
Questo sarebbe ovvio se α, β fossero dei numeri finiti ($\in \mathbb{N}$), ma con i cardinali transfiniti ci vuole un teorema:

Insiemi numerabili.

Teorema (Cantor-Bernstein):

Se $card(X) \leq card(Y)$ e $card(Y) \leq card(X)$, allora $card(X) = card(Y)$.

Il teorema dice che se esiste $f : X \to Y$ iniettiva e se esiste $g : X \to Y$ suriettiva, allora esiste $h : X \to Y$ biiettiva.

Questo non è affatto ovvio perché a priori non c'è nessun legame tra f e g.