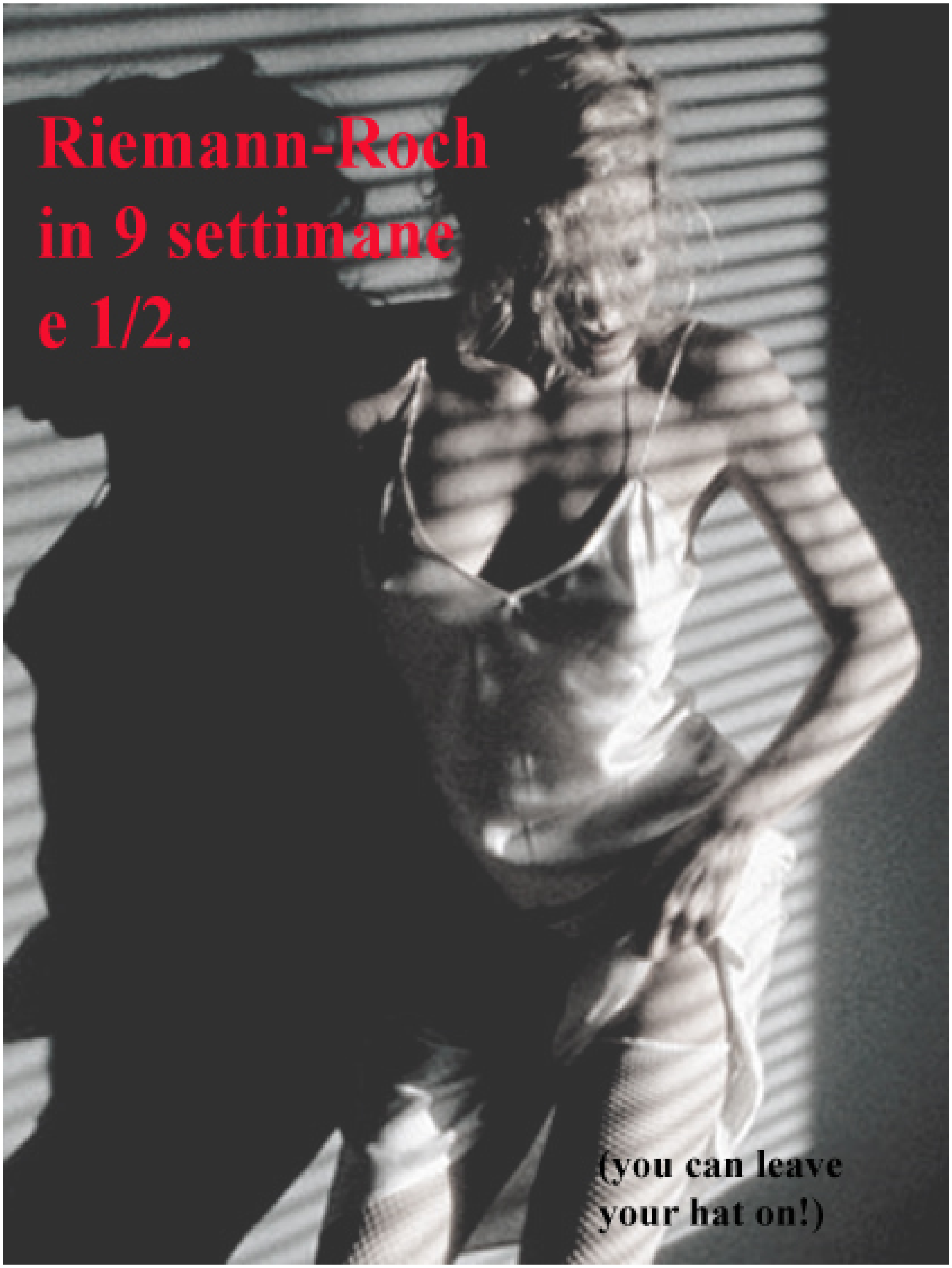
Riemann-Roch
in 9 settimane
e 1/2.
(you can leave
your hat on!)

Riemann-Roch in 9 settimane e 1/2.

Ph. ELLIA
(2013)

26 Dicembre 2013

Il teorema di Riemann-Roch è senz'altro uno dei risultati principali della geometria algebrica. E' anche un'ottima occasione per introdurre alcuni concetti ”avanzati”, ma di base: sistemi lineari, fasci, coomologia.

Questi sono gli appunti di un seminario *clandestino* (i.e. no crediti per gli studenti, no carico didattico per il docente) che si è svolto tra ottobre e dicembre 2013, per una durata di 9 settimane e mezzo circa.

Gli appunti sono stati scritti ”a braccio” e non sono stati riletti.

Ringrazio i partecipanti (Giuliano Bianco, Giacomo Graziani, David Martinelli, Carlo Martinucci, , Paolo Menegatti e Francesco Rusticali) per la loro pazienza.

Indice

1

Introduzione.

1.1 Varietà.

La nozione più naturale di varietà in geometria è quella di varietà immersa o sotto-varietà di uno spazio ambiente. Per esempio $X \subset \mathbb{R}^n$ in geometria differenziale. Una sotto-varietà immersa è definita da un sistema di equazioni (differenziabili, analitiche, *algebriche*).

Per esempio una curva algebrica piana $C \subset \mathbb{A}^2 = k^2$ è definita da un polinomio $P(x, y) = 0$. Se $\partial P/\partial y(p) \neq 0$, allora (nel caso reale, complesso) per il teorema delle funzioni implicite, in un intorno di p, la nostra curva è un grafico e quindi ha una tangente (di equazione $(x - p_1)\partial P/\partial x(p) + (y - p_2)\partial P/\partial y = 0$). Si dice che p è un punto non-singolare. Se invece $\partial P/\partial x(p) = 0 = \partial P/\partial y(p)$), allora p è un punto singolare. Se $p = O$ è l'origine possiamo scrivere $P(x, y) = f_1(x, y) + ... + f_i(x, y) + ... + f_n(x, y)$, dove f_i è omogeneo di grado i e vediamo che O è un punto singolare $\Leftrightarrow f_1 = 0$. Per esempio $P(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$ ha una singolarità nell'origine (nodo o punto doppio ordinario).

Una curva piana proiettiva $C \subset \mathbb{P}^2$ è definita da $P(x, y, z) = 0$, dove P è un polinomio omogeneo.

Nel caso delle varietà astratte ottenute per incollamento di modelli locali (in geometria differenziale o analitica), le varietà ottenute (localmente isomorfe ad aperti di $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) non hanno singolarità. Nel caso algebrico le cose sono un po' più complicate. Per il momento pensiamo ad una varietà algebrica come ad una varietà immersa $X \subset \mathbb{A}^n, \mathbb{P}^n$ e supponiamo X non singolare.

1.2 L'anello locale di una varietà in un punto.

Germi di funzioni in $x \in X$, relazione d'equivalenza sull'insieme dei germi, il quoziente è $\mathcal{O}_{X,x}$: è un anello. Questo anello ha un ideale massimale $\mathfrak{m}_x$ e ogni $f_x \in \mathcal{O}_x \setminus \mathfrak{m}_x$ è invertibile (si dice che $\mathcal{O}_x$ è un anello locale). Questo è chiaro nel caso differenziabile, analitico ma meno ovvio nel caso algebrico. Infatti nel caso algebrico uno sarebbe tentato di prendere come funzioni i polinomi, ma se P è un polinomio con $P(x) \neq 0$, $1/P$ non è un polinomio, ma una funzione razionale! Quindi le funzioni della geometria algebrica sono le funzioni razionali. Questo è un guaio perché le funzioni razionali sono delle brutte bestie.

Quindi per esempio se $C \subset \mathbb{A}^2$ è definita da $f(x,y) = 0$, una funzione razionale su C è $u = p(x,y)/q(x,y)$ dove $f \nmid q$, con la solita relazione $p/q = a/b$ se $pb - aq = 0 \pmod f$.

Per esempio sia C la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. La funzione razionale $u = (1-y)/x$ su C, a priori non è definita nel punto $(0,1)$. Ma $u = x/(1+y)$ e quindi u è definita in $(0,1)$. Morale: *non c'è sempre un'espressione unica, globale per una funzione razionale.*

Si dirà che una funzione razionale u su X è *regolare* nel punto x se si può scrivere $u = p/q$ con $q(x) \neq 0$. Nel caso algebrico l'anello $\mathcal{O}_{X,x}$ è l'anello delle funzioni (razionali) regolari in x.

Esempio basic:

Sia $C = \mathbb{A}^1_k$ la retta affine. L'anello locale dell'origine $\mathcal{O}_0$ è l'anello dei germi di funzioni regolari in 0. Quindi $\mathcal{O}_0 = \{f = P/Q \mid Q(0) \neq 0\}/\sim$, dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza che sappiamo.

Se $f \in k(X) = k(C)$ è una funzione razionale, allora $f \in \mathcal{O}_0$ o $1/f \in \mathcal{O}_0$. Infatti sia $f = P/Q$, se $Q(0) \neq 0$, $f \in \mathcal{O}_0$, altrimenti $1/f \in \mathcal{O}_0$ (possiamo assumere P, Q primi tra di loro).

L'ideale massimale $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_0$ è l'ideale dei germi che si annullano in 0: $\mathfrak{m} = \{f = P/Q \mid Q(0) \neq 0, P(0) = 0\}$. Se $f \in \mathfrak{m}$, allora $f = P(x)/Q(x) = x^a T(x)/Q(x)$ dove $x \nmid T(x), Q(x)$, vediamo così che $\mathfrak{m}$ è un ideale principale generato da x (dalla classe di x). Inoltre $g = T(x)/Q(x)$ è un elemento invertibile dell'anello $\mathcal{O}_0$. Abbiamo anche che $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq k$. Riassumendo:

L'anello $\mathcal{O}_0$ è un anello locale regolare di dimensione uno. In particolare l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ è *principale* generato dalla classe di x; ogni elemento $f \in \mathcal{O}_0$ si scrive in modo unico $x^a g$, $a \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{O}_0$ elemento invertibile. Ogni ideale $I \subset \mathcal{O}_0$ è della forma $I = (x^a)$ e $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è un $k = \mathcal{O}_0/\mathfrak{m}$ spazio vettoriale di dimensione uno.

Il campo dei quozienti dell'anello $\mathcal{O}_0$ è $K = k(C) \simeq k(x)$.

Infatti $\mathcal{O}_0 \subset k(x)$, quindi $K_0 \subset k(x)$ (K_0 campo dei quozienti dell'anello integro $\mathcal{O}_0$). D'altra parte se $f \in k(x)$, allora $f \in \mathcal{O}_0 \subset K_0$ o $1/f \in \mathcal{O}_0$ e quindi $f \in K_0$. Quindi $k(x) \subset K_0$ e pertanto $k(x) = K_0$.

Se $f \in k(x)$, allora f si scrive in modo unico $f = x^n g$ con g elemento invertibile di $\mathcal{O}_0$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Infatti se $f \in \mathcal{O}_0$ l'abbiamo già visto; altrimenti $1/f \in \mathcal{O}_0$, $1/f = x^a g$ e $f = x^{-a}g^{-1}$ (g è un'unità di $\mathcal{O}_0$).

Il punto 0 (o meglio il suo anello locale $\mathcal{O}_0$) permette quindi di definire:

$$\nu_0 : k(x) \to \mathbb{Z} : f = x^n g \to n$$

L'applicazione ν_0 è una *valutazione discreta* del campo $K = k(x)$. Ritroviamo l'anello locale $\mathcal{O}_0$ nel modo seguente: $\{f \mid \nu_0(f) \geq 0\} = \mathcal{O}_0$; inoltre $\mathfrak{m} = \{f \mid \nu_0(f) > 0\}$.

Queste considerazioni possono essere svolte per ogni punto $p \in \mathbb{A}^1_k$, se $p = \lambda$, si tratta solo di rimpiazzare (x) con $(x - \lambda)$.

In conclusione $\mathcal{O}_0$ è un anello di valutazione discreta (anello locale regolare di dimensione uno).

Si dimostra che ogni anello locale di una curva liscia è fatto così! La valutazione per $f \in k(X)$ ci dice se f ha uno zero o un polo in x e di quale ordine. Un generatore dell'ideale massimale $\mathfrak{m}_x$ si chiama una coordinata locale (o parametro locale).

1.3 Applicazioni razionali, morfismi.

D'ora in poi C sarà una curva proiettiva non singolare. Un'applicazione razionale $\varphi : C --- > \mathbb{P}^n$ è data da $n+1$ funzioni razionali $\varphi(x) = (f_0(x) : f_1(x) : ... : f_n(x))$. Il problema è di capire dove questo morfismo è definito: φ è definito (regolare) in x se: ogni f_i è regolare in x e se $f_i(x)$ non sono tutti nulli. Se φ è regolare su tutto C allora si dirà che φ è un *morfismo*.

Si ricorda che una funzione razionale su $\mathbb{P}^n$ è un quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado.

Facciamo un esempio stupido: $\varphi : \mathbb{P}^1 --- > \mathbb{P}^1.(x_0 : x_1) \to (f_0 = \frac{x_1}{x_0} : f_1 = \frac{x_1^2}{x_0^2})$. Vediamo due problemi: se $x_1 = 0$, cioè nel punto $p_1 = (1 : 0)$, le nostre funzioni razionali sono entrambe nulle. Nel punto $p_0 = (0 : 1)$ invece non sono definite. Quindi f_0 ha uno zero semplice in p_1 e un polo semplice in p_0 mentre f_1 ha uno zero doppio in p_1 e un polo di ordine due in p_0.

Per levare l'indeterminazione iniziamo col moltiplicare per x_0^2. Viene $(x_0 : x_1) \to (x_0 x_1 : x_1^2)$. Per $x_0 \neq 0$ è esattamente l'applicazione iniziale. Per sistemare il problema in p_1 dividiamo tutto per x_1, viene $(x_0 : x_1) \to (x_0 : x_1)$, per $x_1 \neq 0$ è esattamente l'applicazione iniziale. Non è una grande applicazione ma siamo partiti da un'applicazione razionale non definita ovunque e siamo finiti con un morfismo! Vediamo di seguire lo stesso procedimento in generale.

Un polinomio $p(x)$ è completamente determinato, a meno di una costante, dalle sue radici (k algebricamente chiuso). Nello stesso modo $u = P/Q$ è determinata dai i suoi zeri e dai i suoi poli. Il divisore di u è $div(u) = zeri\,di\,(P) - zeri\,di\,(Q)$.

Se $f \in k(C)$ è una funzione razionale ($\neq 0$) su C gli possiamo associare il suo *divisore*: $div(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ (il divisore degli zeri meno il divisori dei poli) che sarà della forma $div(f) = \sum n_i P_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$ (usare gli anelli locali $\mathcal{O}_x$ per vedere se x è uno zero o un polo di f).

Tornando a $\varphi = (f_0 : .. : f_n)$ per ogni f_i abbiamo: $div(f_i) = \sum_j n_{ij} P_j$ (dove eventualmente alcuni n_{ij} sono nulli). Il massimo comune divisore MCD dei divisori $div(f_i)$ è $\mathcal{D} = \sum_j l_j P_j$ dove $l_j = min_{0 \leq i \leq n}\{n_{ij}\}$. Osservare che $D_i := div(f_i) - \mathcal{D} = \sum_j (n_{ij} - l_j) P_j$ ha tutti i coefficienti positivi (si dice che è un divisore *effettivo*). Inoltre nessun P_j compare in tutti i D_i.

Sia g_j un equazione locale del punto P_j (cioè g_j è un generatore di $\mathfrak{m}_{P_j}$, un parametro locale). Sia $g = \prod_j g_j^{l_j}$. Allora $div(f_i/g) = div(f_i) - div(g) = D_i$ e vediamo che $\varphi = (f_0/h : f_1/h : ... : f_n/h)$ è un morfismo definito su tutto C! Infatti non ci sono poli perché tutti i coefficienti dei D_i sono positivi e non c'è nessun $x \in C$ tale che $f_i/h(x) = 0, \forall i$ perché non c'è nessun P_j che appartiene a tutti i D_i.

Questo deriva da un fatto generale: il luogo di indeterminazione di una funzione razionale su una varietà proiettiva liscia ha codimensione ≥ 2. Quindi su una curva si può sempre levare l'indeterminazione.

1.4 Lo spazio $\mathcal{L}(D)$, sistemi lineari.

Un divisore su C è una somma formale, finita $D = \sum_j n_j P_j$, dove $n_j \in \mathbb{Z}$, $P_j \in C$. Se $n_j \geq 0, \forall j$ si dice che D è effettivo, in questo caso si nota $D \geq 0$.

Due divisori D, D' sono *linearmente equivalenti* se esiste una funzione razionale f tale che $D - D' = div(f)$. Si nota $D \sim D'$.

Sia D un divisore qualsiasi e sia $\mathcal{L}(D) = \{f \in k(C)^* \mid div(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$. Si vede facilmente che $\mathcal{L}(D)$ è un k-spazio vettoriale per le operazioni usuali sulle funzioni.

- Il divisore $\tilde{D} = div(f) + D$, $f \in \mathcal{L}(D)$, è linearmente equivalente a D e effettivo.
- Vice versa se $D' \sim D$, allora $D' - D = div(f)$, ossia $D' = D + div(f)$. Se $D' \geq 0$, allora $f \in \mathcal{L}(D)$.

In conclusione siccome f è determinata, a meno di una costante, da $D_f = div(f) + D$, vediamo che:

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \overset{\simeq}{\to} \{D' \text{ effettivi tali che } D' \sim D\}$$

Tornando a $\varphi = (f_0 : ... : f_n)$, $\mathcal{D} = MCD\{div(f_i)\}$, $D_i = div(f_i) - \mathcal{D}$. Allora $D_i \geq 0$ e $D_i \sim -\mathcal{D}$. Quindi $f_i \in \mathcal{L}(-\mathcal{D})$.

Se cambiamo base in $\mathbb{P}^n$ allora questo torna a rimpiazzare f_i con una combinazione lineare $\sum \lambda_j f_j$, quindi in modo intinseco φ corrisponde al sottospazio vettoriale $V = \langle f_0, ..., f_n \rangle \subset \mathcal{L}(-\mathcal{D})$ (oppure a $\delta := \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\mathcal{L}(-\mathcal{D}))$).

Si dice che δ (o V) è un *sistema lineare* (di divisori) su C.

Nella terminologia classica si dice anche *serie lineare*.

Quindi: i morfismi $\varphi : C \to \mathbb{P}^n \leftrightarrow$ sistemi lineari *senza punti base*

(x è un punto base di δ se ogni divisore di δ passa per x).

Osservare che se $\varphi = f_0/h : ... : f_n/h)$ e se $H \subset \mathbb{P}^n$ è l'iperpiano $x_i = 0$, allora $H \cap \varphi(C)$ è dato da $f_i/h = 0$, cioè dal divisore effettivo $D_i = div(f_i) - \mathcal{D}$. Più generalmente se H è l'iperpiano $\sum \lambda_i x_i = 0$, allora $\varphi(C) \cap H$ è dato da $\sum \lambda_i D_i \in \delta$: nel morfismo φ i divisori di δ corrispondono ai divisori segati su $\varphi(C)$ dagli iperpiani di $\mathbb{P}^n$.

1.5 Riemann-Roch.

Quindi darsi un'applicazione razionale (risp. un morfismo) è equivalente a darsi un sistema lineare $V \subset \mathcal{L}(D)$ (risp. un sistema lineare senza punti base). La dimensione di V ci indica in quale spazio proiettivo andiamo a finire. Se $f_0, ...f_n$ sono linearmente indipendenti allora $\dim(V) = n+1$ e andiamo a finire in $\mathbb{P}^n$, inoltre nessun iperpiano H di $\mathbb{P}^n$ contiene $\varphi(C)$. E' quindi opportuno calcolare (stimare) $\dim(V)$ e quindi $\dim \mathcal{L}(D)$.

Il Teorema di Riemann-Roch permette di stimare e certe volte di calcolare la dimensione di $\mathcal{L}(D)$. Definiamo intanto il grado di un divisore: se $D = \sum n_i P_i$, allora $\deg(D) = \sum n_i$. Il fatto importante è che se f è una funzione razionale, allora $\deg(div(f)) = 0$. Cioè il numero di zeri = il numero di poli. Questo viene dal fatto che una funzione razionale fornisce un morfismo $f : C \to \mathbb{P}^1 = k \cup \infty$ (i poli vanno su ∞). Ogni morfismo non costante tra due curve non singolari è un morfismo suriettivo, *finito*. Cioè ogni fibra consta di un numero finito di punti (contati con molteplicità) e questo numero di punti è sempre lo stesso (=il grado del morfismo). Quindi $\deg(div(f)) = \deg(f)_0 - \deg(f)_\infty = \#(f^{-1}(0)) - \#(f^{-1}(\infty)) = 0$. Segue che due divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado. Cioè possiamo parlare del grado di un sistema lineare. Un primo risultato facile:

Lemma 1.1. *Per ogni divisore D sulla curva proiettiva liscia C, $\mathcal{L}(D)$ è un k-spazio vettoriale di dimensione finita.*

Dimostrazione. Intanto basta considerare il caso in cui D è effettivo. Infatti se $D = D_1 - D_2$, con $D_i \geq 0$, allora $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D_1)$, perché se $div(f) + D_1 - D_2 \geq 0$, allora $div(f) + D_1 \geq D_2 \geq 0$ e quindi $f \in \mathcal{L}(D_1)$.

Sia dunque D effettivo: $D = rP + \tilde{D}$, con $r > 0, \tilde{D} \geq 0$. Poniamo $D_1 := (r-1)P + D'$. Allora anche D_1 è effettivo. Sia $f \in \mathcal{L}(D)$ e sia t un parametro locale in P (cioè un'equazione locale del punto P). Sia $\varphi : \mathcal{L}(D) \to k : f \to (t^r f)(P)$. Si verifica che φ è k-lineare. Abbiamo $\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow f$ ha un polo di ordine $\leq r-1$ in P. Siccome $(f)_0 - (f)_\infty + rP + \tilde{D} \geq 0$, se P compare con molteplicità $\leq r-1$ in $(f)_\infty$, allora si avrà $(f)_0 - (f)_\infty + (r-1)P + \tilde{D} \geq 0$, cioè $f \in \mathcal{L}(D_1)$. Segue che $ker(\varphi) = \mathcal{L}(D_1)$. Abbiamo quindi una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{L}(D_1) \to \mathcal{L}(D) \xrightarrow{\varphi} k \to 0$$

Svolgendo $\deg(D)$ volte questo procedimento si arriverà a:

$$0 \to \mathcal{L}(0) \to \mathcal{L}(D_{d-1}) \to k \to 0$$

Ma $\mathcal{L}(0)$ è l'insieme delle funzioni razionali senza poli, cioè l'insieme delle funzioni *regolari* su C. Siccome C è proiettiva ogni funzione regolare su tutto C è costante. Quindi $\dim \mathcal{L}(0) = 1$. Tornando indietro si ottiene $\dim \mathcal{L}(D) \leq \deg(D) + 1$.

Vedremo che in certi casi (se $C = \mathbb{P}^1$) l'uguaglianza $\dim \mathcal{L}(D) = \deg D + 1$ è raggiunta se D è effettivo. In generale (con D effettivo) non si ha $\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1$ (l'applicazione φ a un certo punto può essere nulla).

Ponendo $l(D) := \dim \mathcal{L}(D)$, una prima formulazione di RR è:

Teorema 1.2. *(Riemann)*
Per ogni divisore D: $l(D) \geq \deg(D) - g + 1$, con uguaglianza se $\deg(D) >> 0$.

Teorema 1.3. *(Riemann-Roch)*
Per ogni divisore D: $l(D) - l(K - D) = \deg(D) - g + 1$.

Qui g è il genere della curva C e K è un divisore "canonico". La formulazione moderna è la seguente: intanto ad ogni divisore si associa un fibrato vettoriale di rango uno (fibrato in rette, line bundle) notato $\mathcal{O}_C(D)$. Questo fibrato ha la particolarità che $H^0(\mathcal{O}_C(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$. Su una varietà di dimensione n ogni fascio ragionevole $\mathcal{F}$ (quindi ogni fibrato) verifica $H^i(\mathcal{F}) = 0$ se $i > n$. Quindi su una curva abbiamo solo H^0 e H^1. Indicando con h^i la dimensione di H^i (che è finita):

Teorema 1.4. *(RR basic)*
Per ogni divisore: $h^0(\mathcal{O}_C(D)) - h^1(\mathcal{O}_C(D)) = \deg(D) - g + 1$.

Teorema 1.5. *(Riemann-Roch)*
Per ogni divisore: $h^0(\mathcal{O}_C(D)) - h^0(\mathcal{O}_C(-D) \otimes \omega_C) = \deg(D) - g + 1$.

Qui ω_C è il fibrato co-tangente di C (un divisore canonico è un divisore K tale che $\mathcal{O}_C(K) = \omega_C$). Quest'ultima formulazione usa la dualità di Serre: su una curva per ogni fibrato (di rango $r \geq 1$): $h^1(E) = h^0(E^* \otimes \omega_C)$, E^* è il duale di E.

Siccome $\deg(K) = 2g-2$ vediamo che se $2g-2-d < 0$, allora $\deg(K-D) < 0$ e quindi $l(K-D) = 0$ (perché?), pertanto $l(D) = d-g+1$, questo risultato precisa la stima iniziale di Riemann (e mostra che se $g > 0$, $l(D) < d+1$ se $d > 2g-2$).

Le conseguenze e le generalizzazioni del Teorema di RR sono innumerevoli, si può dire, senza ombra di dubbio, che il Teorema di RR è un teorema "centrale" della geometria algebrica.

2

Sistemi lineari su $\mathbb{P}^1$.

2.1 Riassunto della puntata precedente.

Sia C una curva proiettiva liscia. Un divisore è una somma formale (finita) $D = \sum n_i P_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in C$. Il grado è $\deg(D) = \sum n_i$. Il divisore è effettivo se $n_i \geq 0, \forall i$. Due divisori sono linearmente equivalenti se: $D - D' = div(f)$, dove $f \in k(C)$ è una funzione razionale su C. Siccome il grado del divisore di una funzione razionale è zero, due divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado.

Se D è un divisore qualsiasi si pone $\mathcal{L}(D) = \{f \in k(C)^* \mid D + div(f) \geq 0\} \cup \{0\}$. Abbiamo visto che $\mathcal{L}(D)$ è un k-spazio vettoriale di dimensione finita. Inoltre $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \simeq |D|$, dove $|D|$ è l'insieme di tutti i divisori *effettivi*, linearmente equivalenti a D (può essere che $|D| = \emptyset$, anzi questo è sicuramente vero se $\deg(D) < 0$).

Definizione 2.1. *Un insieme di divisori effettivi del tipo* $|D|$ *si dice* sistema lineare completo*. Un sistema lineare su* C *è un sotto spazio lineare di un sistema completo.*

Osservare che un sistema lineare δ ha una struttura di spazio proiettivo: $\delta \subset |D|$ corrisponde a $\delta \simeq \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \simeq |D|$. Nella terminologia classica si parla di *serie lineare*, un sistema lineare di dimensione (proiettiva) r, grado d è una g^r_d, serie lineare ∞^r, di grado d.

Un sistema lineare determina un'applicazione razionale $\varphi_\delta : C - -- > \mathbb{P}^n$ e vice versa ad ogni tale applicazione razionale corrisponde un sistema lineare. Se $\delta = \langle D_0, ..., D_n \rangle$, l'applicazione non è definita nei punti *base* del sistema: P è un punto base di δ se ogni divisore di δ passa per P. Togliendo i punti base, si ottiene $\delta' = \delta(-P_1 - ... - P_r)$ che definisce un morfismo: $\varphi : C \to \mathbb{P}^n$. Se $X = \varphi(C)$, allora X non è contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^n$ (abbiamo preso una base del sistema lineare) e i divisori $X \cap H$ corrispondono ai divisori di δ'. Ogni morfismo $C \to \mathbb{P}^n$ è dato in questo modo, da un sistema lineare senza punti base.

Una descrizione più intrinseca: Sia $\delta \simeq \mathbb{P}^n$ un sistema lineare senza punti base. Vediamo come definire in modo intrinseco (senza usare basi) il morfismo determinato da δ.

Definiamo $\varphi : C \to |\delta|^* \simeq \mathbb{P}^*_n$ nel modo seguente. Se $x \in C$, $\{D \in \delta \mid x \in D\}$ è un iperpiano di δ (perché δ è senza punti base). Questo iperpiano è un punto nello spazio duale δ^*, questo punto è l'immagine di x, $\varphi(x)$. Un iperpiano, H, dello spazio duale corrisponde a un punto $D_0 \in \delta$. Abbiamo $\varphi^*(H) = \{x \mid \varphi(x) \in H\}$. Per dualità dire che $\{D \in \delta \mid x \in D\} \subset H$ significa che $D_0 \in \{D \mid x \in D\}$. Vediamo così che $\varphi^*(H) = \{x \mid x \in D_0\} = D_0$ (contando le contr'immagini con molteplicità, differenza tra φ^* e φ^{-1}).

2.2 Sistemi lineari su $\mathbb{P}^1$.

Sia $|D|$ un sistema lineare completo. Se $|D| \neq \emptyset$, $|D|$ contiene un divisore effettivo $D_0 = \sum n_i P_i, n_i > 0$. Sia $n = \sum n_i = \deg(D)$.

Si ricorda ($k = \overline{k}$) che ogni forma (=polinomio omogeneo) $F(x, y)$ si scrive come un prodotto di forme lineari: $F(x, y) = \prod L_i(x, y)^{\alpha_i}$. Se $L_i(x, y) = a_i x + b_i y$, allora $L_i((b_i : -a_i)) = 0$ e si dice che $P_i = (b_i : -a_i)$ è lo zero di L_i. Quindi ogni forma di grado d determina un insieme di d zeri (contati con molteplicità), vice versa d punti determinano (a meno di una costante) una forma di grado d.

Tornando a D_0, sia L_i che si annulla in P_i e sia $P(x, y) = \prod L_i(x, y)^{n_i}$; è un polinomio omogeneo di grado n. Sia $f = P(x, y)/x^n$. Abbiamo $div(f) = D_0 - nQ$, dove $Q = (0 : 1)$. Quindi $D_0 \sim nQ$. Pertanto $|D| = |nQ|$. Questo mostra:

Proposizione 2.2. *Sia $n \geq 0$ un intero. Su $\mathbb{P}^1$ c'è un unico sistema lineare completo di grado n è: $|nP|$, dove $P \in \mathbb{P}^1$ è un punto qualsiasi.*

In particolare su $\mathbb{P}^1$ due punti sono sempre linearmente equivalenti (questo non è vero su una curva di genere $g > 0$).

Chi è lo spazio $\mathcal{L}(nP)$? Abbiamo $\mathcal{L}(nP) = \{f \mid div(f) + nP \geq 0\}$. Cioè sono le funzioni razionali $f = F/G$ che hanno un polo di ordine al più n in P e nessun polo altrove. Quindi se $P = (0 : 1)$ sono le funzioni razionali: $f = P/x^r$ con $\deg(P) = r, 0 \leq r \leq n$. Cosa che possiamo riscrivere $f = (x^{n-r}P)/x^n$. In conclusione $\mathcal{L}(nP) = \{P/x^n \mid P \text{ omogeneo di grado } n\} \simeq S_n$, dove $S_n = k[x, y]_n$ indica il k-spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado n. Quindi $|nP| \simeq \mathbb{P}(S_n)$. Siccome $\dim_k(S_n) = n + 1$, $|nP| \simeq \mathbb{P}^n$.

In particolare $\dim \mathcal{L}(nP) = \deg(nP) - g + 1 = n + 1$, cioè $l(K - nP) = 0$, nP è un divisore *non speciale*.

2.3 Curve razionali normali.

Chiaramente il sistema lineare completo $|nP|$ non ha punti base e quindi definisce un morfismo $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$. Prendendo la base standard di S_n possiamo scrivere in coordinate:

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n : (a : b) \to (a^n : a^{n-1}b : ... : b^n)$$

Vediamo che questo corrisponde bene alla descrizione intrinseca data sopra. Identifichiamo i divisori effettivi di grado n con il polinomio (mod costante) di cui è radice: $|nP| \simeq \mathbb{P}(S_n)$. Il polinomio $f(x, y) = \sum \alpha_{ij} x^i y^j$ si annulla in $P = (a : b)$, se $\sum \alpha_{ij} a^i b^j = 0$. Sia $\psi : S_n \to k : f \to \sum \alpha_{ij} a^i b^j$, ψ è una forma lineare su S_n e $Ker(\psi)$ è l'insieme dei polinomi che si annullano in P. Nella base duale $(x^i y^j)^*$ di S_n^*, le coordinate di ψ sono $(a^n, ..., b^n)$. Quindi φ associa a P l'iperpiano dei divisori di $|nP|$ che passano per P: $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(S_n)^*$.

Sia $C = \varphi(\mathbb{P}^1)$. La curva C non è contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^n$ e se H è l'iperpiano di equazione $\sum \lambda_i X_i = 0$, allora $H \cap C$ sono gli n zeri (con molteplicità) del polinomio omogeneo $\lambda_0 x^n + ... + \lambda_n y^n$. Quindi ogni iperpiano interseca C in n punti, si dice che C ha grado n. La curva C è la *curva razionale normale di* $\mathbb{P}^n$. In realtà ci sono infinite curve razionali normali in $\mathbb{P}^n$ ma sono tutte proiettivamente equivalenti (cambiamenti di basi in S_n). Anzi a meno di un automorfismo di $\mathbb{P}^1$ (ce ne sono ∞^3), dopo una scelta di una base di $\mathbb{P}^n$ otteniamo tutte le curve razionali normali. Siccome ci sono $\infty^{(n+1)^2-1}$ automorfismi di $\mathbb{P}^n$, vediamo che le curve razionali normali di $\mathbb{P}^n$ formano una famiglia di dimensione $(n+1)^2 - 4$ (cioè sono "parametrizzate" da una varietà di dimensione $(n+1)^2 - 4$).

La curva C è irriducibile (immagine di $\mathbb{P}^1$ che è irriducibile) e ci piacerebbe sapere che è liscia. In questo caso specifico c'è un ragionamento ad hoc: supponiamo che $x \in C$ sia un punto singolare, allora un iperpiano passante per x interseca C con molteplicità ≥ 2 in x. Siano $x_1, ..., x_{n-1}$ altri $n - 1$ punti di C. Gli n punti $x, x_1, ..., n_{n-1}$ sono sicuramente contenuti in un iperpiano H. Allora $H \cap C$ consta di $> n$ punti (con molteplicità), ma questo è impossibile. Quindi C è liscia.

Si può arrivare alla stessa conclusione mostrando che il sistema lineare $|nP|$ è *molto ampio* cioè: $l(nP - Q - R) = l(nP) - 2, \forall Q, R \in \mathbb{P}^1$ (Q, R non necessariamente distinti). Ci torneremo sopra.

Se $X \subset \mathbb{P}^n$ è una curva liscia, irriducibile, non degenere (cioè non contenuta in alcun iperpiano), di grado n (cioè ogni iperpiano interseca X in n punti contati con molteplicità), allora X è razionale. Infatti prendiamo $n-1$ punti $x_1, ..., x_{n-1}$ di X. Lo spazio generato $E = \langle x_1, ..., x_{n-1} \rangle$ è un $\mathbb{P}^{n-2}$. Consideriamo il fascio di iperpiani per E. Ogni iperpiano del fascio interseca X in un ulteriore punto. Viceversa se $x \neq x_i$ è un punto di X, $H_x = \langle x, x_1, ..., x_{n-1} \rangle$ è un iperpiano del fascio. Questo stabilisce un isomorfismo birazionale tra il $\mathbb{P}^1$ del fascio e X quindi X è razionale. Quindi $X \simeq \mathbb{P}^1$ (l'unica curva 'astratta' di genere 0 è $\mathbb{P}^1$, non ci sono moduli). Quindi X è l'immagine di $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^n$ tramite un sistema lineare di grado n. L'unico sistema di grado n di dimensione (proiettiva) n è $|nP|$. In conclusione:

Proposizione 2.3. *Ogni curva liscia, irriducibile, non degenere, di grado n in $\mathbb{P}^n$ è una curva razionale normale.*

In $\mathbb{P}^2$ una curva razionale normale è una conica liscia, in $\mathbb{P}^3$ è una *cubica gobba*.

2.4 Proiezioni e curve razionali in $\mathbb{P}^n$.

Sia $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva liscia, irriducibile, non degenere. Sia $p \in \mathbb{P}^n, p \notin C$. Possiamo proiettare C dal punto p su un iperpiano $H \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ non passante per p. Sia $\overline{C}$ la proiezione. Sia $E \subset H$ un iperpiano di H. Allora $\langle p, E \rangle := H'$ è un iperpiano di $\mathbb{P}^n$. I punti di $\overline{C} \cap E$ sono esattamente i punti di $C \cap H'$. Quindi i divisori iperpiani di $\overline{C}$ sono i divisori iperpiani di C, segati dagli iperpiani passanti per p. Sia δ il sistema lineare su C segato dagli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ (quello che dà il morfismo in $\mathbb{P}^n$), allora δ', il sistema analogo su $\overline{C}$, è un iperpiano di δ.

Siccome proiettare da una retta è equivalente a proiettare da due punti ecc... sistemi $\delta' \subset \delta$ corrispondono a proiezioni di C.

Sia ora $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva razionale liscia, non degenere di grado d. Gli iperpiani segano su C un sistema ∞^n di grado d, una g^n_d. Siccome c'è un unico sistema completo di grado d su $\mathbb{P}^1$, abbiamo $g^n_d \subset |dP|$. Concludiamo che:

Proposizione 2.4. *Ogni curva razionale liscia, non degenere di $\mathbb{P}^n$, di grado d è la proiezione di una curva razionale normale in $\mathbb{P}^d$.*

Attenzione un sotto sistema di $|dP|$ non dà luogo necessariamente a un morfismo (deve essere senza punti base) e non da luogo necessariamente ad una curva liscia (deve essere molto ampio).

2.5 La cubica gobba.

Abbiamo $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3 : (x : y) \to (x^3 : x^2y : xy^2 : y^3)$. Sia $C = \varphi(\mathbb{P}^1)$. Vediamo che i punti di C soddisfano l'equazione del secondo grado $Q_1 = X_1X_2 - X_0X_3 = 0$. Quindi $C \subset Q_1$, dove Q_1 è una quadrica liscia. Nello stesso modo $C \subset Q_2$ dove Q_2 ha per equazione $X_1^2 - X_0X_2$ e $C \subset Q_3$, Q_3 di equazione $X_2^2 - X_1X_3$. Si verifica facilmente che le tre quadriche Q_1, Q_2, Q_3 sono linearmente indipendenti.

Sia $\mathbb{I}(C) \subset k[X_0, ..., X_3]$ l'ideale di <u>tutti</u> i polinomi che si annullano su C, è un ideale omogeneo: $\mathbb{I}(C) = \bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{I}(C)_n$. Siccome C non è piana, $\mathbb{I}(C)_1 = 0$. Abbiamo appena visto che $\mathbb{I}(C)_2$ ha dimensione ≥ 3. Cerchiamo di determinare $\mathbb{I}(C)$.

Ogni piano di $\mathbb{P}^3$ interseca C in tre punti; questi tre punti, visti su $\mathbb{P}^1$ sono gli zeri di una forma omogenea di grado 3 in x, y. Vice versa ogni terna di zeri di una tale forma è l'intersezione di C con un piano.

Osserviamo che $C \subset \mathbb{P}^3$ non ha tri-secante (una retta che interseca C in tre punti contati con molteplicità). Infatti altrimenti prendendo un quarto punto $x \in C$, $\langle x, L\rangle$ sarebbe un piano che interseca C in $>$3 punti. Quindi una forma con tre radici distinte corrisponde ad una sezione piana $C \cap H = \{x_1, x_2, x_3\}$, dove i tre punti x_i non sono allineati. Si vede (Esercizio) che tre punti non allineati di $\mathbb{P}^2$ sono contenuti in ∞^2 coniche.

Sia Q una quadrica contenente C. Consideriamo $Q \cap H$. Se $H \mid Q$, allora $Q = HH'$ e $C \subset HH'$, C essendo irriducibile dovrebbe essere contenuta in H (o H'): impossibile. Quindi $Q \cap H$ è una conica contenete in tre punti x_1, x_2, x_3. Se $Q \cap H = Q' \cap H$, dove $Q, Q' \in \mathbb{I}(C)_2$, allora $H \mid Q - Q'$, cioè $Q - Q' = HH'$ e $C \subset HH'$. Come già visto questo è impossibile. Pertanto la restrizione ad H induce un isomorfismo tra $\mathbb{I}(C)_2$ e le coniche contenenti i tre punti x_i. In conclusione $\dim_k(\mathbb{I}(C)_2) = 3$ e ogni quadrica contenete C è della forma $Q = \lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2 + \lambda_3Q_3$.

Indichiamo con $\Gamma = \{x_1, x_2, x_3\} = C \cap H$. Sia $\mathbb{I}(\Gamma) \subset k[Y_0, Y_1, Y_2]$, l'ideale omogeneo di tutti i polinomi che si annullano su i tre punti x_i. Siccome i tre punti sono in posizione generale, dopo eventuale cambiamento di base, possiamo assumere $x_1 = (1 : 0 : 0), x_2 = (0 : 1 : 0), x_3 = (0 : 0 : 1)$. Vediamo che $\mathbb{I}(\Gamma)_2 = \langle Y_0Y_1, Y_0Y_2, Y_1Y_2\rangle$. Non è difficile vedere che $\mu_2 : \mathbb{I}(\Gamma)_2 \otimes V \to \mathbb{I}(\Gamma)_3 : P \otimes Y_i \to Y_iP$ è suriettiva (qui $V = \langle Y_0, Y_1, Y_2\rangle$ è lo spazio dei polinomi omogenei di grado uno). Cioè ogni $P \in \mathbb{I}(\Gamma)_3$ si scrive $l_1Y_0Y1 + l_2Y_0Y_3 + l_3Y_1Y_2$, dove l_i è un polinomio omogeneo di grado uno negli Y_i. Con un pò di pazienza si mostra più generalmente che $\mu_n : \mathbb{I}(\Gamma)_n \otimes V \to \mathbb{I}(\Gamma)_{n+1}$

è suriettiva per $n \geq 2$ (Esercizio). In conclusione: l'ideale omogeneo $\mathbb{I}(\Gamma)$ è generato da Y_0Y_1, Y_0Y_2, Y_1Y_2.

Mostriamo adesso che $\mathbb{I}(C)$ è generato dalle tre quadriche Q_1, Q_2, Q_3. Sia $S \in \mathbb{I}(C)_3$. Se $S|H = 0$, allora $S = HQ$ dove $Q \in \mathbb{I}(C)_2$ e siamo a posto. Se $S|H \neq 0$, allora $S|H$ è una cubica contenente Γ. Per quanto visto prima: $S|H = \sum_i q_i$ dove q_i è la restrizione ad H di Q_i. Siano $L_i \in k[X_0, ..., X_3]$ tali che $L_i|H = l_i$ (esistono sempre, possiamo assumere H di equazione $X_3 = 0$ e $k[X_0, ..., X_3]_n \to k[X_0, ..., X_2]_n$ è sempre suriettivo). Quindi $(S - \sum L_iQ_i)|H = 0$. Quindi $S - \sum L_iQ_i = HQ$, con $Q \in \mathbb{I}(C)_2$. Questo mostra che $\nu_2 : \mathbb{I}(C)_2 \otimes W \to \mathbb{I}(C)_3$ è suriettiva ($W = k[X_0, ..., X_3]_1$). In modo analogo si mostra che ν_n è suriettiva per $n \geq 2$ e quindi $\mathbb{I}(C)$ è generato dalle tre quadriche Q_1, Q_2, Q_3.

Proposizione 2.5. *L'ideale omogeneo della cubica $\mathbb{I}(C)$ è generato dalle tre quadriche Q_1, Q_2, Q_3.*

In particolare abbiamo visto che ogni curva piana contenente la sezione piana $C \cap H$ proviene da una superficie contenente C. Questo non è sempre vero. L'esempio più semplice è quello di due rette sghembe. Se $X = R_1 \cup R_2$, allora i due punti $X \cap H$ sono sempre contenuti in una retta, ma questa retta non è l'intersezione con H di un piano contenente X. Un esempio più sofisticato, con una curva irriducibile, si ottiene considerando una quintica ellittica: cinque punti sono sempre su una conica, ma una quintica ellittica non è mai contenuta in una quadrica.

Un'altra conseguenza è: $\cap Q_i = C$ ("schematicamente"), cioè in ogni punto $x \in C$ due delle tre quadriche Q_i sono lisce e trasversali. Non ogni curva liscia di $\mathbb{P}^3$ è l'intersezione schematica di tre superficie.

Si può mostrare che per ogni cono quadrico, Q, contenente C, esiste una superficie cubica S, tale che $Q \cap S = C$, insiemisticamente. Cioè $Q \cap S = C$ con molteplicità due (Q e S sono tangenti lungo C e non hanno punti in comune al di fuori di C). Algebricamente $\sqrt{(S, Q)} = \mathbb{I}(C)$. In queste condizioni si dice che C è intersezione insiemistica (con molteplicità due) di S e Q. E' ancora un problema aperto (risalente a Kronecker) sapere se ogni curve liscia di $\mathbb{P}^3$ è insiemisticamente intersezione completa (con una qualche molteplicità ≥ 2) di due superfici.

Una quadrica contenente C ha un'equazione della forma $a(X_1X_2 - X_0X_3) + b(X_1^2 - X_0X_2) + c(X_2^2 - X_1X_3)$. La quadrica è singolare se e solo se non ha rango massimo. Moltiplicando l'equazione per due questo torna a dire che:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -b & -a \\ 0 & 2b & a & -c \\ -b & a & 2c & 0 \\ -a & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Il determinante vale $a^4+b^2c^2-2a^2bc=(a^2-bc)^2$. Quindi nel $\mathbb{P}^2$ delle quadriche contenenti C ($\mathbb{P}(\mathbb{I}(C)_2$ con coordinate $(a:b:c)$) il luogo (geometrico) delle quadriche singolari è la conica liscia di equazione $a^2-bc=0$. Queste quadriche sono facilmente individuabili: sia $p\in C$ e consideriamo il cono di vertice p, base C: è un cono quadrico. In altre parole la proiezione di centro p su un piano H manda C su una curva K. La curva K ha grado due, infatti se $L\subset H$ è una retta i punti di $K\cap L$ sono i punti $\langle p,L\rangle\cap C\setminus\{p\}$ se L è generica (l'immagine di p è il punto $T_pC\cap H$, basta prendere L non passante per quel punto). Il cono di vertice p, base K (*cono proiettante*) contiene ovviamente C. Quindi ogni punto di C individua un cono contenente C e queste sono tutte le quadriche singolari contenenti C (questo ci dice che il luogo delle quadriche singolari è una curva razionale). In particolare in un fascio di quadriche contenenti C ci sono esattamente due quadriche singolari.

Sia $p\in\mathbb{P}^3$ un punto generico (cioè $p\notin C$). Il passaggio per un punto impone una condizione. Quindi esistono ∞^1 quadriche di $\mathbb{I}(C)_2$ che passano per p. Quindi esistono due quadriche, Q,Q', linearmente indipendenti, contenenti C, che passano per p. Le due quadriche sono irriducibili (perché C non è piana). La loro intersezione è una curva X di grado 4 (Bezout). Siccome $C\subset X$ avanza una retta r. La retta r passa per p.

Sia d una retta bi-secante a C passante per p. Allora d incontra ogni quadrica Q,Q' in tre punti. Quindi $d\subset Q,Q'$ cioè $d\subset Q\cap Q'=C\cup r$. Pertanto $d=r$. Questo mostra che esiste al più una bisecante a C passante per p.

Ci sono vari modi di mostrare che r è una bisecante a C. Possiamo supporre che Q,Q' sono lisce (ci sono ∞^1 quadriche di $\mathbb{I}(C)_2$ passanti per p, di cui solo due singolari).

Tutte le quadriche lisce di $\mathbb{P}^3$ sono proiettivamente equivalenti (la classificazione delle forme quadratiche su un campo algebricamente chiuso è data dal rango). Quindi una quadrica liscia è proittivamente equivalente alla quadrica di equazione $X_1X_2-X_0X_3=0$. Questa quadrica, Q, è l'immagine di $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ tramite l'immersione di Segre:

$$s:\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^3:((u:v),(x:y))\to(ux:uy:vx:vy)$$

(Osservare che s è iniettiva). La superficie Q è doppiamente rigata, cioè contiene due famiglie distinte di rette. Se fissiamo $(u_0:v_0)$ nel primo fattore, abbiamo $s:\mathbb{P}^1\to Q:(x:y)\to(u_0x:u_0y:v_0x:v_0y)$. L'immagine è la retta intersezione dei due piani: $v_0X_0=u_0X2$, $v_0X_1=u_0X_3$. Indichiamo questa retta con $L_{(u_0:v_0)}$. Se $(u:v)\neq(u_0:v_0)$, allora $L_{(u:v)}\cap L_{(u_0:v_0)}=\emptyset$. Abbiamo una famiglia ∞^1 di rette due a due sghembe in Q: questa famiglia è tutto Q.

Nello stesso modo, fissando un punto nel secondo fattore, otteniamo un'altra famiglia, $R_{(x:y)}$ di rette due a due sghembe che ricopre Q. Osservare che $L_{(u:v)} \cap R_{(x:y)} = \{p = (ux : uy : vx : vy)\}$. Riassumendo Q è ricoperta da due famiglie di rette: le rette di tipo L e quelle di tipo R. Due rette di tipo L (R) hanno intersezione vuota. Una retta di L e una retta di tipo R s'intersecano in un punto. Le rette di tipo L (R) formano un sistema di *generatrici* di Q. La quadrica Q è doppiamente rigata perché ha due sistemi di generatrici.

Sia $C \subset Q$ una cubica gobba. Siano R, L due generatrici di Q. Siccome $R \cap L = \{p\}$, R e L generano un piano H tale che $H \cap Q = R \cup L$. Siccome $H \cap C =$ tre punti, possiamo dire che due punti stanno su R e uno su L. Questo implica che ogni generatrice di tipo R interseca C in due punti e che ogni generatrice di tipo L interseca C in un punto. (Se non fosse così ci sarebbe una generatrice di tipo R, R_0 e una di tipo L, L_0, intersecante C in due punti. Il piano $\langle R_0, L_0 \rangle$ intersecherebbe C in quattro punti: assurdo). La quadrica Q' interseca ogni retta di tipo R (o L) in due punti. Quindi $Q' \cap Q = C \cup r$ interseca ogni retta di tipo R (L) in due punti. Siccome C interseca una retta di tipo L in un punto, r interseca una retta di tipo L in un punto. Quindi r è una retta di tipo R e pertanto interseca C in due punti: r è l'unica bisecante a C passante per p.

In conclusione se $p \notin C$ esiste una ed un'unica bisecante a C passante per p. Questo implica che la proiezione di C dal centro p su un piano non passante per p è una cubica piana con un punto doppio. Il punto doppio è ordinario se r è una "vera" bisecante, invece è una cuspide se r è una tangente.

Nella terminologia classica il numero di punti doppi *apparenti* di una cubica gobba è $h = 1$.

Le sezioni piane $H \cap C$ corrispondono alle terne di zeri di forme del terzo grado e quindi sono dei tipi seguenti: $H \cap C =$

1. $\{P_1, P_2, P_3\}$, P_i tre punti distinti
2. $\{2P, Q\}$, $P \neq Q$
3. $\{3P\}$

Il caso (1) è ovviamente quello generico; i tre punti come abbiamo già visto sono in posizione generale.

Nel caso (2) il piano è tangente a C in P (ha contatto $>$1). Se fissiamo P la famiglia dei piani H tali che $2P \in H \cap C$ è parametrizzata da C (perché $H \cap C = \{2P, Q\}, Q \in C$). La parametrizzazione è lineare. Infatti questi piani corrispondono ai polinomi $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ che hanno $P = (\alpha : \beta)$ come radice doppia. Possiamo assumere $\beta \neq 0$. Nella carta $y \neq 0$ questo diventa

$$\begin{cases} a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0 \\ 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare di rango due nelle incognite a, b, c, d. In altri termini l'insieme dei divisori (effettivi) di $|3Q|$ che contengono $2P$ è un $\mathbb{P}^1$ nel $\mathbb{P}^3 \simeq |3Q|$. Quindi i piani H tali che $2P \subset H \cap C$ formano un fascio lineare: sono i piani contenenti una retta. Nel nostro caso questa retta è $T_P(C)$, la tangente a C in p.

Tra questi piani c'è il piano OS_P tale che $C \cap OS_P = \{3P\}$, che ha contatto tre con C in P. Questo è il *piano osculatore* a C in P. Geometricamente lo si può descrivere così: se $Q \neq P$, $Q \in C$, Q e $T_P(C)$ generano un piano: $H_Q = \langle T_P(C), Q \rangle$. Quando $Q \to P$ questi piani H_Q hanno come limite il piano OS_P. (Questa definizione vale per ogni curva). Ovviamente il piano osculatore in P contiene $T_P(C)$.

La cubica gobba, per motivi di grado, non ha piani *surosculatori* (piani che hanno contatto >3 in un punto).

Indichiamo con $\mathbb{P}_3^*$ lo spazio proiettivo che parametrizza i piani di $\mathbb{P}^3$. Abbiamo una mappa $f : C \to \mathbb{P}_3^* : P \to OS_P$. Per il principio delle costruzioni algebro-geometriche (!), f è un morfismo. La curva $f(C) =: C^\vee \subset \mathbb{P}_3^*$ è la *curva duale* di C. Mostriamo che $C^\vee$ è anch'essa una cubica gobba. Se identifichiamo un punto di $\mathbb{P}^1$ con la forma lineare di cui è radice la mappa f non è altro che: $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^3V) : \langle l \rangle \to \langle l^3 \rangle$ $(V = k[x, y]_1)$. Cioè se $l = ax + by$, la sua immagine è $a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2 + b^3$. Prendendo come base di $S^3V = k[x, y]_3$, $x^3, 3x^2y, 3xy^2, y^3$ $(ch(k) \neq 3)$, abbiamo $(a : b) \to (a^3 : a^2b : ab^2 : b^3)$, quindi $C^\vee$ è una cubica gobba. Si dice che la cubica gobba è *autoduale*.

Osserviamo, en passant, una conseguenza divertente: sia $P \in k[x, y]_3$ un polinomio omogeneo di grado 3. E' possibile scrivere P come somma di due cubi (di forme lineari)? e in quanti modi? (problema di Waring geometrico). Il nostro P corrisponde ad un punto di $\mathbb{P}(S^3V)$. Se P non è un cubo $P \notin C$ dove C è la cubica gobba immagine di $l \to l^3$. Come abbiamo visto esiste una ed un'unica bisecante a C passante per P. Supponiamo che si tratti di una "vera" bisecante. Siano m^3, n^3 i due punti di intersezione. Quindi P sta sulla retta generata da m^3 e n^3: $P = \lambda m^3 + \mu n^3 = (\lambda^{1/3}m)^3 + (\mu^{1/3}n)^3$, quindi P si scrive come la somma di due cubi (e questa scrittura è unica). Se invece la bisecante è una tangente l'argomento precedente non funziona e bisogna prendere un piano passante per P per scrivere P come la somma di tre cubi (e la scrittura non è unica).

L'unione delle tangenti a C è una superficie (*sviluppabile delle tangenti*), T. Ovviamente T contiene C ed è singolare lungo C. Anzi $Sing(T) = C$ (perché due tangenti non possono incontrarsi). Qual'è il grado di T? Il grado di una superficie in $\mathbb{P}^3$ è il numero di punti in cui l'incontra una retta generica. Nel nostro caso è il numero di tangenti che si appoggiano su una retta generica R (in particolare $R \cap C = \emptyset$). Sia $\mathcal{P}$ il fascio di piani per R. Ogni piano del fascio incontra C in tre punti e vogliamo sapere quanti piani del fascio incontrano C in un gruppo del tipo $2P+Q$.

Abbiamo quindi una corrispondenza tra $\mathbb{P}^1 \simeq \mathcal{P}$ e $C \simeq \mathbb{P}^1$ che ad ogni punto di $\mathcal{P}$ associa un gruppo di tre punti di C (e vice versa ad ogni punto di C associa un unico piano del fascio $\mathcal{P}$). Il grafico di questa corrispondenza è una curva (razionale) in $\mathcal{P} \times C = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Visto che $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è una quadrica liscia, il grafico della corrispondenza, $\mathcal{C}$, è una curva (di bi-grado $(1,3)$) su una quadrica liscia. Togliendo un punto ad ogni $\mathbb{P}^1$ possiamo vedere $\mathcal{C}$ come una curva piana ($\subset k \times k$) definita da un polinomio $f(x,y)=0$, tale che ad ogni valore di x corrisponda tre valori di y, mentre ad ogni valore di y corrisponda un unico valore di x. Quindi $f(x,y)=xg(y)+h(y)$, dove g,h hanno grado 3. Possiamo riscrivere f nel modo seguente: $f=y^3X_0+y^2X_1+yX_2+X_3$, dove gli X_i sono dei polinomi di grado uno in x. Abbiamo $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2X_0+2yX_1+X_2$. Gli x che ci interessano sono quelli per cui f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ hanno una radice comune. Possiamo rimpiazzare f con $g=3f-y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, quindi $g=y^2X_1+2yX_2+3X_3$ e guardare quando g e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ hanno una radice in comune. Ricordiamo che due polinomi hanno una radice comune se il loro risultante è nullo. Il risultante di g e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ è (in generale) un polinomio di grado 4 in x. Concludiamo che, in generale, ci sono quattro piani del fascio $\mathcal{P}$ la cui intersezione con C contiene un punto doppio. Quindi $\deg(T)=4$.

In altre parole se $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, f ha una radice doppia se e solo se ha una radice in comune con f', se e solo se $R(f,f')=0$. D'altra parte f,f' hanno una radice in comune se e solo se $\deg(MCD(f,f'))\geq 1$ cioè se $Uf+Vf'=0$ con $\deg(U)\leq n-2, \deg(V)\leq n-1$ ($\deg(f)=n$). Risulta che $f,xf,...,x^{n-2}f,f',xf',...,x^{n-1}f'$ sono linearmente dipendenti nello spazio dei polinomi di grado $\leq 2n-2$. Quindi il determinante di questi vettori nella base $1,x,...,x^{2n-2}$ deve essere nullo. A priori questo determinante (di una matrice $(2n-1)\times(2n-1)$) è un polinomio di grado $2n-1$ nei coefficienti, ma tenendo presente che $a\neq 0$, viene un polinomio di grado $2n-2$.

Questo ragionamento si applica ad ogni curva razionale $C\subset\mathbb{P}^3$, $\deg(C)=d$. Troviamo che la sviluppabile delle tangenti ha grado: $2d-2$. Questo è equivalente al seguente fatto: sia $C\subset Q$ una curva razionale di grado $d+1$ su una quadrica liscia Q. La curva C è di bi-grado $(1,d)$ (la quadrica è doppiamente rigata con due sistemi di generatrici, quelle di tipo (R) intersecano C in un punto, quelle di tipo (D) in d punti). Fissiamo R una generatrice di tipo (R). Abbiamo un morfismo $f: C\to R$ di grado d (ogni fibra consta di d punti contati con molteplicità). La fibra sopra $x\in R$ è data da $D_x\cap C$. Allora tra le generatrici di tipo (D) ce ne sono $2d-2$ che sono tangenti a C. "In generale" queste $2d-2$ tangenti sono distinte (con contatto due con C). Questo è un caso particolare del teorema di Hurwitz.

Esercizi, temi di riflessioni:

1. Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una quartica razionale liscia, irriducibile. Mostrare che C è contenuta in una (ed una sola) quadrica, cioè $\dim \mathbb{I}(C)_2 = 1$. (Hint: le quadriche non contenenti C segano su C un divisore effettivo di grado 8, contare il 'numero' di quadriche ed usare RR su C).
2. Mostrare che la sviluppabile delle tangenti della cubica gobba è la quartica di equazione $Q_1^2 - Q_2Q_3$ (notazioni come nel testo).
3. * Con argomentazioni del genere mostrare che ogni quintica razionale in $\mathbb{P}^3$ ha una quadri-secante (una retta che interseca C in quattro punti, con molteplicità).

3

Fasci.

3.1 Fasci: dal locale al globale.

Se X è una varietà (differenziabile, analitica, algebrica), abbiamo definito per ogni $x \in X$ l'anello locale dei germi di funzioni regolari in x: $\mathcal{O}_x$. Se U è un aperto contenente x e se f è un morfismo definito su U ($f \in \mathcal{O}(U)$), allora f definisce un germe in x, quindi abbiamo un'applicazione $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_x$. Se $V \subset U$ è un aperto contenuto in U, con $x \in V$, abbiamo l'applicazione di restrizione $r_{U,V} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V) : f \to f|V$. Quindi possiamo considerare la restrizione di f a V, $f|V$, e poi il germe in x di $f|V$, ovviamente otteniamo lo stesso germe di prima. In altri termini $\{\mathcal{O}(U)\}_{x \in U}$, con le applicazioni di restrizione è un sistema diretto (o induttivo) e $\mathcal{O}_x$ è il limite diretto (o induttivo) di questo sistema. Vediamo quindi che la collezione $\{\mathcal{O}(U)\}$, con $U \subset X$ aperto, con le applicazioni di restrizione, permette di ricostruire gli anelli locali $\mathcal{O}_x$, $x \in X$. La collezione $\{\mathcal{O}(U)\}$ con le applicazioni di restrizione $r_{U,V}$ è il *fascio*, $\mathcal{O}_X$ (o più semplicemente $\mathcal{O}$), delle funzioni regolari su X. In particolare $\mathcal{O}(U)$, le sezioni del fascio sull'aperto U, sono le funzioni regolari su U; le sezioni globali $\mathcal{O}(X)$ sono le funzioni regolari su tutto X. Se X è una varietà analitica compatta o una varietà algebrica proiettiva, ogni funzione regolare su tutto X è costante, quindi $\mathcal{O}(X) = k$ è un oggetto di poco interesse (è lo stesso per tutte le varietà), invece il fascio $\mathcal{O}_X$ è un oggetto molto più ricco (contiene tutte le informazioni locali $\mathcal{O}(U), \mathcal{O}_x$).

3.2 Prefasci e fasci di funzioni.

Iniziamo con una definizione che non è quella più generale ma che rende bene l'idea.

Siano X uno spazio topologico e K un insieme non vuoto. Indichiamo con $A(X, K)$ l'insieme delle applicazioni $f : X \to K$.

Definizione 3.1. *Darsi un prefascio di funzioni, $\mathcal{P}$, su X consiste nel darsi per ogni aperto $U \subset X$, un insieme $\mathcal{P}(U) \subset A(U,K)$ di modo che i $\mathcal{P}(U)$ siano chiusi sotto l'operazione di restrizione. Cioè: se $U \subset V$ e se $f \in \mathcal{P}(V)$, allora $f|U \in \mathcal{P}(U)$.*

Gli elementi di $\mathcal{P}(U)$ sono le sezioni *di $\mathcal{P}$ su U.*

Esempi:

1. Se X è una varietà C^∞-differenziabile e se $U \subset X$ è un aperto $C^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ è } C^\infty\}$ è un prefascio.
2. Se X è una varietà analitica complessa $\mathcal{O}_{an}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ è analitica}\}$ è un prefascio.
3. Se X è uno spazio topologico $K(U) = \{f : U \to K \mid f \text{ è costante}\}$ è un prefascio il prefascio costante K).
4. Se X è una varietà algebrica $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to k \mid f \text{ è regolare}\}$ è un prefascio.
5. Se $X = \mathbb{R}$, $L(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata}\}$ è un prefascio.

Questi prefasci non sono tutti "uguali": in alcuni la proprietà che li definisce è locale, in altri ((3), (5)) no.

Un prefascio è un fascio se la proprietà che lo definisce è *locale*.

Definizione 3.2. *Un prefascio, $\mathcal{P}$, di funzioni su X è un fascio se vale l'assioma di incollamento: se $\bigcup U_i = U$ è un ricoprimento aperto di U e se $f_i \in \mathcal{P}(U_i)$ tali che $f_i|U_j = f_j|U_i, \forall i,j$, allora esiste una ed un'unica $f \in \mathcal{P}(U)$ tale $f|U_i = f_i$.*

L'esistenza e l'unicità di f sono garantite dalla condizione $f_i|U_j = f_j|U_i$ (perché sono funzioni). L'assioma dice essenzialmente che $f \in \mathcal{P}(U)$.

Vediamo che l'esempio (3) non è un fascio. Supponiamo che K abbia almeno due elementi e che sia possibile trovare un aperto U di X unione disgiunta di due aperti non vuoti U_1, U_2. Sia $f_1 : U_1 \to K : x \to \alpha$ e $f_2 : U_2 \to K : x \to \beta$, con $\alpha \neq \beta$. Allora non c'è nessuna funzione costante $f : U = U_1 \cup U_2 \to K$ tale $f|U_i = f_i$. Quindi K non è un fascio.

Nello stesso modo (5) non è un fascio: sia $I_n =]-n, n[$, $f(x) = 2x$, $f_n = f|I_n$. Ogni f_n è limitata, ma f non lo è.

Osserviamo che se $\mathcal{P}$ è un prefascio di funzioni che non è un fascio c'è sempre modo, aggiungendo delle funzioni, di "estenderlo" a un fascio.

Riprendiamo l'esempio (3). Una funzione $f : X \to K$ è *localmente costante* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno di x tale che f sia costante su questo intorno. Sia adesso $K^+(U) = \{f : U \to K \mid f \text{ è localmente costante}\}$. Allora K^+ è un fascio e per ogni aperto $K(U) \subset K^+(U)$.

Questo è un procedimento generale:

Definizione 3.3. *Sia $\mathcal{P}$ un prefascio di funzioni su X a valori in K. Sia $\mathcal{P}^+ = \{f : U \to K \mid \forall x \in U, \exists U_x,$ aperto, $U_x \subset U$ tale che $f|U_x \in \mathcal{P}(U_x)\}$. Allora $\mathcal{P}^+$ è un fascio (detto il fascio associato al prefascio $\mathcal{P}$).*

Quando abbiamo un prefascio $\mathcal{P}$ di funzioni possiamo definire la sua *spiga* in un punto x, $\mathcal{P}_x$, come l'insieme dei germi di funzioni in $\mathcal{P}(U)$, dove $x \in U$.

Una definizione più sofisticata (ma equivalente) consiste nel vedere $\{\mathcal{P}(U)\}_{x\in U}$ come un sistema diretto (induttivo), usando le applicazioni di restrizione. Si ha: $\mathcal{P}_x = \varinjlim \mathcal{P}(U)$ $(x \in U)$.

Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ sono due prefasci di funzioni su X darsi un morfismo $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ consiste nel darsi per ogni aperto U un'applicazione $\varphi_U : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{F}(U)$. Queste applicazioni devono commutare con le restrizioni:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(U) & \overset{\varphi_U}{\to} & \mathcal{F}(U) \\ r_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho_{UV} \\ \mathcal{P}(V) & \overset{\varphi_V}{\to} & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Un morfismo induce per ogni $x \in X$ un'applicazione $\varphi_x : \mathcal{P}_x \to \mathcal{F}_x$.

3.3 Spazi anellati (Ringed spaces).

Una varietà differenziabile, analitica, X, è ottenuta per incollamenti di modelli locali (aperti di $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$). Vediamo, velocemente, come è possibile definire una nozione di varietà usando i fasci.

Sia k un campo e sia X uno spazio topologico. L'insieme $A(X,k)$ è una k-algebra per le operazioni usuali (definite puntualmente).

Definizione 3.4. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di funzioni a valori in k su X. Si dice che $\mathcal{F}$ è un fascio di algebre se per ogni aperto (non vuoto) $\mathcal{F}(U)$ è una sotto-algebra di $A(U,k)$. Si dice allora che $(X,\mathcal{F})$ è un k-spazio annellato ("ringed space"). Il fascio $\mathcal{F}$ è il* fascio strutturale *di X.*

Per esempio $(\mathbb{R}^n, C^\infty)$, $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{an})$, $(\mathbb{A}^n, \mathcal{O})$ sono degli spazi annellati.

Definizione 3.5. *Siano $(X,\mathcal{F})$, $(Y,\mathcal{G})$ due spazi k-annellati. Un morfismo $\varphi : X \to Y$ è un'applicazione continua tale che se $f \in \mathcal{G}(U)$, allora $\varphi^*(f) \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$. Qui $\varphi^*(f) = f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \to k$.*

Quindi φ trasforma funzioni "regolari" in funzioni "regolari". Osservare che questo basta per definire la nozione di applicazione differenziabile, analitica ecc...

Come al solito un isomorfismo è un morfismo biiettivo, φ, tale che φ^{-1} sia un morfismo.

Definizione 3.6. *Una varietà differenziabile C^∞ è un $\mathbb{R}$-spazio annellato $(X, \mathcal{F})$ tale che:*

1. *La topologia di X è definita da una metrica*
2. *Esiste un ricoprimento aperto U_i di X tale che $(U_i, \mathcal{F}|U_i) \simeq (V_i, \mathcal{C}^\infty)$ (come $\mathbb{R}$-spazi annellati), dove $V_i \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto e dove $\mathcal{C}^\infty$ è il fascio delle funzioni differenziabili su V_i).*

La prima condizione è tecnica: in sostanza si vuole uno spazio di Hausdorff e si vuole potere usare le partizioni dell'unità.

In modo analogo si definisce la nozione di varietà analitica complessa. Una varietà analitica complessa di dimensione uno si chiama *superficie di Riemann.*

Il caso delle varietà algebriche è un attimo più complicato. I modelli locali non sono dei belli aperti, regolari, di k^n, ma varietà (quasi)-affini. Una varietà affine è un sotto-insieme algebrico $X \subset \mathbb{A}^n$ irriducibile (i.e. $X = V(I), I \subset k[x_1, ..., x_n]$, I primo). Osservare che X può essere singolare. Su X si mette la topologia di Zariski (indotta da quella di $\mathbb{A}^n$). Si considera poi $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X (è chiaramente un prefascio e poi si vede che è un fascio); è un fascio di k-algebre. Si ha $\mathcal{O}_X(X) \simeq k[x_1, ..., x_n]/I$.

In analogia con quanto fatto prima si vorrebbe definire una varietà algebrica come un k-spazio annellato localmente isomorfo a $(X, \mathcal{O}_X)$, dove X è una varietà affine, più una qualche condizione tipo Hausdorff. Purtroppo la topologia di Zariski non è Hausdorff. La condizione Hausdorff è utile per il fatto seguente: siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue tra spazi topologici. Se $f = g$ su un aperto denso di X e se Y è Hausdorff allora $f = g$.

Infatti consideriamo $\varphi : X \to Y \times Y : x \to (f(x), g(x))$. L'applicazione φ è continua (per la topologia prodotto su $Y \times Y$). La diagonale $\Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ è chiusa in $Y \times Y$ perché Y è di Hausdorff. Quindi $E = \{x \mid f(x) = g(x)\} = \varphi^{-1}(\Delta)$ è chiuso. Ma $U \subset E$, U aperto denso, quindi $X = \overline{U} \subset \overline{E} = E$, cioè $E = X$.

Questo tipo di ragionamento si può ripetere se si riesce a dire che φ è continua e se la diagonale è chiusa. Nella topologia di Zariski su $\mathbb{A}^2 = k \times k$, la diagonale è chiusa: $\Delta = V(x-y)$ (questo mostra in particolare che la topologia di Zariki su $\mathbb{A}^2$ <u>non</u> è la topologia prodotto della topologia di Zariski su k). Si dice che $\mathbb{A}^2$ è una varietà algebrica *separata.*

Definizione 3.7. *Una varietà algebrica (di Serre), $(X, \mathcal{F})$ è un k-spazio annellato, separato, localmente isomorfo a $(Z, \mathcal{O}_Z)$, dove Z è una varietà affine.*

Questa definizione, che si trova in F.A.C (Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math. (1955)) è l'antenato della nozione di schema. La definizione sorvola su una difficoltà: bisogna definire il prodotto $X \times X$ per potere dire che $\Delta \subset X \times X$ è chiusa.

3.4 Fasci: take two.

Vogliamo definire una nozione di (pre)fascio più generale dove $\mathcal{P}(U)$ non sia necessariamente un insieme di funzioni ma un qualche oggetto algebrico (gruppo, anello, modulo ecc...). Si procede come prima ma tenendo presente che le restrizioni r_{VU} sono date in modo astratto. Vogliamo inoltre che i morfismi rispettino la struttura algebrica (di gruppo, anello, modulo ecc...).

Definizione 3.8. *Un prefascio di gruppi abeliani, $\mathcal{P}$, sullo spazio topologico X consiste dei seguenti dati: per ogni aperto $U \subset X$, di un gruppo abeliano $\mathcal{P}(U)$ e dei morfismi di restrizione:*

1. *per ogni aperto U: $r_{UU} = Id_U$*
2. *se $U \subset V \subset W$: $r_{VU} \circ r_{WV} = r_{WU}$*

Se questo non comporta inconvenienti continueremo a notare $f|V$ invece di $r_{UV}(f)$.

Un modo più categorico di dare questa definizione: sia $\mathcal{A}(X)$ la categoria i cui oggetti sono gli aperti di X, con le frecce

$$Hom(U,V) = \begin{cases} \{i\}, \text{ dove } i : U \hookrightarrow V \text{ se } U \subset V \\ \emptyset, \text{ se } U \not\subset V \end{cases}$$

Allora un prefascio di gruppi abeliani è un funtore contravariante dalla categoria $\mathcal{A}(X)$ nella categoria Ab dei gruppi abeliani.

Un fascio è un prefascio che verifica la condizione d'incollamento:

Definizione 3.9. *Un prefascio di gruppi abeliani $\mathcal{P}$ è un fascio se per ogni ricoprimento aperto $\bigcup U_i = U$ e per ogni $\{s_i\}, s_i \in \mathcal{P}(U_i)$ con $s_i|U_{ij} = s_j|U_{ij}$ ($U_{ij} = U_i \cap U_j$), esiste una ed un'unica sezione $s \in \mathcal{P}(U)$ tale che $s|U_i = s_i, \forall i$.*

Quello che ci interessa è la situazione seguente: X è una varietà algebrica proiettiva (anzi una curva), $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari (cioè $(X, \mathcal{O}_X)$ è un "ringed space") e $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo. Questo vuole dire che per ogni aperto U, $\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$-modulo. In altri termini $\mathcal{F}$ è un fascio di gruppi abeliani con una moltiplicazione per le funzioni regolari compatibile con la legge di gruppo. Questa è (quasi) la categoria che ci interessa. Osservare che in queste condizioni $\mathcal{F}(X)$ è un $\mathcal{O}_X(X) \simeq k$-modulo, ossia un k-spazio vettoriale.

Naturalmente un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste nel darsi per ogni aperto U un morfismo $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ di $\mathcal{O}_X(U)$-moduli.

3.5 Morfismi in $PFab_X, Fab_X$.

Il nostro primo obiettivo è di definire per un morfismo, una nozione di Ker, Im, Coker e quindi di successione esatta. Per iniziare possiamo lavorare nelle categorie $PFAb_X, FAb_X$ dei prefasci, fasci di gruppi abeliani su X.

Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci di gruppi abeliani, per ogni aperto U possiamo considerare $Ker(\varphi_U) \subset \mathcal{F}(U)$. Questo definisce senz'altro un prefascio. Non è troppo difficile vedere che questo definisce un fascio di gruppi abeliani, notato $Ker(\varphi)$. Indicando con 0 il fascio costante uguale al gruppo nullo possiamo scrivere: $0 \to Ker(\varphi) \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$, e questa successione è esatta.

Osserviamo che φ induce per ogni $x \in X$ un morfismo di gruppi: $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ e si verifica che la successione $0 \to Ker(\varphi)_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è esatta.

Definizione 3.10. *Il morfismo φ è iniettivo se e solo se $Ker(\varphi)$ è il fascio nullo.*

Si sarebbe tentati di fare la stessa cosa per l'immagine e poi per il coker. *Purtroppo in generale $U \to Im(\varphi_U)$ non definisce un fascio, ma solo un prefascio!*

Esempio 3.11. Un esempio fondamentale è fornito dal logaritmo complesso. Si ricorda che la funzione esponenziale, exp, è olomorfa su $\mathbb{C}$ e $exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Se G è un dominio in $\mathbb{C}$, $l : G \to \mathbb{C}$ è un logaritmo se $e^{l(z)} = z, \forall z \in G$. Siccome exp non si annulla mai, lo zero non ha logaritmo. Sia log il logaritmo reale. Sia $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$ e poniamo $\alpha = log(r) + i\theta + 2ni\pi$, allora $e^\alpha = z$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$; quindi se $z \neq 0$ esistono infiniti logaritmi di z. Per avere un log bisogna togliere un semiasse contenente l'origine del piano complesso, per esempio su $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, ogni z si scrive $z = re^{i\theta}$ con $-\pi < \theta < \pi$ e si pone $Log(z) = log(r) + i\theta$ (determinazione principale); ogni altro Log su $\mathbb{C}^-$ è della forma $Logz + 2in\pi, n \in \mathbb{Z}$. In particolare non esiste nessun Log su $\mathbb{C}^*$. In conclusione, localmente su $\mathbb{C}^*$ esiste il Log, ma è impossibile definirlo globalmente. Torniamo ai nostri fasci. Sia $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_\mathbb{C}$ il fascio delle funzioni olomorfe, $\mathcal{G} = \mathcal{O}^*_\mathbb{C}$ il fascio delle funzioni olomorfe che non si annullano. L'esponenziale definisce un morfismo $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Mostriamo che il prefascio $preim(f)$ non è un fascio. Sia $U = \mathbb{C}^*$, U è ricoperto da $V = \mathbb{C}^-$ e $W = \mathbb{C}^+$ (il piano complesso senza il semiasso reale negativo, risp. positivo). La funzione identità appartiene a $Im(f_V)$: infatti su V esiste un logaritmo, $Log \in \mathcal{O}(V)$ e $f_V(Log) = e^{Log} = Id \in \mathcal{O}^*(V)$. Nello stesso modo Id appartiene a $Im(f_W)$. Se $preim(f)$ fosse un fascio, le due sezioni Id su V e W, che coincidono su $V \cap W$, dovrebbero incollarsi per dare un elemento di $im(f_U)$, che ristretto a V, W è Id: questo è impossibile perché non esiste nessuno logaritmo su tutto $\mathbb{C}^*$. Quindi il prefascio $preim(f)$ *non* è un fascio.

Quindi tutto quello che abbiamo in generale è un prefascio $preIm(\varphi)$, definito da: $preIm(\varphi)(U) = Im(\varphi_U) \subset \mathcal{G}(U)$. Questo è scocciante perché noi vogliamo assolutamente un fascio! La soluzione consiste nel considerare il *fascio associato*: $Im(\varphi) = preIm(\varphi)^+$.

A questo punto è utile tornare un attimo sul fascio associato ad un prefascio (*sheafification of a presheaf*).

Proposizione 3.12. *L'associazione $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$ definisce un funtore da $PFAb_X$ in FAb_X tale che:*

1. *c'è un morfismo canonico $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$ che induce un isomorfismo sulle spighe: $\mathcal{P}_x \simeq \mathcal{P}_x^+, \forall x \in X$*
2. *Se $\mathcal{P}$ è un fascio, il morfismo canonico $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$ è un isomorfismo*
3. *Ogni morfismo da $\mathcal{P}$ in un fascio fattorizza tramite $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$.*

Dimostrazione. Il lettore, se vuole, può dimostrare questa proposizione per fasci di funzioni.

Il fascio $\mathcal{P}^+$ è definito come nel caso dei fasci di funzioni "aggiungendo del locale" nella definizione.

Definizione 3.13. *Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci di gruppi abeliani, indichiamo con $Im(\varphi)$ il fascio $preIm(\varphi)^+$.*

Il morfismo φ è suriettivo se $Im(\varphi) = \mathcal{G}$. Questo è equivalente a dire che $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è suriettivo, $\forall x \in X$.

Passiamo adesso al coker: $U \to coker(\varphi_U) = \mathcal{G}(U)/\varphi(U)$ definisce un prefascio che in generale non è un fascio. Anche qui la soluzione consiste nel considerare il fascio associato, che si nota $Coker(\varphi)$.

Più generalmente se per ogni U, $\mathcal{F}(U)$ è un sotto-gruppo di $\mathcal{G}(U)$, $U \to \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ definisce un prefascio che non è sempre un fascio. Il fascio quoziente $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ è il fascio *associato.*

La morale di questo pasticcio è che l'iniettività (risp. la suriettività) di un morfismo di fasci di gruppi abeliani si verifica sulle spighe. (Perché $\mathcal{P}_x \simeq \mathcal{P}_x^+$.)

Per riassumere:

Proposizione 3.14. *Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dei fasci di gruppi abeliani su X e sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo.*

1. *φ è iniettivo $\Leftrightarrow \varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è iniettivo, $\forall x \in X \Leftrightarrow Ker(\varphi) = 0$*
2. *φ è suriettivo $\Leftrightarrow \varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è suriettivo, $\forall x \in X \Leftrightarrow Coker(\varphi) = 0$*

3. Abbiamo due successioni esatte di fasci ('decomposizione canonica'):

$$0 \to Ker(\varphi) \to \mathcal{F} \to Im(\varphi) \to 0$$

$$0 \to Im(\varphi) \to \mathcal{G} \to Coker(\varphi) \to 0$$

E cosa succede sugli aperti? Questo è tutta la questione:

Proposizione 3.15. *Sia*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani, allora per ogni aperto $U \subset X$ abbiamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$$

ma l'ultimo morfismo non è necessariamente suriettivo.

Dimostrazione. Prendiamo come punto di partenza: la successione di fasci è esatta $\Leftrightarrow$ è esatta sulle spighe per ogni x.

Siano $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ i morfismi. Visto che la successione è esatta φ è iniettivo quindi φ_x è iniettivo per ogni x. Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varphi_U(s) = 0$. Allora $(\varphi_U(s))_x = 0$. Ma $(\varphi_U(s))_x = \varphi_x(s_x)$. Siccome φ_x è iniettivo, viene $s_x = 0, \forall x$, quindi $s = 0$. Questo mostra $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ esatta.

Mostriamo che $\psi_U \circ \varphi_U = 0$. Se $s \in \mathcal{F}(U)$, allora $\psi_U(\varphi_U(s))_x = \psi_x(\varphi_x(s_x)) = 0$ perché la successione delle spighe è esatta. Quindi $\psi_U(\varphi_U(s)) = 0$ e $Im(\varphi_U) \subset Ker(\psi_U)$.

Sia $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ tale che $\psi_U(\sigma) = 0$. Il germe σ_x è l'immagine di qualche germe a_x. Sia (U_i, a_i) un rappresentante del germe a_x ($U_i \subset U$). Allora il germe di $\varphi_{U_i}(a_i) - \sigma|U_i$ è nullo in x. Prendendo un rappresentante vediamo che, restringendo semmai U_i, abbiamo $\varphi_{U_i}(a_i) = \sigma|U_i$. Facendo variare $x \in U$ otteniamo un ricoprimento U_i con $a_i \in U_i$ tali che $\varphi_{U_i}(a_i) = \sigma|U_i$. Abbiamo $\varphi_{ij}(a_i|U_{ij} - a_j|U_{ij}) = 0$. Per la prima parte questo implica $a_i|U_{ij} = a_j|U_{ij}$. Quindi le sezioni a_i si incollano in una sezione $a \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varphi_U(a) = \sigma$. Quindi $Ker(\psi_U) \subset Im(\varphi_U)$.

In generale l'ultimo morfismo non è suriettivo. Vediamolo su un sempio che sarà fondamentale nel seguito.

3.6 Un esempio importante.

Sia $P \in \mathbb{P}^1$ un punto. Sia $X = \{P\}$, X è una sotto-varietà di $\mathbb{P}^1$, è anche un divisore effettivo. Indichiamo con $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ il fascio delle funzioni regolari su $\mathbb{P}^1$. Per un aperto $U \subset \mathbb{P}^1$ poniamo

$$\mathcal{I}_X(U) = \begin{cases} \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(P) = 0\}, \text{ se } P \in U \\ \mathcal{O}(U), \text{ se } P \notin U \end{cases}$$

(se $U = \emptyset$, $\mathcal{I}_X(U) = \{0\} = \mathcal{O}(U)$). Si vede facilmente che $\mathcal{I}_X$ è un fascio e $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}$. Abbiamo quindi: $0 \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{O}$. Chi è il quoziente?

Per vederlo guardiamo le spighe. Sia $x \in \mathbb{P}^1$, $x \neq P$. Se $\varphi_x \in \mathcal{O}_x$ esiste un rappresentante (V, φ) con $P \notin V$. Siccome $\mathcal{I}_X(V) = \mathcal{O}(V)$, segue che $\varphi_x \in \mathcal{I}_{X,x}$. In conclusione $\mathcal{I}_{X,x} = \mathcal{O}_x$ e il quoziente è zero. Nel punto P abbiamo $\mathcal{I}_{X,P} = \{\varphi_p \mid \varphi_P(P) = 0\} = \mathfrak{m}_P$. Quindi il quoziente è: $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P \simeq k$.

Sia adesso il prefascio $\mathcal{O}_P$ definito da:

$$\mathcal{O}_P(U) = \begin{cases} 0 \text{ se } P \notin U \\ k \text{ se } P \in U \end{cases}$$

Allora $\mathcal{O}_P$ è un fascio e $\mathcal{O}_{P,x} = \begin{cases} k \text{ se } x = P \\ 0 \text{ se } x \neq P \end{cases}$

Questo fascio è il fascio grattacielo (*sky-scraper sheaf*), di fibra k in P. Il *supporto* di un fascio $\mathcal{F}$ è $Supp(\mathcal{F}) = \{x \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$, il fascio $\mathcal{O}_P$ ha supporto nel punto P e la sua spiga è k. In conclusione abbiamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{I}_P \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0 \tag{3.1}$$

Osservazione 3.16. Se $P = (0:1)$ passando nella carta affine $y \neq 0$, P diventa l'origine. Il punto P è una varietà affine di $\mathbb{A}^1$, definita dall'ideale $I = (x)$ e abbiamo una successione esatta:

$$0 \to I \to k[x] \to k \to 0$$

La successione (3.1) è la versione "fasci" di questa successione esatta. In particolare possiamo vedere $\mathcal{O}_P$ come il fascio strutturale della varietà $X = \{P\}$. Il morfismo $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_P$ è la valutazione (restrizione) delle funzioni a P.

Detto questo ripetiamo quanto fatto non più per $X = \{P\}$ ma per $X = \{P, Q\}$, $P \neq Q$ due punti distinti di $\mathbb{P}^1$. Otteniamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_Q \to 0 \tag{3.2}$$

Qui $\mathcal{F} = \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_Q$ è un doppio gratta-cielo (!): ha supporto in P, Q e spiga k in entrambi i punti.

Se prendiamo le sezioni globali abbiamo:

$$0 \to \mathcal{I}_X(\mathbb{P}^1) \to \mathcal{O}(\mathbb{P}^1) \to k \oplus k$$

Siccome $\mathcal{O}(\mathbb{P}^1) \simeq k$, l'ultimo morfismo non è suriettivo.

3.7 Il funtore "sezioni globali".

Sia X uno spazio topologico, la categoria FAb_X dei fasci di gruppi abeliani su X è una categoria *abeliana*: è additiva e ha dei Ker, Coker.

Definizione 3.17. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X, le sezioni globali di $\mathcal{F}$ sono gli elementi di $\mathcal{F}(X)$.*

Si usa notare $\Gamma(X, \mathcal{F})$ (o $\Gamma(\mathcal{F})$) il gruppo $\mathcal{F}(X)$. Un'altra notazione è: $H^0(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$.

Il funtore "sezioni globali" da FAb_X in Ab è definito da $\mathcal{F} \to \Gamma(\mathcal{F})$. Si verifica che questo definisce effettivamente un funtore covariante (verifiche sulle frecce ecc...).

Per la Proposizione 3.15, il funtore Γ (o H^0) è esatto a sinistra ma non a destra. Si vorrebbe stimare, approssimare, funtorialmente, il difetto di esattezza. Si tratta di un problema generale che riguarda non solo il funtore H^0 ma tanti altri funtori importanti (per esempio $- \otimes M$, $Hom(-, M), Hom(M, -)$...). Lo si fa (sotto certe ipotesi) con la teoria dei funtori derivati.

4

Funtori derivati.

4.1 Il meccanismo.

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore additivo, covariante, tra due categorie abeliane. Per esempio $\mathcal{C} = A - mod$, la categoria degli A-moduli (A commutativo, of course;-) e $\mathcal{D} = Ab$ (la categoria degli $\mathbb{Z}$-moduli). Supponiamo F esatto a sinistra. Quindi per ogni successione esatta $0 \to M' \to M \xrightarrow{f} M'' \to 0$ abbiamo una successione esatta: $0 \to F(M') \to F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M'')$ e si vorrebbe misurare il difetto di esattezza a destra del funtore. Si cerca quindi di fare proseguire (funtorialmente) la successione: $0 \to F(M') \to F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M'') \to R^1F(M') \to \cdots$. In particolare se $R^1F(M') = 0$, allora $F(f)$ è suriettivo (il viceversa non è necessariamente vero).

Come calcolare $R^1F(M')$?

Sia I un oggetto tale che il funtore $Hom(-, I)$ sia esatto (cioè I è *iniettivo*). Per un tale oggetto, ogni successione $0 \to I \to M \to N \to 0$ è spezzata ("un modulo iniettivo è fattore diretto di ogni modulo che lo contiene", Esercizio), quindi, il funtore essendo additivo, $0 \to F(I) \to F(M) \to F(N) \to 0$ è esatta.

Sembra quindi naturale richiedere $R^1F(I) = 0$. Vediamo che questa richiesta ci permette di calcolare $R^1F(M')$ per ogni M', *purché ogni oggetto si inietti in un iniettivo.*

Se M' s'inietta in un iniettivo abbiamo: $0 \to M' \xrightarrow{\epsilon} I_0 \xrightarrow{p_0} Q_0 \to 0$; ma anche Q_0 s'inietta in un iniettivo: $0 \to Q_0 \xrightarrow{i_0} I_1 \xrightarrow{p_1} Q_1 \to 0$, finalmente, scrivendo che pure Q_1 s'inietta in un iniettivo, otteniamo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
0 \to M' & \xrightarrow{\epsilon} & I_0 & \xrightarrow{p_0} & Q_0 & \to & 0 & & \\
 & & & \searrow d_0 & \downarrow i_0 & & & & \\
 & & & & I_1 & & & & \\
 & & & & \downarrow p_1 & \searrow d_1 & & & \\
 & & 0 & \to & Q_1 & \xrightarrow{i_1} & I_2 & \xrightarrow{p_2} & Q_2 \to 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Applicando il funtore F e tenendo conto che $R^1F(I_0) = 0$, viene:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
0 \to F(M') \to F(I_0) & & \xrightarrow{F(p_0)} & F(Q_0) & \to & R^1F(M') \to 0 & \\
 & & \searrow F(d_0) & \downarrow F(i_0) & & & \\
 & & & F(I_1) & & & \\
 & & & \downarrow F(p_1) & F(d_1) \searrow & & \\
 & 0 & \to & F(Q_1) & \xrightarrow{F(i_1)} & F(I_2) &
\end{array}$$

Si vede subito che $R^1F(M') \simeq F(Q_0)/Im(F(p_0)) \simeq Ker(F(d_1))/Im(F(d_0))$.

Osservare che $0 \to M' \to I_0 \to I_1 \to I_2$ è esatta, mentre $F(I_0) \xrightarrow{F(d_0)} F(I_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(I_2)$ è un complesso con della coomologia a priori non banale $(Ker(F(d_1))/Im(F(d_0))$.

In conclusione, se ogni oggetto s'inietta in un iniettivo, riusciamo a calcolare R^1F. La definizione dei funtori derivati (a destra (R = right)) parte dalla costruzione qui sopra: si prende una risoluzione iniettiva di M: $0 \to M \to I^\bullet$, si applica il funtore F, si ottiene un complesso $F(I^\bullet)$, gli oggetti di coomologia di questo complesso definiscono $R^nF(M)$: $H^n(F(I^\bullet)) \simeq R^nF(M)$.

Inoltre per ogni successione esatta corta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ si ottiene una successione esatta di risoluzioni $0 \to I'^\bullet \to I^\bullet \to I''^\bullet \to 0$ che è spezzata (perché $I'^\bullet$ è iniettivo), applicando F si ottiene una successione esatta (perché F è additivo) di complessi che dà luogo ad una successione esatta lunga:

$$\cdots \to R^iF(M') \to R^iF(M) \to R^iF(M'') \to R^{i+1}F(M') \to \cdots$$

Quindi, modulo verificare che queste costruzioni non dipendono dalle scelte fatte (cioè dalle risoluzioni scelte) e sono funtoriali, abbiamo in questo modo una risposta soddisfacente al problema iniziale.

Finalmente osserviamo che se vogliamo ripetere questo procedimento per un funtore covariante ma esatto a destra, allora bisogna rimpiazzare le risoluzioni iniettive con quelle proiettive (se il funtore è contravariante passare alle categorie duali per avere un funtore covariante).

Quindi riassumendo, *sotto l'ipotesi che la categoria abbia abbastanza iniettivi*:

(A) si prende una risoluzione iniettiva $0 \to M \to I^\bullet$, si applica F, si ottiene un complesso $F(I^\bullet)$ e $R^nF(M) = H^n(F(I^\bullet))$. Bisogna mostrare che questa definizione non dipende dalla risoluzione scelta. Per questo si usa: sia $f : M \to N$ un morfismo, allora

$$\begin{array}{ccc} 0 \to & M & \to I^\bullet \\ & f \downarrow & \\ 0 \to & N & \to J^\bullet \end{array}$$

si solleva a $\varphi : I^\bullet \to J^\bullet$, inoltre due sollevamenti sono omotopi.

Prendendo $n = M, f = Id$ si ottiene che $F(I^\bullet)$ e $F(J^\bullet)$ sono omotopicamente equivalenti, quindi hanno la stessa (isomorfa) coomologia.

(B) Se $f : M \to N$ è un morfismo, allora f si solleva a un morfismo tra le risoluzioni e quindi si ottiene un morfismo di complessi $F(I^\bullet) \to F(J^\bullet)$ e pertanto un morfismo di coomologia $H^n(F(I^\bullet)) \to H^n(F(J^\bullet))$. Siccome due sollevamenti di f sono omotopi, i morfismi tra i complessi $F(I^\bullet)$, $F(J^\bullet)$ sono omotopi e quindi inducono lo stesso morfismo in coomologia. Questo mostra che se $f : M \to N$, allora abbiamo $RF^n(f) : RF^n(M) \to RF^n(N)$.

Siccome la coomologia dei complessi è un funtore additivo, l'associazione $f \to RF^n(f)$ definisce un funtore additivo. A questo punto abbiamo i nostri funtori derivati $R^nF, n \geq 0$ ($R^0F = F$).

(C) Se $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ è una successione esatta, allora abbiamo una successione esatta lunga di funtori derivati. Questo è *il punto fondamentale, altrimenti tutto questo non servirebbe a niente*. Per questo, date risoluzioni $I^\bullet, J^\bullet$ di M', M'' si mostra che $I^\bullet \oplus J^\bullet$ è una risoluzione di M. La successione esatta $0 \to I^\bullet \to I^\bullet \oplus J^\bullet \to J^\bullet \to 0$ dà luogo ad una successione esatta $0 \to F(I^\bullet) \to F(I^\bullet) \oplus F(J^\bullet) \to F(J^\bullet) \to 0$ e quindi (usando il Lemma del serpente) ad una successione esatta lunga in coomologia.

La cosa importante è che i punti (A), (B), (C) vanno verificati *una volta per tutte* in una categoria abeliana $\mathcal{C}$ qualsiasi. Infatti per un teorema generale basta verificarlo in $A - mod$ e qui si tratta di un puro esercizio di algebra omologica e diagram-chasing.

Per applicare il macchinario a un funtore specifico rimane da vedere che la categoria di interesse ha abbastanza iniettivi (risp. abbastanza proiettivi).

4.2 Alcuni funtori derivati.

4.2.1 Coomologia dei fasci.

Si dimostra che $A - mod$, $\mathcal{O}_X - mod$, FAb_X hanno abbastanza iniettivi (Hartshorne Prop. III.2.1A, Prop. III.2.2, Corollary III.2.3, p.206-207). Qui $\mathcal{O}_X - mod$ indica la categoria dei fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli su uno spazio annellato $(X, \mathcal{O}_X)$. Inoltre $A - mod$ ha anche abbastanza proiettivi (questo è facile).

Possiamo quindi, nella categoria FAb_X, derivare il funtore Γ delle sezioni globali.

Definizione 4.1. *L'n-esimo funtore derivato a destra di Γ è l'n-esimo funtore di coomologia. Si nota $R^n\Gamma(\mathcal{F}) =: H^n(X, \mathcal{F})$.*

Osservazione 4.2. 1. Quindi $H^n(X, -) : FAB_X \to Ab$ è un funtore covariante addittivo. In particolare $H^n(X, \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{F}_i) = \bigoplus_{i=1}^r H^n(X, \mathcal{F}_i)$.
2. Abbiamo un isomorfismo $\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}) \simeq H^0(X, \mathcal{F})$
3. Se $\mathcal{F}$ è iniettivo, $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$, $\forall n > 0$.
4. Ad ogni successione esatta corta di fasci $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ è associata (funtorialmente) una successione esatta lunga (di coomologia):

$$\cdots \to H^i(X, \mathcal{F}') \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F}'') \to H^{i+1}(X, \mathcal{F}') \to \cdots$$

5. I gruppi $H^i(X, \mathcal{F})$ sono i gruppi di coomologia del fascio $\mathcal{F}$. Nel seguito, anche in presenza di strutture più ricche (per es. $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo su una varietà algebrica (o su uno schema)), si intenderà sempre la coomologia in questo senso (cioè si guarderà $\mathcal{F}$ come un fascio di gruppi abeliani sullo spazio topologico sottogiacente a X). Osserviamo però che se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio annellato e se $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, allora per ogni $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{F}$, $\Gamma(X, \mathcal{F})$ è un A-modulo e visto che possiamo calcolare $H^i(X, \mathcal{F})$ con risoluzioni in $\mathcal{O}_X$-mod, $H^i(X, \mathcal{F})$ ha una struttura di A-modulo e le costruzioni funtoriali (per esempio la successione lunga di coomologia) danno luogo a successioni in A-mod.
   Per esempio se X è una varietà proiettiva irriducibile su k, allora ogni funzione regolare su X è costante, quindi $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$.

Pertanto, se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo, ogni $H^i(X,\mathcal{F})$ è un k-spazio vettoriale. Per un teorema di Serre, se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo ragionevole (i.e. coerente), allora ogni $H^i(X,\mathcal{F})$ è un k-spazio vettoriale di *dimensione finita*.

Menzioniamo adesso un risultato generale sulla coomologia dei fasci:

Teorema 4.3 (Grothendieck). *Sia X uno spazio topologico noetheriano di dimensione n. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X, allora $H^i(X,\mathcal{F})=0$ se $i>n$.*

Il lettore interessato alla dimostrazione la troverà per esempio nel libro di Hartshorne (Theorem III.2.7, p. 208).

4.2.2 *Ext* e *Tor*.

Il funtore $Hom_A(M,-): A-mod \to A-mod : N \to Hom_A(M,N)$ è un funtore covariante, additivo, esatto a sinistra. Possiamo quindi considerare i suoi funtori derivati a destra:

Definizione 4.4. *L'n-esimo funtore derivato a destra del funtore $Hom_A(M,-)$ si nota $Ext^n_A(M,-)$.*

Quindi $Ext^n_A(M,N)$ si calcola nel modo seguente: si prende una risoluzione iniettiva di N, si applica $Hom_A(M,-)$ e l'n-esimo modulo di coomologia del complesso risultante è $Ext^n_A(M,N)$.

Il funtore $Hom_A(-,M)$ è additivo, esatto a sinistra e contravariante, possiamo considerare i suoi derivati a destra: $R^nHom(-,M)$. Quindi $R^nHom(N,M)$ si calcola nel modo seguente: si prende una risoluzione proiettiva $P^\bullet \to N \to 0$, si applica $Hom(-,M)$ e l'n-esimo modulo di coomologia del complesso: $Hom(P^\bullet,M)$ è $R^nHom(N,M)$.

In effetti si può dimostrare che:

$$R^nHom(-,M)(N) \simeq R^nHom(N,-)(M) = Ext^n_A(N,M)$$

(isomorfismo di funtori). In realtà la cosa forse più naturale sarebbe considerare il bifuntore $Hom_A(-,-)$.

La cosa interessante per noi sarà il nesso tra Ext e le estensioni.

Sia $(E): 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ un'estensione di M' per M'' (Esercizio 3). Applicando $Hom(-,M')$ otteniamo $\cdots \to Hom(M',M') \overset{\delta_E}{\to} Ext^1(M'',M')$. L'elemento $\delta_E(1_{M'}) \in Ext^1(M'',M')$ è la classe dell'estensione (E), $cl(E)$. Si può mostrare che se (E) e (E') sono due estensioni equivalenti (cf Esercizio 3), allora $cl(E) = cl(E')$. Abbiamo quindi una biiezione $E(M'', M') \simeq Ext^1(M'', M')$ tra l'insieme delle classi di equivalenza di estensioni e $Ext^1(M'', M')$. Possiamo trasportare la struttura di gruppo di $Ext^1(M'', M')$ su $E(M'', M')$ tramite questa biiezione; la struttura che si trova non è altro che quella data dalla somma di Baer (Esercizio 3). Quindi la successione (E) è spezzata $\Leftrightarrow$ $cl(E) = \delta_E(1_{M'}) = 0$. In particolare: $Ext^1(M'', M') = 0 \Rightarrow (E)$ è spezzata (il viceversa non è necessariamente vero).

Tor e piattezza.

Il funtore $-\otimes_A M$:A-mod $\to$ A-mod:$N \to N \otimes M$ è addittivo, covariante, esatto a destra. Possiamo quindi considerare i suoi funtori derivati a sinistra $L_n(- \otimes M)$.

Possiamo anche considerare il funtore $N \otimes_A -$, anche lui è addittivo, covariante, esatto a destra. Come nel caso degli Hom abbiamo: $L_n(- \otimes M)(N) \simeq L_n(N \otimes -)(M)$ (il modo forse più naturale per vederlo sarebbe considerare il bifuntore $- \otimes -$).

Definizione 4.5. *Con le notazioni precedenti l'n-esimo funtore derivato di $- \otimes M$ (risp. $N \otimes -$) si nota $Tor_n^A(-, M)$ (risp. $Tor_n^A(N, -)$).*

Quindi $Tor_n(N, M)$ si può calcolare sia da una risoluzione proiettiva di N che da una risoluzione proiettiva di M.

Nel seguito si assume A *commutativo*, in questo caso $M \otimes N \simeq N \otimes M$ quindi $Tor_i(M, N) \simeq Tor_i(N, M)$ per ogni i.

Definizione 4.6. *Un A-modulo M si dice A-piatto (o più semplicemente piatto) se il funtore $- \otimes M$ è esatto. In particolare un modulo libero è piatto.*

Osservazione 4.7. Un modulo proiettivo è aciclico quindi piatto (il viceversa non è vero in generale).

Abbiamo:

Proposizione 4.8. *Sia A un P.I.D. Un A-modulo è piatto se e solo se è senza torsione.*

Proposizione 4.9. *Sia (A, m, k) un anello locale e sia M un A-modulo di tipo finito. Sono equivalenti:*

1. *M è piatto.*
2. *M è proiettivo.*
3. *M è libero.*

In particolare se $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ è una successione esatta di $\mathcal{O}_X$-moduli e se $\mathcal{L}$ è localmente libero (quindi $\mathcal{L}_x$ è un $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo libero), la successione: $0 \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{H} \to 0$ è ancora esatta.

4.3 Esercizi.

exercice 1 *Una successione esatta* $(E) : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *di* A*-moduli si dice* spezzata *se esiste un diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M' \oplus M'' & \to & M'' & \to & 0 \\ & & u \downarrow & & w \downarrow & & v \downarrow & & \\ 0 & \to & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \to & 0 \end{array}$$

dove la prima successione orizzontale è quella ovvia e dove le frecce verticali sono isomorfismi.

1. *Mostrare che la successione è spezzata se e solo se* f *ammette una retrazione, cioè se esiste* $r : M \to M'$ *tale che* $r \circ f = 1_{M'}$.
2. *Mostrare che la successione è spezzata se e solo se* g *ammette una sezione, cioè se esiste* $p : M'' \to M$ *tale che* $g \circ p = 1_{M''}$.
3. *Dimostrare che 1. è valido anche nella categoria dei gruppi (cioè* (E) *è una successione di gruppi non necessariamente abeliani).*
4. *Sia* S_3 *il gruppo delle permutazioni di un insieme con tre elementi e sia* $M = \{1, a, b\} \subset S_3$*, dove* a, b *sono le due rotazioni.*
   a) *Mostrare che* M *è un sottogruppo normale di* S_3 *e che* $M \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
   b) *Mostrare che* $S_3/M \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *e concludere che la successione* $1 \to M \to S_3 \to S_3/M \to 1$ *non è spezzata.*
   c) *Mostrare che* $S_3 \to S_3/M \to 0$ *ammette una sezione. Conclusione?*

exercice 2 *Sia in* A*-mod una successione esatta corta:* $(E) : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$.

Mostrare che (E) *è spezzata (cfr Esercizio 1) se e solo se esiste un diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M' \oplus M'' & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \| & & t \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \to & 0 \end{array}$$

dove t *è un isomorfismo e dove la prima successione orizzontale è quella ovvia.*

exercice 3 *Siano* M, N *due* A*-moduli. Un'estensione di* M *per* N *è una successione esatta:* $(\epsilon) : 0 \to N \to P \to M \to 0$*. Due estensioni* $(\epsilon), (\epsilon')$ *di* M *per* N *sono equivalenti se esiste un diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & N & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{g} & M & \to 0 \\ & \| & & t\downarrow & & \| & \\ 0 \to & N & \xrightarrow{f'} & P' & \xrightarrow{g'} & M & \to 0 \end{array}$$

1. *Date due estensioni* $(\epsilon), (\epsilon')$ *di* M *per* N *si definisce la loro somma di Baer nel modo seguente: sia* $P'' \subset P \times P'$, $P'' = \{x, x')/g(x) = g'(x')\}$ *(prodotto fibrato) e sia* $Y = P''/\{(f(n), -f'(n))/n \in N\}$*. Verificare che* $N \to P'' : n \to (f(n), 0)$ *e* $P'' \to M : (x, x') \to g'(x')$ *definiscono una successione esatta:* $(\epsilon + \epsilon') : 0 \to N \to Y \to M \to 0$.
2. *Se* (0) *indica la successione spezzata mostrare che* $(\epsilon + 0)$ *è equivalente a* (ϵ).

5

Fasci localmente liberi, $\boldsymbol{Pic(X)}$.

5.1 Fasci localmente liberi.

Sia X una varietà proiettiva (irriducibile) non singolare e sia $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X. Si ricorda che un fascio, $\mathcal{F}$, di $\mathcal{O}_X$-moduli è un fascio tale che per ogni aperto $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$-modulo (quindi un fascio di gruppi abeliani con una moltiplicazione "esterna" per gli elementi di $\mathcal{O}_X(U)$). I morfismi di restrizione $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ sono compatibili con le strutture di $\mathcal{O}_X(V), \mathcal{O}_X(U)$-moduli e un morfismo tra due $\mathcal{O}_X$-moduli, $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è dato da morfismi di $\mathcal{O}_X(U)$-moduli $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

Per ogni aperto U, il fascio $\mathcal{F}|U$ (*restrizione a* U) è definito da $V \cap U \to \mathcal{F}(V \cap U)$.

Definizione 5.1. *Un $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{F}$ è localmente libero (di rango finito) se esiste un ricoprimento aperto (U_i) di X tale che $\mathcal{F}|U_i \simeq \mathcal{O}_X^r|U$. L'intero r dipende a priori da U_i ma se X è connesso, r è costante e viene chiamato il rango di $\mathcal{F}$.*

Qui con $\mathcal{O}_X^r|U$ si intende $\mathcal{O}_X|U \oplus ... \oplus \mathcal{O}_X|U$.

Definizione 5.2. *Un fascio invertibile è un fascio localmente libero di rango uno.*

5.1.1 Fasci localmente liberi e fibrati vettoriali.

Sia $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anello locale, abbiamo una successione esatta di A-moduli:

$$0 \to \mathfrak{m} \to A \to A/\mathfrak{m} \simeq k \to 0 \tag{5.1}$$

Sia M un A-modulo, tensorizzando (5.1) con M si ottiene $M \to M \otimes A/\mathfrak{m} \to 0$. Siccome $M/\mathfrak{m}.M \simeq M \otimes A/\mathfrak{m}$, vediamo che $M/\mathfrak{m}.M$ ha una struttura di $k \simeq A/\mathfrak{m}$-modulo.

Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo, allora per ogni $x \in X$, $\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x.\mathcal{F}_x$ è un k-spazio vettoriale notato $\mathcal{F}(x)$. Il k-spazio vettoriale $\mathcal{F}(x)$ si chiama la *fibra ridotta* di $\mathcal{F}$ in x. Certe volte si nota $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes k(x)$, dove $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ è il *campo residuo*. Ovviamente $k(x) \simeq k$ (la scrittura $k(x)$ ricorda che l'isomorfismo dipende in qualche modo dal punto x. Nella teoria degli schemi il campo residuo varia veramente!).

Non confondere la fibra ridotta $\mathcal{F}(x)$ con la spiga $\mathcal{F}_x$!

Se $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango r, le fibre ridotte sono tutti k-spazi vettoriali di dimensione r. Questa famiglia (su X) di r spazi vettoriali è localmente banale ($\simeq U_i \times k^r$) perché $\mathcal{F}|U_i \simeq \mathcal{O}_X^r|U_i$); finalmente questi fibrati banali si incollano (perché $\mathcal{F}$ è un fascio). In altre parole (e saltando una montagna di dettagli) ad ogni fascio localmente libero è possibile associare un fibrato vettoriale.

Viceversa se E è un fibrato vettoriale ("algebrico") di rango r su X, possiamo associargli il prefascio delle sue sezioni $U \to \Gamma(E|U)$, dove $s \in \Gamma(E|U)$ se $s : U \to E|U$ è un morfismo tale che $p_U \circ s = Id_U$. Questo prefascio di funzioni è ovviamente un fascio. E' un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli ed è localmente libero (perché $E|U_i \simeq U_i \times k^r$ e le sezioni su U_i sono le funzioni regolari $s : U_i \to k^r$, cioè $\mathcal{O}_X(U_i)^r$).

Tutto questo per dire che c'è una corrispondenza perfetta (funtoriale) tra fasci localmente liberi e fibrati vettoriali (localmente banali). Nella pratica si usano i termini *localmente libero* e *fibrato* in modo inter-scambiabile. Per esempio con questo abuso di linguaggio, i termini: *localmente libero di rango uno*, *invertibile*, *fibrato in rette* sono tutti equivalenti.

E' utile anche tenere presente i seguenti fatti: un morfismo di $\mathcal{O}_X$-moduli, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, morfismo di $\mathcal{O}_x$-moduli e $\varphi(x) : \mathcal{F}(x) \to \mathcal{G}(x)$, morfismo di k-spazi vettoriali. Supponiamo $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ localmente liberi.

Un morfismo suriettivo di fasci $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dà luogo ad un morfismo suriettivo di fibrati (cioè $\varphi(x)$ è suriettivo $\forall x$). Il Ker è localmente libero.

Un morfismo iniettivo di fasci <u>non</u> dà necessariamente luogo a un morfismo iniettivo di fibrati (cioè $\varphi(x)$ non è necessariamente iniettivo $\forall x$). Tutto questo segue dal fatto che $- \otimes k(x)$ è esatto a destra (ma non necessariamente a sinistra). Ci torneremo sopra.

Abbiamo anche il seguente fatto banale ma molto utile:

Lemma 5.3. *Sia* $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ *una successione esatta di* $\mathcal{O}_X$*-moduli. Sia* $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-modulo localmente libero, allora:* $0 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{L} \to 0$ *è esatta.*

Dimostrazione. Si guarda sulle spighe: $\mathcal{L}_x$ è un $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo libero, quindi piatto.

5.1.2 Il gruppo di Picard.

Sia X una varietà algebrica (o più generalmente uno spazio anellato). Siano $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ due $\mathcal{O}_X$-moduli localmente liberi di rango uno (o fibrati in rette). Allora $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ è ancora localmente libero di rango uno (sostanzialmente perché $A \otimes_A A \simeq A$). Sia inoltre $\mathcal{L}^* = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$, il duale. Allora $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* \simeq \mathcal{O}_X$. Infatti $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{O}_X$. (Se E è un k-spazio vettoriale di dimensione uno allora $Hom(E,E) \simeq k$ in modo "intrinseco": $k \to Hom(E,E) : \lambda \to (v \to \lambda v)$; viceversa se $f : E \to E$, $v (\neq 0)$ e $f(v)$ sono linearmente dipendenti: $f(v) = \lambda_v.v$ e λ_v in realtà non dipende da v ecc...).

Vediamo quindi che $\otimes$ conferisce all'insieme dei fibrati in rette una struttura di gruppo:

Definizione 5.4. *Sia* $Pic(X)$ *l'insieme (delle classi di isomorfismi) dei (di)* $\mathcal{O}_X$*-moduli localmente liberi di rango uno (fibrati in rette), allora* $(Pic(X), \otimes)$ *è un gruppo chiamato* gruppo di Picard *di* X.

Ovviamente il simmetrico $\mathcal{L}^{-1}$ di $\mathcal{L}$ è $\mathcal{L}^*$; questo spiega la terminologia *fascio invertibile.*

Esercizi.

exercice 4 *Su* $\mathbb{P}^1$ *abbiamo i fasci invertibili (fibrati in rette)* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ *(nel seguito notati semplicemente* $\mathcal{O}(n)$*).*

1. *Si ricorda (ripassare eventualmente!):*

$$h^0(\mathcal{O}(n)) = \begin{cases} 0 \ se \ n < 0 \\ n+1 \ se \ n \geq 0 \end{cases}$$

2. *Prendendo per buono che $h^1(\mathcal{O}) = 0$ ("definizione del genere"), mostrare:*

$$h^1(\mathcal{O}(n)) = \begin{cases} 0 \ \mathit{se}\ n \geq -1 \\ -n-1 \ \mathit{se}\ n \leq -2 \end{cases}$$

(Hint: usare la successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to 2.\mathcal{O} \to \mathcal{O}(1) \to 0$$

qui $2.\mathcal{O} := \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ indica il fibrato banale di rango due di fibra V. Si ricorda che se $x \in \mathbb{P}^1$ corrisponde alla retta $r_x \subset \mathbb{P}(V)$, la successione di fibrati qui sopra nel punto x non è altro che: $0 \to r_x \to V \to V/r_x \to 0$. Prendendo per buono che il fibrato di fibra V/r_x è un $\mathcal{O}(n)$, ricordare perché $n = 1$.)

6

Il gruppo delle classi.

6.1 Introduzione

La nostra strada verso il Teorema di Riemann-Roch prosegue così: ad ogni divisore, D, sulla curva (proiettiva, liscia) X vogliamo associare un fascio invertibile, $\mathcal{O}_X(D)$, con $H^0(\mathcal{O}_X(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$. Il grado di questo fascio sarà $d := \deg(D)$. A questo punto sarà (quasi) un gioco da ragazzi mostrare che: $h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) = d - g + 1$, cioè Riemann-Roch.

6.2 Divisori di Weil, gruppo delle classi.

Sia X una curva proiettiva liscia.

Definizione 6.1. *Un divisore (di Weil) sur X è una somma formale finita $D = \sum n_i P_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, P_i punti di X.*

Due divisori D, D' sono linearmente equivalenti se $D - D'$ è il divisore di una funzione razionale: $D - D' = div(f) = (f)_0 - (f)_\infty$.

Un altro modo di definire un divisore (di Weil): è una somma finita formale di sotto-varietà irriducibili di codimensione uno. (Una sotto-varietà irriducibile di codimensione uno si chiama anche *divisore primo*). Il divisore di una funzione razionale è un *divisore principale*.

L'insieme dei divisori è chiaramente un gruppo additivo notato $Div(X)$. Siccome $(f/g) = (f) - (g)$, l'applicazione $k(X)^* \to Div(X) : f \to (f)$ è un morfismo dal gruppo moltiplicativo delle funzioni razionali non nulle nel gruppo additivo $Div(X)$. L'immagine è il sotto gruppo dei divisori principali. Il gruppo quoziente è il gruppo dei divisori modulo *equivalenza lineare* e si nota $Cl(X)$.

Definizione 6.2. *Il gruppo delle classi, $Cl(X)$, è il gruppo dei divisori modulo equivalenza lineare (cioè $Div(X)$ modulo i divisori principali).*

Il grado del divisore $D = \sum n_i P_i$ è $\sum n_i$. Siccome il grado del divisore di una funzione razionale è sempre zero, due divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado. Abbiamo quindi un morfismo suriettivo $Cl(X) \to \mathbb{Z}$. In generale questo morfismo non è iniettivo. C'è un caso (e uno solo per quanto riguarda le curve!) in cui lo è: quando $X = \mathbb{P}^1$.

Lemma 6.3. *Il grado induce un isomorfismo $Cl(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che per ogni $n \geq 0$ esiste un unico sistema lineare completo di divisori effettivi di grado n: $|nP|$, P un punto di $\mathbb{P}^1$. In particolare se D è un divisore effettivo di grado d, allora $D \sim dP$, dove $P \in \mathbb{P}^1$ è un punto qualsiasi.

Sia D un divisore di grado 0. Possiamo scrivere D come una differenza di divisori effettivi: $D = D_1 - D_2$. Abbiamo $D_i \sim n_i P$. Quindi $D \sim (n_1 - n_2)P$. Siccome $\deg(D) = 0$, $n_1 = n_2$ e quindi $D \sim 0$.

Per le curve di genere > 0 le cose non sono così semplici:

Lemma 6.4. *Sia X una curva proiettiva liscia. Due punti $P, Q \in X$, $P \neq Q$ sono linearmente equivalenti se e solo se $X \simeq \mathbb{P}^1$.*

Dimostrazione. Se $X = \mathbb{P}^1$ allora $P \sim Q$ perché $\deg(P) = \deg(Q) = 1$. Vice versa se $P \sim Q$, allora esiste una funzione razionale f su X tale che $P - Q = div(f) = (f)_0 - (f)_\infty$. Questa funzione razionale definisce un morfismo $f : X \to \mathbb{P}^1$. Siccome $\#(f^{-1}(0)) = 1$, f ha grado uno e quindi è un isomorfismo.

Vediamo quindi che su una curva di genere $g > 0$, abbiamo dei divisori di grado zero $(P - Q)$ non linearmente equivalenti a zero.

Osservazione 6.5. In generale (se $g > 0$) abbiamo:

$$0 \to Jac(X) \to Cl(X) \stackrel{\deg}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

qui $Jac(X) = \{D \in Cl(X) \mid \deg(D) = 0\}$; $Jac(X)$ è la <u>jacobiana</u> di X. Si può dimostrare che $Jac(X)$ è una varietà (abeliana) proiettiva di dimensione g. Per esempio se $g = 1$, $Jac(X)$ è una curva e se $P_0 \in X$, il morfismo $X \to Jac(X) : P \to P - P_0$ stabilisce una biiezione tra X e $Jac(X)$. Segue che per una curva ellitica $(g = 1)$, $Jac(X) \simeq X$.

6.3 Divisori di Cartier.

Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla curva proiettiva liscia X. Sia $g_1 \in \mathfrak{m}_{P_1} \subset \mathcal{O}_{X,P_1}$ un'equazione locale del punto P_1. Prendiamo un rappresentante del germe di g_1: (U_1, g_1). Quindi U_1 è un aperto contenente P_1 e g_1 è una funzione razionale definita su U_1 ($g_1 \in \mathcal{O}(U_1)$), che si annulla in P_1. In particolare g_1 è una funzione razionale su X. Inoltre $div(g_1^{n_1})$ è un divisore della forma $n_1P_1 + \sum m_j Q_j$, $Q_j \neq P_1$.

Questo mostra che $\forall x \in X$, esiste un aperto U_x contenente x e una funzione razionale (non nulla), g_x, tale che $div(g_x) = D$ su U_x. Siccome X è compatto (per la topologia di Zariski) si può ottenere un ricoprimento finito $X = \cup U_i$ e delle funzioni razionali f_i tali che: $div(f_i) = D$ su U_i. Su $U_i \cap U_j$ abbiamo $div(f_i/f_j) = div(f_i) - div(f_j) = D| - D| = 0$. Quindi f_i/f_j è regolare su U_{ij} (niente poli) e non si annulla (niente zeri). Cioè $f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ ($\mathcal{O}^*(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f$ non si annulla su $U\}$).

Definizione 6.6. *Un divisore di Cartier su X consiste nei seguenti dati: un ricoprimento aperto di X, $\cup U_i$ e per ogni aperto U_i, una funzione razionale non identicamente nulla su U_i, tale che $f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$.*

Una definizione più sofisticata consiste nel dire che un divisore di Cartier è una sezione globale del fascio $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$, dove $\mathcal{K}^*$ è il fascio delle funzioni razionali non nulle.

Osservazione 6.7. Un divisore di Cartier è principale se è il divisore di una funzione razionale ($f_i = f, \forall i$); due divisori di Cartier sono linearmente equivalenti se la loro differenza è un divisore principale. Il gruppo delle classi dei divisori di Cartier è $CaCl(X)$. La nozione di divisore di Cartier è utile perché può essere definita su varietà con singolarità arbitrarie e continua di godere di "buone" proprietà. Questo non è il caso dei divisori di Weil. Moralmente un divisore di Cartier è un divisore di Weil che può essere *definito localmente da un'unica equazione*. Per esempio su un cono quadrico una generatrice è un divisore di Weil che non è di Cartier. Su varietà non singolari le due nozioni sono equivalenti.

Abbiamo appena visto come associare ad ogni divisore (di Weil) sulla curva proiettiva liscia X un divisore di Cartier. Vice versa se (U_i, f_i) è un divisore di Cartier possiamo associargli un divisore nel modo seguente: sia $x \in X$. Prendiamo U_i tale che $x \in U_i$, il coefficiente di x nel nostro divisore x sarà $v_x(f_i)$ (l'ordine dello zero o del polo in x), cioè il coefficiente di x in $div(f_i)$. Se $x \in U_j$, siccome f_i/f_j è regolare e non si annulla su U_{ij}, f_j fornisce lo stesso coefficiente. Otteniamo così $\sum v_x(f_i)x$ e la somma è finita perché possiamo sempre assumere il ricoprimento finito (perché X è, come si dice, noetheriano).

Modulo qualche verifica (che con un altro ricoprimento si ottiene un divisore di Cartier linearmente equivalente al precedente ecc...), questo mostra che su una curva proiettiva liscia le due nozioni sono equivalenti. Il punto chiave che abbiamo usato è che $\mathcal{O}_x$ è un anello di valutazione discreta, in particolare è principale (e quindi fattoriale). Questo non è più vero se la curva è singolare.

Proposizione 6.8. *Sia X una curva proiettiva non singolare, allora $Cl(X) \simeq CaCl(X)$ (i divisori di Weil e di Cartier sono equivalenti).*

6.4 Il fascio invertibile associato a un divisore.

Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla nostra curva X. A D corrisponde un divisore di Cartier (U_i, f_i). Adesso a questo divisore di Cartier associamo un fascio $\mathcal{O}_X(D)$ (o più semplicemente $\mathcal{O}(D)$) nel modo seguente:

$$\mathcal{O}(D)(U_i) = \{h/f_i \mid h \in \mathcal{O}(U_i)\} \subset K(U_i)$$

A priori questo definisce $\mathcal{O}(D)$ solo sugli aperti U_i, ma (U_i) è un ricoprimento, quindi se V è un aperto qualsiasi, $\mathcal{O}(D)(V) = \{f \in K(V) \mid f|V \cap U_i = h_i/f_i, h_i \in \mathcal{O}(V \cap U_i)\}$. In altri termini $\mathcal{O}(D)$ è il sotto $\mathcal{O}_X$-modulo di $\mathcal{K}$ generato da f_i^{-1} su U_i ($\mathcal{K}$ il fascio delle funzioni razionali). Osservare che, essendo X irriducibile, $\mathcal{K}$ è il fascio costante K: $\mathcal{K}(U) = K(U) = K$. Anche qui si verifica che divisori di Cartier equivalenti definiscono fasci isomorfi.

Definizione 6.9. *Con le notazioni precedenti $\mathcal{O}(D)$ è il fascio associato al divisore D.*

Un primo pezzo del puzzle:

Lemma 6.10. *Per ogni divisore D su X abbiamo un isomorfismo di k-spazi vettoriali: $H^0(\mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$.*

Dimostrazione. Si ricorda che $\mathcal{L}(D) = \{f \in K(X)^* \mid div(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$. Sia (U_i, f_i) il divisore di Cartier associato a D. Una sezione globale di $\mathcal{O}(D)$ (se esiste) è sostanzialmente una funzione razionale g tale $g|U_i = h_i/f_i, h_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Quindi $div(g|U_i) = div(h_i) - div(f_i)$. Per definizione $div(f_i) = D|U_i$. Quindi $div(g|U_i) + D|U_i = div(h_i) \geq 0$, perché $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Siccome questo è vero per ogni i, $div(g) + D \geq 0$ e $g \in \mathcal{L}(D)$.

Vice versa se $f \in \mathcal{L}(D)$ non nulla, allora, se $h_i = f|U_i f_i$, abbiamo $div(h_i) = div(f|U_i) + div(f_i) = (div(f) + D)|U_i \geq 0$. Quindi $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$ e $f|U_i = h_i/f_i$, cioè $f \in H^0(\mathcal{O}(D))$.

Lemma 6.11. *Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla curva X.*

1. *Il fascio* $\mathcal{O}(D)$ *è invertibile*
2. $\mathcal{O}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)^*$.
   In particolare $\mathcal{O}(-D) \simeq \mathcal{O}(D)^* = \mathcal{H}om(\mathcal{O}(D), \mathcal{O})$.
3. $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}(D_1) \simeq \mathcal{O}(D_2)$.

Dimostrazione. (1) Il fascio $\mathcal{O}|U_i$ è generato da 1, quindi $\mathcal{O}|U_i \to \mathcal{O}(D)|U_i : 1 \to 1/f_i$ è un isomorfismo. (Se preferite per ogni aperto $V \subset U_i$, $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(D)(V) : g \to g/f_i$ definisce l'isomorfismo di cui sopra). Quindi $\mathcal{O}(D)$ è localmente libero di rango uno.
(2) Se D_i è localmente definito da f_i su U_i, allora $\mathcal{O}(D_1 - D_2)|U_i$ è generato da f_2/f_1. Cioè $\mathcal{O}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}(D_1).\mathcal{O}(D_2)^{-1}$ come sotto fascio di $\mathcal{K}$; ma questo prodotto è isomorfo a $\mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)^*$ (guardare i cocicli).

Oppure: $\mathcal{O}(D_1)(U_i) \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} \mathcal{O}(-D_2)(U_i) \simeq \{h/f_1 \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} gf_2\} \simeq \{hg/f_1 \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} f_2\}$ e l'isomorfismo è dato da $h/f_1 \otimes f_2 \to hf_2/f_1$. Per l'ultima affermazione prendere $D_1 = 0$.
(3) Mostriamo: $D \sim 0 \Leftrightarrow \mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$. Se $D \sim 0$ allora $D = div(f)$ e $\mathcal{O}(D)$ è globalmente definito da $1/f$, l'isomorfismo cercato è dato da $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(D) : 1 \to 1/f$. Viceversa se $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$, allora $\mathcal{O}(X) \overset{\varphi}{\simeq} \mathcal{O}(D)(X)$. Sia $s = \varphi(1)$, allora s è una sezione globale di $\mathcal{O}(D)$ che non si annulla mai. Nell'isomorfismo $\mathcal{O}(D)(X) \simeq \mathcal{L}(D)$ (Lemma 6.10), s corrisponde a una funzione razionale f tale che $div(f) + D = 0$ (in generale il divisore effettivo $div(f) + D$ è il luogo degli zeri di s). Cioè $div(f) = -D$. Quindi $div(1/f) = D$ e D è principale.

Finalmente visto che $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow D_1 - D_2 \sim 0$, si conclude con (2).

Lemma 6.12. *Su una curva proiettiva liscia, X, l'applicazione: $Cl(X) \to Pic(X) : D \to \mathcal{O}(D)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Usando l'isomorfismo $CaCl(X) \simeq Cl(X)$, il Lemma 6.11 mostra che l'applicazione è ben definita ($D \sim D' \Rightarrow \mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}(D')$), è un morfismo di gruppi ($\mathcal{O}(D + D') = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D')$) ed è iniettiva ($\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O} \Rightarrow D \sim 0$). Per concludere basta mostrare che ogni fascio invertibile $\mathcal{L}$ è isomorfo a un sotto fascio del fascio $\mathcal{K}$. Infatti in questo caso essendo $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}$-modulo di rango uno sarà localmente generato da un elemento e si avrà: $\mathcal{L}(U_i) = f_i.\mathcal{O}(U_i) \subset K$ ($f_i \in K$) e se D è il divisore di Cartier $(1/f_i, U_i)$, allora $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{L}$.

Osserviamo che $\mathcal{K}$ è il fascio costante K dove K è il campo delle funzioni razionali di X (questo segue dal fatto che X è irriducibile, quindi due aperti non vuoti hanno un'intersezione non vuota). Se U è un aperto tale che $\mathcal{L}|U \simeq \mathcal{O}|U$, allora $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{K})|U \simeq \mathcal{K}|U$, quindi $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$ è un fascio costante su U. Siccome gli aperti U ricoprono X e siccome X è irriducibile, questo implica $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$. L'applicazione naturale $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$ esprime $\mathcal{L}$ come sotto fascio di $\mathcal{K}$.

Corollario 6.13. *Abbiamo* $Pic(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}$*, generato da* $\mathcal{O}(1)$*. In altri termini i fibrati* $\mathcal{O}(k)$ *sono tutti e soli i fibrati di rango uno su* $\mathbb{P}^1$*.*

Dimostrazione. Segue dal Lemma 6.3 e dal Lemma 6.12.

Osservazione 6.14. Un risultato analogo vale (con la stessa dimostrazione, rimpiazzando un punto con un iperpiano) per $\mathbb{P}^n$: $Pic(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}.\mathcal{O}(1)$.

Definizione 6.15. *Per il Lemma 6.12 ogni fibrato in rette (fascio invertibile)* L *su* X *è della forma* $\mathcal{O}(D)$*. Il* grado di L è $\deg(L) := \deg(D)$ *(è ben definito per il Lemma 6.11).*

Esercizi.

exercice 5 *Un divisore di Weil su* $\mathbb{P}^2$ *è una somma formale:* $D = \sum n_i C_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$ *e dove* $C_i \subset \mathbb{P}^2$ *sono delle curve irriducibili (una curva irriducibile è il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo irriducibile). Due divisori,* D, D'*, sono linearmente equivalenti se* $D - D' \sim div(f)$*,* f *funzione razionale su* $\mathbb{P}^2$*. Il grado del divisore* $D = \sum n_i C_i$ *è* $\deg(D) = \sum n_i \deg(C_i)$*.*

(1) Mostrare che il grado del divisore di una funzione razionale è zero. Dedurne l'esistenza di un morfismo di gruppi $\deg : Cl(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{Z} : D \to \deg(D)$.

(2) Mostrare che se D *è un divisore di grado* d*, allora* $D \sim d.L$*, dove* $L \subset \mathbb{P}^2$ *è una retta. Concludere che* $Cl(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}.L$*.*

(3) Ripetere quanto fatto nel caso delle curve e concludere che $Pic(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}.\mathcal{O}(1)$*.*

exercice 6 *Sia* X *una varietà algebrica e sia* $Y \subset X$ *una sotto varietà. Si definisce il* fascio di ideali *di* Y *in* X *tramite:* $\mathcal{I}_{Y,X}(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f|Y = 0\}$*. Questo definisce effettivamente un sotto fascio di* $\mathcal{O}_X$ *la cui spiga è un ideale di* $\mathcal{O}_{X,x}$ *per ogni* x*. Si ha una successione esatta:*

$$0 \to \mathcal{I}_{Y,X} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$$

Qui $\mathcal{O}_Y$ *è il fascio* strutturale *(delle funzioni) di* Y*.*

(1) Giustificare la seguente affermazione: se $Y \neq \emptyset$*, allora* $h^0(\mathcal{I}_{Y,X}) = 0$*.*

(2) Sia $L \subset \mathbb{P}^2$ *la retta di equazione* $x_0 = 0$*. Indichiamo con* $U_i, i = 0, 1, 2$ *gli aperti standard di* $\mathbb{P}^2$ *(definiti da* $x_i \neq 0$*). Su* U_0*, il divisore* L *è definito da* $f_0 = 1$ *(*$U_0 \cap L = \emptyset$*); su* U_1 *da* $f_1 = x_0/x_1$*; su* U_2 *da* $f_2 = x_0/x_2$*. Quindi abbiamo per esempio* $\mathcal{O}(L)(U_1) = \{h/f_1 = hx_1/x_0 \mid h \in \mathcal{O}(U_1)\}$*, ecc...*

Il fascio $\mathcal{O}(-L)$, *invece è localmente definito da* f_i, *quindi, per esempio,* $\mathcal{O}(-L)(U_1) = \{hx_0/x_1 \mid h \in \mathcal{O}(U_1)\}$, *ecc... Concludere che* $\mathcal{I}_{L,\mathbb{P}^2} \simeq \mathcal{O}(-L)$.

(3) Mostrare che $\mathcal{O}(-L) \simeq \mathcal{O}(-1)$ *(*$\mathcal{O}(n) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$*).*

(4) Concludere che se $C \subset \mathbb{P}^2$ *è una curva di grado* d*, allora* $\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2} \simeq \mathcal{O}(-d)$ *e si ha una successione esatta:*

$$0 \to \mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_C \to 0 \tag{6.1}$$

7

Riemann-Roch.

7.1 Riemann-Roch: take one.

Per prima cosa dobbiamo definire il genere di una curva proiettiva liscia, X.

Definizione 7.1. *Sia X una curva proiettiva liscia. Il genere di X è: $g := h^1(\mathcal{O}_X)$.*

Prenderemo per buono che g è un intero (≥ 0), cioè che $\dim_k H^1(\mathcal{O}_X) < \infty$. Se $k = \mathbb{C}$, si può mostrare che X è una superficie di Riemann compatta omeomorfa ad un toro con g buchi, quindi il "nostro" genere è un invariante topologico.

Lemma 7.2. *Sia D un divisore di grado zero, allora $h^0(\mathcal{O}(D)) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$ (ossia $D \sim 0$).*

Dimostrazione. Se $h^0(\mathcal{O}(D)) > 0$, il sistema lineare $|D|$ è non vuoto cioè D è linearmente equivalente a un divisore effettivo D_0. Siccome divisori equivalenti hanno lo stesso grado, $\deg(D_0) = 0$. Essendo D_0 effettivo, viene $D_0 = 0$. Quindi $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$.

Viceversa se $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O} = \mathcal{O}(0)$, allora $D \sim 0$.

Sia $P \in X$ un punto. Possiamo vedere P come una sotto varietà di X e considerare il fascio d'ideali di questa sotto varietà: $\mathcal{I}_{P,X}(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(P) = 0\}$. Abbiamo $\mathcal{I}_{P,X} \subset \mathcal{O}_X$ e una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{I}_{P,X} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_P \to 0 \tag{7.1}$$

dove $\mathcal{O}_P \simeq k$ è il fascio gratta-cielo di supporto P (= il fascio strutturale della sotto-varietà P). Osservare che $\mathcal{O}_P$ è proprio il fascio delle funzioni su

P. Abbiamo già visto questa successione su $\mathbb{P}^1$; avevamo detto che questa successione era l'analoga della successione:

$$0 \to (x) \hookrightarrow k[x] \to k \to 0$$

che "definisce" l'origine sulla retta affine $\mathbb{A}^1_k$.

Il punto P è un divisore effettivo su X e come tale gli abbiamo associato un fascio invertibile: $\mathcal{O}_X(P)$. Per definizione $\mathcal{O}(D)(U_i) = \{h/f_i \mid h \in \mathcal{O}(U_i)\}$, dove f_i è un'equazione locale di D su U_i. Il fascio duale $\mathcal{O}(-D)$ è definito da $\mathcal{O}(-D)(U_i) = \{hf_i \mid h \in \mathcal{O}(U_i)\}$. Nel caso $D = P$ vediamo che $\mathcal{I}_{P,X} \simeq \mathcal{O}_X(-P)$. Possiamo riscrivere la successione 7.1:

$$0 \to \mathcal{O}_X(-P) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_P \to 0 \tag{7.2}$$

Questa successione può essere sorprendente in quanto abbiamo un morfismo iniettivo tra due fibrati di rango uno, $0 \to \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{O}$, che non è un isomorfismo. Il fatto è che si tratta di un morfismo di fasci (non di fibrati). Localmente abbiamo $\mathcal{O}(-P)|U \simeq \mathcal{O}|U : f_i h \to h$ e quindi:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(-P)|U & f_i h & \hookrightarrow & f_i h & \mathcal{O}|U \\
\simeq\downarrow & \downarrow & & & || \\
\mathcal{O}|U & h & \stackrel{\cdot f_i}{\to} & f_i h & \mathcal{O}|U
\end{array}$$

Quindi il morfismo tra i fibrati è dato dalla moltiplicazione per l'equazione del punto P: se $x \neq P$, l'equazione f di P è invertibile in $\mathcal{O}_x$ quindi $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \stackrel{f}{\to} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ è iniettiva (un isomorfismo); se $x = P$, $f \in \mathfrak{m}_x$ è il morfismo $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \stackrel{f}{\to} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ è identicamente nullo!

Tornando alle nostre analogie la successione 7.2 è l'analoga di

$$0 \to k[x] \stackrel{\cdot x}{\to} k[x] \to k \to 0$$

che "definisce" l'origine nella retta affine.

Osservazione 7.3. Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore effettivo sulla curva X. Se $n_i = 1, \forall i$, D è un'unione di punti che possiamo pensare come una sotto-varietà (non irriducibile) di X. Possiamo quindi considerare $\mathcal{I}_{D,X}$, il suo fascio d'ideali. Abbiamo $\mathcal{I}_{D,X} \simeq \mathcal{O}_X(-D)$. Se $n_i > 1$, D può essere pensato come un'unione di sotto-varietà "con molteplicità". La teoria degli schemi permette di associare un oggetto geometrico (=uno schema) a D. Si ha ancora $\mathcal{I}_{D,X} \simeq \mathcal{O}_X(-D)$ (a sinistra D è uno schema, a destra un divisore).

Il nostro strumento fondamentale:

Lemma 7.4. *Sia P un punto della curva proiettiva liscia X e sia $D \in Div(X)$ un divisore qualsiasi. Abbiamo una successione esatta:*

$$0 \to \mathcal{O}(D-P) \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

Dimostrazione. Applichiamo $- \otimes \mathcal{O}(D)$ alla successione (7.2), siccome $\mathcal{O}(D)$ è localmente libero otteniamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}_P \to 0$$

Abbiamo visto che $\mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(-P) \simeq \mathcal{O}(D-P)$, rimane da vedere $\mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}_P \simeq \mathcal{O}_P$. Il fascio $\mathcal{O}_P$ ha supporto solo nel punto $x = P$ e la sua spiga è $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$, la spiga di $\mathcal{O}(D)$ in x è $\simeq \mathcal{O}_x$ (perché $\mathcal{O}(D)$ è localmente libero), siccome $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$, abbiamo l'asserto.

Abbiamo visto a suo tempo che $\mathcal{L}(D) \simeq H^0(\mathcal{O}(D))$ era un k-spazio vettoriale di dimensione finita. Mostriamo adesso che lo stesso vale per $H^1(\mathcal{O}(D))$.

Lemma 7.5. *Sia D un divisore sulla curva proiettiva liscia X, allora $h^1(\mathcal{O}(D)) < \infty$.*

Dimostrazione. Sia D un divisore non nullo qualsiasi: $D = (\sum^r n_i P_i) - (\sum^t m_j Q_j)$, $n_i, m_j > 0$. Togliendo P_1 n_1 volte e poi P_2 n_2 volte ecc... fino a togliere P_r n_r volte si arriva a $D' = -\sum^t m_j Q_j$. Aggiungendo Q_1 m_1 volte, ecc... fino ad aggiungere Q_t m_t volte si arriva al divisore nullo. Quindi aggiungendo o togliendo un punto, partendo da un divisore qualsiasi si arriva dopo un numero finito di volte al divisore nullo. Per il divisore nullo l'enunciato è vero: $h^1(\mathcal{O}) = g < \infty$, per ipotesi. Quindi basta mostrare $h^1(\mathcal{O}(D)) < \infty \Leftrightarrow h^1(\mathcal{O}(D-P)) < \infty$. Per il Lemma 7.4 abbiamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(D-P) \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

Prendendo la coomologia viene:

$$\cdots \to H^0(\mathcal{O}_P) \to H^1(\mathcal{O}(D-P)) \to H^1(\mathcal{O}(D)) \to 0$$

Infatti abbiamo $h^1(\mathcal{O}_P) = 0$ per il Teorema di Grothendieck perché $\mathcal{O}_P$ è un fascio su una varietà (P) di dimensione zero. Da questa successione si ricava: $h^1(\mathcal{O}(D-P)) \geq h^1(\mathcal{O}(D))$ e $h^1(\mathcal{O}(D-P)) \leq 1 + h^1(\mathcal{O}(D))$ (infatti $H^0(\mathcal{O}_P) = k$ ha dimensione uno). Quindi se uno tra $h^1(\mathcal{O}(D)), h^1(\mathcal{O}(D-P))$ ha dimensione finita, anche l'altro ha dimensione finita.

Definizione 7.6. *Sia X una curva proiettiva liscia e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo, la* caratteristica di Eulero-Poincaré *di $\mathcal{F}$ é: $\chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F})$.*

Lemma 7.7. *Sia $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_2 \to 0$ una successione esatta di $\mathcal{O}_X$-moduli sulla curva X. Si assume $h^i(\mathcal{F}_j) < \infty, 0 \leq i \leq 1$, $0 \leq j \leq 2$. Allora: $\chi(\mathcal{F}_0) = \chi(\mathcal{F}_1) + \chi(\mathcal{F}_2)$ (*la caratteristica di Eulero-Poincaré è additiva: è vero in qualsiasi dimensione*).*

Dimostrazione. Spezzettare la successione esatta lunga di coomologia in tante successioni esatte corte: esercizio.

Finalmente:

Teorema 7.8. (Riemann-Roch)
Sia X una curva proiettiva liscia di genere g e sia $D \in Div(X)$ un divisore qualsiasi. Allora:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = \deg(D) - g + 1$$

Dimostrazione. Il teorema è vero se $D = 0$: $h^0(\mathcal{O}) - h^1(\mathcal{O}) = 0 - g + 1$, infatti $h^0(\mathcal{O}) = 1$ perché X è proiettiva e $h^1(\mathcal{O}) = g$ per definizione. Siccome ogni divisore si riconduce al divisore nullo per un numero finito di operazioni di addizione o differenza di un punto (cf dimostrazione del Lemma 7.5, basta mostrare che la formula è vera per D se e solo se è vera per $D - P$, $P \in X$ un punto qualsiasi.

La successione esatta (7.2) fornisce (Lemma 7.7): $\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}(D - P)) + \chi(\mathcal{O}_P)$. Visto che $\chi(\mathcal{O}_P) = h^0(\mathcal{O}_P) - h^1(\mathcal{O}_P) = 1$, abbiamo: $\chi(\mathcal{O}(D)) = 1 + \chi(\mathcal{O}(D - P))$. Quindi la formula è vera per $\mathcal{O}(D)$ se e solo se è vera per $\mathcal{O}(D - P)$. Il teorema è dimostrato.

Sia L un fibrato in rette sulla curva proiettiva liscia X. Abbiamo $L \simeq \mathcal{O}(D)$ e, per definizione, $\deg(L) = \deg(D)$. Quindi:

Corollario 7.9. *Sia L un fibrato in rette di grado d sulla curva proiettiva liscia X di genere g, allora:*

$$\chi(L) = d - g + 1$$

7.2 Fascio canonico, dualità di Serre (RR take two).

Ad ogni varietà (differenziabile, analitica, algebrica) viene associato un oggetto naturale: il suo fibrato tangente.

Definizione 7.10. *Sia X una curva algebrica proiettiva liscia. Il* fibrato canonico *di X, ω_X, è: $\omega_X = T_X^* = \mathcal{H}om(T_X, \mathcal{O}_X)$.*

Da un punto di vista algebrico il fascio canonico è forse l'oggetto più naturale. Lo si può definire come il fascio dei differenziali regolari.

Definizione 7.11. *Un divisore canonico, K, è un divisore tale che $\mathcal{O}(K) \simeq \omega_X$.*

La definizione ha senso perché sappiamo che ogni fibrato in rette L è della forma $L = \mathcal{O}(D)$ per un qualche divisore.

La dualità di Serre (che non dimostreremo) permette, sostanzialmente, di esprimere un h^1 come un h^0; si tratta di un teorema molto generale, il caso particolare che ci interessa è:

Teorema 7.12. (Dualità di Serre)
Sia X una curva proiettiva liscia e sia $D \in Div(X)$ un divisore qualsiasi, allora:

$$H^1(\mathcal{O}(D)) \simeq H^0(\omega_X \otimes \mathcal{O}(-D))^*$$

In particolare $h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(K - D))$.

Siccome abbiamo dimostrato che ogni spazio $\mathcal{L}(D)$ ha dimensione finita, sappiamo che ogni $H^0(\mathcal{O}(D))$ ha dimensione finita. Quindi dalla dualità di Serre segue che $h^1(\mathcal{O}) < \infty$, quindi il genere di una curva è un intero (finito) ≥ 0. Inoltre abbiamo: $h^1(\mathcal{O}) = h^0(\omega_X) = g$ e $h^1(\omega_X) = h^0(\mathcal{O}) = 1$.

Usando la dualità di Serre abbiamo un'altra formulazione del teorema di Riemann-Roch:

Teorema 7.13. (Riemann-Roch)
Sia X una curva proiettiva liscia di genere g. Sia $D \in Div(X)$ un divisore qualsiasi, allora:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^0(\mathcal{O}(K - D)) = \deg(D) - g + 1$$

Visto che $h^0(\mathcal{O}(D)) = l(D)$, ritroviamo la formulazione classica: $l(D) - l(K - D) = \deg(D) - g + 1$.

Lemma 7.14. *Se K è un divisore canonico, allora* $\deg(K) = 2g - 2$.

Dimostrazione. Abbiamo $\chi(\mathcal{O}(K)) = \chi(\omega_X) = h^0(\omega_X) - h^1(\omega_X) = h^1(\mathcal{O}) - h^0(\mathcal{O})$ (dualità di Serre). Quindi $\chi(\mathcal{O}(K)) = g - 1$. Ma per Riemann-Roch: $\chi(\mathcal{O}(K)) = \deg(K) - g + 1$. Segue che $\deg(K) = 2g - 2$.

Corollario 7.15. *Se* $X = \mathbb{P}^1$ *abbiamo:* $\omega_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$.

Sia X *una curva proiettiva liscia di genere* 1 *(cioè* X *è una curva ellittica), allora* $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$.

Dimostrazione. Se $X = \mathbb{P}^1$, per il Lemma 7.14, $\omega_{\mathbb{P}^1}$ è un fibrato di grado -2. L'unico fibrato di grado -2 su $\mathbb{P}^1$ è $\mathcal{O}(-2)$.

Se X ha genere 1, per il Lemma 7.14, ω_X ha grado zero. Inoltre $h^0(\omega_X) = h^1(\mathcal{O}_X) = 1$. Quindi per il Lemma 7.2, $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$.

Osservazione 7.16. Siccome una curva ellittica è un gruppo algebrico, il suo fibrato tangente è banale (traslare la fibra nell'origine). Ogni varietà abeliana (varietà proiettiva con una struttura di gruppo algebrico) ha un fibrato tangente banale.

Il teorema di Riemann:

Corollario 7.17. *Sia* X *una curva proiettiva liscia di genere* g. *Sia* $D \in Div(X)$. *Se* $\deg(D) > 2g-2$, *allora:*

$$h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg(D) - g + 1$$

Dimostrazione. Abbiamo (Teorema 7.13) $h^0(\mathcal{O}(D)) - h^0(\mathcal{O}(K-D)) = \deg(D) - g + 1$. Siccome $\deg(K-D) = 2g-2-\deg(D) < 0$, $h^0(\mathcal{O}(K-D)) = 0$ e il risultato segue.

Corollario 7.18. *Sia* X *una curva ellittica (= curva proiettiva liscia di genere uno). Sia* $D \in Div(X)$. *Se* $\deg(D) > 0$, *allora:* $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg(D)$.

Esercizi.

exercice 7 *Sia* X *una curva proiettiva liscia di genere* g *e sia* $P \in X$ *un punto.*

(1) Mostrare che se $n \geq g+1$ *esiste una funzione razionale non costante regolare su* $X \setminus \{P\}$ *e con un polo di ordine* $\leq n$ *in* P.

Cosa potete dire se $n \leq g$*?*

exercice 8 *Una versione generale (ma non la più generale!) della dualità di Serre è la seguente: sia* X *una varietà proiettiva liscia di dimensione* n *e sia* E *un* $\mathcal{O}_X$*-modulo localmente libero, allora* $h^i(E) = h^{n-i}(E^* \otimes \omega_X)$. *Qui* $\omega_X = \wedge^n(\Omega_X^1) = \det(\Omega_X^1)$, *dove* Ω_X^1 *è il duale del fibrato tangente;* ω_X *è il fibrato "determinante", in particolare* $rgo(\omega_X) = 1$.

(1) Se $C \subset \mathbb{P}^2$ è una curva (liscia) irriducibile, di grado d, abbiamo visto in un esercizio precedente che c'è una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

Concludere che $h^1(\mathcal{O}(-t)) = 0$, se $t > 0$ (si ricorda che $h^1(\mathcal{O}) = 0$).

(2) Prendendo per buono che $\omega_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}(-3)$, concludere che $h^1(\mathcal{O}(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$.

(3) Se $C \subset \mathbb{P}^2$ è una curva liscia di grado d, mostrare che $g(C) := h^1(\mathcal{O}_C) = (d-1)(d-2)/2$ ("formula del genere di una curva piana").

In particolare non esistono curve piane lisce di genere 2; anzi, "in generale", una curva di genere g non ammette nessuna immersione in $\mathbb{P}^2$.

8

Sistemi lineari molto ampi.

8.1 Morfismi in uno spazio proiettivo.

Sia D un divisore qualsiasi sulla curva proiettiva liscia X. Il *sistema lineare completo* $|D|$ è l'insieme dei divisori *effettivi* linearmente equivalenti a D. Abbiamo $|D| \simeq \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$. Un sistema lineare $\delta \subset |D|$ è un sotto spazio lineare dello spazio proiettivo $|D|$. Quindi $\delta = \mathbb{P}(V)$ dove V è un sotto spazio vettoriale di $\mathcal{L}(D)$.

Definizione 8.1. *Un sistema lineare δ è senza punti base se per ogni punto $P \in X$ esiste un divisore $D \in \delta$ tale che $P \notin D$.*
Quindi δ è senza punti base se non tutti i divisori di δ passano per uno stesso punto di X.

Un sistema lineare senza punti base definisce un morfismo $\varphi : X \to \delta^* = \mathbb{P}(V)^*$: se $x \in X$, $\varphi(x)$ è l'iperpiano, h, dei divisori di δ che contengono x. L'iperpiano h corrisponde ad un punto nello spazio duale δ^*.

Sia $n = \dim \delta$ ($\dim(V) = n + 1$), allora abbiamo $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$. Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano; $\varphi^*(H) = \{x \mid \varphi(x) \in H\} = \varphi^{-1}(\varphi(X) \cap H)$ ("con molteplicità"). L'iperpiano H corrisponde ad un punto $D_0 \in \delta$ e dire che $\varphi(x) \in H$ è equivalente a dire che $D_0 \in \{D \mid x \in D\}$. Vediamo così che $\varphi^*(H) \simeq D_0$. In particolare $\varphi(X)$ non è contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^n$ e ogni iperpiano interseca $\varphi(X)$ in $\deg(\delta)$ punti contati con molteplicità.

In conclusione: Un sistema lineare ∞^n e senza punti base, δ, determina un morfismo $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ e in questo morfismo le sezioni iperpiane $H \cap \varphi(X)$ corrispondono ai divisori di δ.

Viceversa se $C \subset \mathbb{P}^n$ è una curva liscia irriducibile, non contenuta in un iperpiano (si dice "non degenere") allora gli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ segano su C un sistema lineare ∞^n, senza punti base.

8.2 Sistemi senza punti base, fibrati globalmente generati.

Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo. Possiamo considerare l'applicazione naturale: $v : H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$. La scrittura $H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}$ ($\mathcal{O} := \mathcal{O}_X$) indica il fascio "banale" $t.\mathcal{O} = \mathcal{O} \oplus ... \oplus \mathcal{O}$ ($t = \dim_k H^0(E)$). Lo possiamo pensare come il fibrato banale $H^0(E) \times X$, cioè la fibra (vettoriale) in ogni punto di X è $H^0(E)$. (A priori può essere $t = 0$). L'applicazione v (come valutazione) nel punto x è data da: $H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_x \to \mathcal{F}_x : s \otimes 1 \to s_x$. Passando alle fibre ridotte abbiamo un'applicazione $H^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}(x) : s \to s(x)$.

Definizione 8.2. *Il fascio $\mathcal{F}$ è* generato dalle sezioni globali *(o "globalmente generato") se v è suriettiva.*

Osservazione 8.3. Se v_x è suriettiva sulle spighe allora il morfismo indotto sulle fibre ridotte è anche lui suriettivo ($\otimes$ esatto a destra). Vale anche il viceversa per via del lemma di Nakayama (almeno se $\mathcal{F}$ è di tipo finito).

Ad ogni divisore D abbiamo associato un fibrato in rette (fascio localmente libero di rango uno) $\mathcal{O}(D)$ tale che $H^0(\mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$.

Il divisore degli zeri di una sezione globale di $\mathcal{O}(D)$:

Se $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$, visto che $\mathcal{O}(D)$ è localmente isomorfo a $\mathcal{O}$ possiamo vedere (localmente) s come una sezione di $\mathcal{O}$ cioè come una funzione regolare su un aperto, U, contenente x: $s| : U \to k$, il divisore degli zeri $(s)_0$ su U è $s|^*(0)$. Se $s(x) \neq 0$, allora $x \notin (s)_0$, se x compare con molteplicità m in $s|^*(0)$ (cioè s si annulla con molteplicità m in x) allora $(s)_0 = mx + \sum n_i P_i$, $P_i \neq x$.

Detto diversamente: una sezione globale $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$ corrisponde ad un morfismo $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(D)$ definito da $1_x \to s_x$. Il morfismo (di fasci) è iniettivo. Dualizzando si ottiene $\mathcal{O}(-D) \to \mathcal{O}$. Sia $\mathcal{J}$ l'immagine, quindi $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ è un fascio d'ideali. Se $\mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_x$, s_x non genera $\mathcal{O}_x$ (quindi $s_x \in \mathfrak{m}_x$, cioè $s(x) = 0$). Adesso $\mathcal{J}$ definisce una sotto varietà "con molteplicità" (cioè un sotto schema, nel caso di una curva un divisore) di X che non è altro che $(s)_0$.

Lemma 8.4. *Sia D un divisore sulla curva proiettiva liscia X. Sia $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$. Nell'isomorfismo $H^0(\mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$, sia f l'immagine di s. Abbiamo $div(f) + D = D_0 \geq 0$. Allora $(s)_0 = D_0$.*

Dimostrazione. Sia (U_i, f_i) il divisore di Cartier corrispondete a D. Quindi f_i definisce D su U_i e $\mathcal{O}(D)(U_i) = \{h/f_i \mid h \in \mathcal{O}(U_i)\}$. La sezione globale $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$ corrisponde ad una funzione razionale f tale che $f|U_i = h_i/f_i$. Abbiamo $s(x) = 0$ ($x \in U_i$) $\Leftrightarrow$ s_x non è un generatore di $\mathcal{O}(D)_x$. Questo è equivalente a dire che $h_i(x) = 0$ (pensare all'isomorfismo $\mathcal{O}(D)|U_i \to \mathcal{O}|U_i$:

$1/f_i \to 1$). Più precisamente $s_x \in \mathfrak{m}_x^t \setminus \mathfrak{m}_x^{t+1}$ se e solo se h_i si annulla con molteplicità t in x. Abbiamo $div(f|U_i) = div(h_i) - div(f_i) = div(h_i) - D|U_i$. Pertanto $D_0|U_i = div(h_i)$ contiene x (con molteplicità t) se e solo se $s(x) = 0$ (con molteplicità t).

Lemma 8.5. *Il sistema lineare completo $|D|$ è senza punti base se e solo se $\mathcal{O}(D)$ è generato dalle sezioni globali.*

Dimostrazione. Se $|D|$ è senza punti base, dato $x \in X$ esiste $D_0 \in |D|$ tale che $x \notin D_0$. Sia s la sezione di $\mathcal{O}(D)$ corrispondente a D_0, allora $s(x) \neq 0$ per il Lemma 8.4.

Viceversa se $\mathcal{O}(D)$ è generato dalle sezioni globali, dato $x \in X$, esiste $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$ tale che $s(x) \neq 0$. Sia $D_0 \in |D|$ il divisore corrispondente a s, allora (Lemma 8.4) $x \notin D_0$.

Lemma 8.6. *Sia L un fibrato in rette sulla curva proiettiva liscia X. Il fibrato L è generato dalle sezioni globali se e solo se: $\forall P \in X$: $h^0(L(-P)) = h^0(L) - 1$.*

Dimostrazione. Abbiamo una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0$$

Tensorizzando con L viene:

$$0 \to L(-P) \to L \to L \otimes \mathcal{O}_P \to 0$$

Osserviamo che $L \otimes \mathcal{O}_P \simeq \mathcal{O}_P (\simeq L(p))$ perché L è localmente libero. Prendendo la coomologia viene:

$$0 \to H^0(L(-P)) \to H^0(L) \stackrel{v_P}{\to} H^0(L \otimes \mathcal{O}_P) \simeq L(p) \to \cdots$$

La mappa v_P non è altro che la valutazione in P: $v_P(s) = s(P)$. Quindi L è generato dalle sezioni globali $\Leftrightarrow v_P$ è suriettiva $\forall P \Leftrightarrow h^0(L(-P)) = h^0(L) - 1$, $\forall P$.

Abbiamo visto che ogni fibrato in rette è della forma $L \simeq \mathcal{O}(D)$. Il grado di L è $\deg(L) = \deg(D)$.

Proposizione 8.7. *Sia X una curva proiettiva liscia, di genere g.*

1. *Sia L un fibrato in rette su X. Se $\deg(L) \geq 2g$, allora L è generato dalle sezioni globali*
2. *Un sistema lineare completo $|D|$ con $\deg(D) \geq 2g$ è senza punti base.*

Dimostrazione. Chiaramente (1) e (2) sono equivalenti. Sia $L = \mathcal{O}(D)$. Per il Lemma 8.6 basta vedere che $h^0(L) - 1 = h^0(L(-P))$, $\forall P \in X$. Per Riemann-Roch: $h^0(L) = l(D) = d - g + 1 + l(K - D)$ ($d := \deg(D)$). Abbiamo $\deg(K - D) = 2g - 2 - d < 0$ (perché $\deg(K) = 2g - 2$). Quindi $l(D) = d - g + 1$. Nello stesso modo $l(D-P) = d-1-g+1+l(K-D+P)$. Siccome $\deg(K-D+P) = 2g - 2 - d + 1 < 0$, viene $l(D - P) = d - g = l(D) - 1$.

Osservazione 8.8. Per un sistema lineare non completo $\delta \subset |D|$, $\delta = \mathbb{P}(V)$, non c'è un criterio coomologico. Possiamo identificare V a un sotto spazio proprio di $H^0(\mathcal{O}(D))$ e bisogna vedere se le sezioni globali in V generano $\mathcal{O}(D)$, ossia se $V \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{O}(D)$ è suriettiva.

Lemma 8.9. *Sia X una curva proiettiva liscia di genere $g \geq 2$, allora $|K_X|$ è ∞^{g-1} e senza punti base.*

Dimostrazione. Esercizio.

8.3 Sistemi lineari molto ampi, fibrati in rette molto ampi.

Se $\delta \subset |D|$ è un sistema lineare senza punti base, allora δ definisce un morfismo $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$. Sia $C = \varphi(X)$. Vorremo un criterio che ci assicuri che $\varphi : X \to C$ è un isomorfismo. Una prima condizione è che φ sia iniettivo. In termini di sistemi lineari questo si traduce col fatto che presi due punti distinti $P, Q \in X$, $P \neq Q$, allora esiste un divisore $D_0 \in \delta$ tale che $P \in D_0, Q \notin D_0$ ("δ separa i punti"). Infatti siccome $\varphi(P) = \{D \in \delta \mid P \in D\}$, se la condizione è verificata $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

Osserviamo che C è un chiuso di $\mathbb{P}^n$; questo segue dal fatto che X è proiettiva (un morfismo tra varietà proiettive è proprio (*proper*), in particolare manda chiusi su chiusi). Quindi se φ è iniettiva è biiettiva sull'immagine e l'applicazione inversa è continua. Quindi per vedere che φ è un isomorfismo sull'immagine basta mostrare che φ è un'immersione (sarà allora un immersione chiusa). Per vedere che φ è un'immersione basta vedere che C è non singolare. Infatti in questo caso $\varphi : X \to C$ è un morfismo di grado uno tra curve lisce, quindi un isomorfismo. Adesso $C \subset \mathbb{P}^n$ è liscia $\Leftrightarrow \forall x \in C$ esiste un iperpiano H passante per x che interseca C con molteplicità uno in x. Se $\varphi(P) = x$, visto che $H \cap C$ corrisponde a un divisore $D \in \delta$, questo significa che esiste $D \in \delta$ contenente P ma non $2P$.

Definizione 8.10. *Un sistema lineare δ sulla curva proiettiva liscia X è* molto ampio *se:*

1. *"separa i punti": Per ogni $P, Q \in X, P \neq Q$,* $\dim(\delta - P - Q) = \dim(\delta) - 2$ *(cioè Q non è un punto base di $\delta - P$)*
2. *"separa i vettori tangenti": Per ogni $P \in X$,* $\dim(\delta - 2P) = \dim(\delta) - 2$.

Se δ è molto ampio è in particolare senza punti base. Abbiamo mostrato:

Proposizione 8.11. *Se δ è un sistema lineare molto ampio sulla curva proiettiva liscia X allora il morfismo corrispondente $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ è un'immersione chiusa. Quindi $C = \varphi(X)$ è una curva liscia isomorfa a X.*

Nel caso dei sistemi completi abbiamo una traduzione in termini di fibrati in rette:

Definizione 8.12. *Un fibrato in rette L sulla curva proiettiva liscia X è molto ampio se $\forall (P, Q) \in X^2, h^0(L(-P-Q)) = h^0(L)-2$ (P, Q non necessariamente distinti).*

Grazie a Riemann-Roch abbiamo:

Teorema 8.13. *Sia X una curva proiettiva liscia di genere g. Ogni fibrato in rette su X di grado $d > 2g$ è molto ampio.*

Dimostrazione. Abbiamo $h^0(L) = d - g + 1 + h^0(\omega_X \otimes L^*)$. Siccome $\deg(\omega_X \otimes L^*) = 2g - 2 - d < 0$, viene $h^0(L) = d - g + 1$. Nello stesso modo $h^0(L(-P - Q)) = d - 2 - g + 1 + h^0(\omega_X \otimes L^*(P + Q))$. Abbiamo $\deg(\omega_X \otimes L^*(P + Q)) = 2g - 2 - d + 2 < 0$, quindi $h^0(L(-P - Q)) = d - 1 - g = h^0(L) - 2$.

Teorema 8.14. *Ogni curva proiettiva liscia può essere immersa in $\mathbb{P}^3$.*

Dimostrazione. Sia X una curva proiettiva liscia di genere g. Sia D un divisore di grado $d > 2g$. Per il Teorema 8.13, il sistema lineare $|D|$ è molto ampio e immerge X in $\mathbb{P}^n$, con $n = d - g$. Sia $\varphi(X) = C \subset \mathbb{P}^n$. Se p è un punto di $\mathbb{P}^n$ che non sta su una bi-secante o una tangente a C, allora la restrizione a C della proiezione di centro p induce un morfismo $\pi_p : C \to \mathbb{P}^{n-1}$ che è un isomorfismo sull'immagine. Sia $Sec(C)$ la chiusura di $\bigcup \langle x, y \rangle$, $x, y \in C, x \neq y$ ($Sec(C)$ è la varietà delle secanti di C). La varietà $Sec(C)$ può essere parametrizzata nel modo seguente: darsi un punto di $Sec(C)$ torna a darsi due punti x, y di C (∞^2 parametri) e un punto sulla retta $\langle x, y \rangle$ (∞^1 parametri). Vediamo quindi che $\dim(Sec(C)) \leq 3$. Quindi se $n > 3$ possiamo sempre proiettare isomorficamente C in $\mathbb{P}^{n-1}$.

C'è un caso particolarmente importante in cui si può fare di più:

Teorema 8.15. *Sia X una curva proiettiva liscia di genere uno ("curva ellittica"). Sia $P \in X$. Il sistema lineare $|3P|$ è molto ampio e immerge X in $\mathbb{P}^2$. L'immagine $C = \varphi(X) \subset \mathbb{P}^2$ è una cubica liscia e $\varphi(P)$ è un punto di flesso di C.*

Dimostrazione. Il sistema lineare $|3P|$ ha grado 3 quindi è molto ampio (Teorem 8.13) e, per Riemann-Roch, $h^0(\mathcal{O}(3P)) = 3$, quindi $|3P|$ immerge in $\mathbb{P}^2$. Un iperpiano di $\mathbb{P}^2$ (cioè una retta) sega su C un divisore di $|3P|$, quindi la retta interseca C in tre punti e C è una cubica. Siccome $3P \in |3P|$, esiste una retta $L \subset \mathbb{P}^2$ tale che $L \cap C = \varphi(P)$ con molteplicità tre, pertanto $\varphi(P)$ è un flesso di C.

Esercizi.

exercice 9 *Sia X una curva proiettiva liscia di genere g.*

(1) Se $g \leq 1$, il sistema canonico $|K_X|$ non è molto ampio.

(2) Mostrare che se $g = 2$ il sistema canonico determina un morfismo $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ di grado due (e quindi non è molto ampio). Per il teorema di Hurwitz questo morfismo è ramificato in 6 punti.

(3) Sia X una curva di genere due. Mostrare che esiste una funzione razionale regolare su $X \setminus \{P\}$, con un polo di ordine ≤ 2 in P se e solo se P è uno dei sei punti di ramificazione del morfismo canonico ("i sei punti di ramificazione sono i punti di Weierstrass").

exercice 10 *(1) Sia X una curva proiettiva liscia di genere $g \geq 2$. Mostrare che $|K_X|$ non è molto ampio $\Leftrightarrow$ esiste una serie lineare ∞^1, di grado due (una g_2^1). Si dice allora che X è* iperellittica.

(2) Mostrare che una g_2^1 su una curva di genere $g \geq 2$ è completa e senza punti base. In particolare la g_2^1 determina un morfismo di grado due $X \to \mathbb{P}^1$.

(3) Mostrare che una curva di genere $g \geq 2$ è iperellittica $\Leftrightarrow$ esiste un morfismo di grado due $X \to \mathbb{P}^1$. Osservare che ogni curva di genere due è iperellittica.

exercice 11 *Sia X una curva proiettiva liscia di genere due.*
(1) Sia L un fibrato in rette di grado d su X. Mostrare che L è molto ampio $\Leftrightarrow d \geq 5$.
(2) Sia L molto ampio di grado 5, allora L detrmina un'immersione $\varphi_L : X \to \mathbb{P}^3$. Sia $C = \varphi_L(X)$. Mostrare che C è contenuta in un'unica superficie quadrica Q.
(3) Mostrare che la quadrica Q è un cono $\Leftrightarrow L \simeq \omega_X^2(P)$ (hint: considerare $L \otimes \omega_X^{-1}$).*

exercice 12 *Sia X una curva proiettiva liscia di genere tre. Sia L un fibrato in rette di grado d su X. Mostrare che: L molto ampio $\Rightarrow d = 4$ o $d \geq 6$.*

Mostrare che se L, di grado 4 è molto ampio, allora $L \simeq \omega_X$ (e quindi X non è iperellittica). (Si può mostrare che su ogni curva di genere tre esistono fibtrati molto ampi di grado 6.)

exercice 13 *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile, di grado d, non piana. Abbiamo già visto che se $d = 3$ allora $g = 0$. Mostrare che se $d = 4$, $g \leq 1$ e se $d = 5$, $g \leq 2$. Inoltre se $d = 4$, $0 \leq g \leq 1$, esiste una curva liscia, irriducibile, non degenere, di grado d, genere g in $\mathbb{P}^3$; idem se $d = 5$ e $0 \leq g \leq 2$.*

Per quali (d, g) esiste una curva liscia di grado d, genere g in $\mathbb{P}^3$? La prima risposta a questo problema fu data da Halphen, nel 1881. Questo risultato (e la sua dimostrazione) fu accettato per decenni finché una lettura critica negli anni ∼1970 della memoria di Halphen mise in evidenza che la dimostrazione di Halphen era sbagliata. La prima dimostrazione corretta è dovuta a Gruson-Peskine (1981), cento anni dopo. L'enunciato del teorema, però, è lo stesso di quello di Halphen!

9

Appendice: algebra omologica.

Le verifiche necessarie usano argomenti standard di algebra omologica. Facciamo velocemente un piccolo ripasso di queste tecniche.

Per semplificare (e per poter usare elementi) enunciamo questi risultati nella categoria A-mod, ma tutti questi risultati sono veri in una categoria abeliana qualsiasi.

Lemma 9.1 (Lemma del serpente). *Sia in A-mod un diagramma commutativo a righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \to 0 \\ & & a' \downarrow & & a \downarrow & & a'' \downarrow \\ 0 \to & & N' & \xrightarrow{f'} & N & \xrightarrow{g'} & N'' \end{array}$$

allora esiste un morfismo $d : Ker(a'') \to Coker(a')$ tale che la successione:
$Ker(a') \to Ker(a) \to Ker(a'') \xrightarrow{d} Coker(a') \to Coker(a) \to Coker(a'')$
sia esatta (le frecce tra i Ker (risp. i $Coker$) sono indotte dal diagramma).

Inoltre se f è iniettiva, allora $Ker(a') \to Ker(a)$ è iniettiva; se g' è suriettiva, allora $Coker(a) \to Coker(a'')$ è suriettiva.

Lemma 9.2 (Lemma dei quattro). *Sia in A-mod un diagramma commutativo a righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

1. *Se α è suriettiva, δ e β sono iniettive, allora γ è iniettiva.*
2. *Se δ è iniettiva, α e γ sono suriettive, allora β è suriettiva.*

9.0.1 Coomologia.

In una categoria abeliana oltre alla nozione di successione esatta abbiamo quella di complesso: $M^\bullet : \cdots \stackrel{d_{n-1}}{\rightarrow} M_n \stackrel{d_n}{\rightarrow} M_{n+1} \stackrel{d_{n+1}}{\rightarrow} \cdots$, è un complesso se $d_i \circ d_{i-1} = 0$. Si pone $Ker(d_n) = Z^n(M^\bullet)$ (il modulo degli n-cocicli del complesso) e $Im(d_{n-1}) = B^n(M^\bullet)$ (il modulo degli n-cobordi). Il modulo quoziente $H^n(M^\bullet) = Z^n/B^n$ è l'ennesimo modulo di coomologia del complesso, misura il difetto di esattezza, al posto n, del complesso. Le applicazioni d_i sono i differenziali del complesso (per essere più precisi bisognerebbe indicare il complesso con la notazione $(M^\bullet, d)$.

Osservazione 9.3. Invertendo le frecce (o cambiando la numerazione) abbiamo la nozione di omologia (con relativi cicli e bordi). Noi ci occuperemo solo di coomologia.

Per semplificare le notazioni (e le dimostrazioni) ci metteremo nella categoria degli A-moduli (A anello qualsiasi), ma quanto segue è valido in ogni categoria abeliana.

Definizione 9.4. *Siano $(M^\bullet, d)$, $(N^\bullet, d')$ due complessi. Un morfismo $f : M^\bullet \to N^\bullet$ è una collezione di morfismi $f_n : M_n \to N_n$ che commutano con i differenziali, cioè per ogni n il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} M_n & \stackrel{d_n}{\rightarrow} & M_{n+1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} \\ N_n & \stackrel{d'_n}{\rightarrow} & N_{n+1} \end{array}$$

è commutativo.

Lemma 9.5. *Il morfismo f di complessi induce, per ogni n, un morfismo $H^n(f) : H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$.*

Dimostrazione. Si pone $H^n(f)$(classe di x) $=$ classe di $f_n(x)$; il lettore verificherà che questa definizione è ben posta.

Lemma 9.6. *Siano $f : M^\bullet \to N^\bullet$ e $g : N^\bullet \to P^\bullet$ due morfismi di complessi.*

1. *Per ogni n, $H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f)$*
2. *$H^n(1_{M^\bullet}) = 1_{H^n(M^\bullet)}$*
3. *$H^n(M^\bullet \oplus N^\bullet) = H^n(M^\bullet) \oplus H^n(N^\bullet)$*

Il lemma precedente dice che, per ogni n, H^n è un funtore covariante additivo dalla categoria dei complessi di A-moduli nella categoria degli A-moduli.

Definizione 9.7. *Siano $f, g : M^\bullet \to N^\bullet$ due morfismi di complessi. Un'omotopia tra f e g è un morfismo $k : M^\bullet \to N^\bullet$, di grado -1 (cioè $k_n : M_n \to N_{n-1}$ per ogni n), tale che $f_n - g_n = d'_{n-1} \circ k_n + k_{n+1} \circ d_n$, per ogni n (d, d' i differenziali di $M^\bullet, N^\bullet$).*

Due morfismi sono omotopicamente equivalente (o omotopi) se esiste un'omotopia tra di loro.

Lemma 9.8. *Siano $f, g : M^\bullet \to N^\bullet$ due morfismi di complessi. Se f e g sono omotopicamente equivalenti, allora $H^n(f) = H^n(g)$ per ogni n.*

Dimostrazione. Sia $\overline{x} \in H^n(M^\bullet)$, $x \in Ker(d_n)$. Abbiamo $H^n(f)(\overline{x}) =$ classe di $f_n(x)$ mod $Im(d'_{n-1})$. Ma $f_n(x) - g_n(x) = d'_{n-1}(k_n(x)) + k_{n+1}(d_n(x)) = d'_{n-1}(k_n(x))$, quindi $f_n(x) \equiv g_n(x)$ mod $Im(d'_{n-1})$.

Definizione 9.9. *Due complessi $M^\bullet, N^\bullet$ sono omotopicamente equivalenti se esistono $f : M^\bullet \to N^\bullet$ e $g : N^\bullet \to M^\bullet$ tali che $g \circ f$ sia omotopo a $1_{M^\bullet}$ e tale che $f \circ g$ sia omotopo a $1_{N^\bullet}$.*

Visto che H^n è un funtore, dal lemma 9.8, otteniamo:

Corollario 9.10. *Se $M^\bullet$ e $N^\bullet$ sono due complessi omotopicamente equivalenti, allora $H^n(M^\bullet) \simeq H^n(N^\bullet)$, per ogni n.*

Proposizione 9.11 (successione lunga di coomologia). *Sia $0 \to M'^\bullet \to M^\bullet \to M''^\bullet \to 0$ una successione esatta di complessi, allora, per ogni n, esiste un morfismo $\delta_n : H^n(M''^\bullet) \to H^{n+1}(M'^\bullet)$ tale che la successione*

$$\cdots \to H^n(M'^\bullet) \to H^n(M^\bullet) \to H^n(M''^\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(M''^\bullet) \to \cdots$$

sia esatta.

Dimostrazione. Per ogni n abbiamo:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & M'_n & \xrightarrow{f_n} & M_n & \xrightarrow{g_n} & M''_n & \to 0 \\
& d'_n \downarrow & & d_n \downarrow & & d''_n \downarrow & \\
0 \to & M'_{n+1} & \xrightarrow{f'_{n+1}} & M_{n+1} & \xrightarrow{g'_{n+1}} & M''_{n+1} & \to 0
\end{array}$$

Per il lemma del serpente abbiamo una successione esatta:

$$Coker(d'_n) \to Coker(d_n) \to Coker(d''_n) \to 0$$

.

D'altra parte osserviamo che abbiamo un morfismo:

$$Coker(d_n) \to Ker(d_{n+2})$$

dato da $\overline{x} \to d_{n+1}(x)$. Questo morfismo è ben definito perchè se $x-x' = d_n(z)$ allora $d_{n+1}(x-x') = d_{n+1}(d_n(z)) = 0$. Stesso discorso per d', d''. Quindi otteniamo:

$$\begin{array}{ccccccc} & Coker(d'_n) & \to & Coker(d_n) & \to & Coker(d''_n) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & Ker(d'_{n+2}) & \to & Ker(d_{n+2}) & \to & Ker(d''_{n+2}) & \end{array}$$

Si verifica che questo diagramma è commutativo e si osserva che:

$Coker(Coker(d'_n) \to Ker(d'_{n+2})) \simeq H^{n+2}(M'^{\bullet})$ e
$Ker(Coker(d''_n) \to Ker(d''_{n+2})) \simeq H^{n+1}(M''^{\bullet})$.

Il lemma del serpente fornisce allora la successione esatta:
$H^{n+1}(M'^{\bullet}) \to H^{n+1}(M^{\bullet}) \to H^{n+1}(M''^{\bullet}) \stackrel{\delta_{n+1}}{\to} H^{n+2}(M'^{\bullet}) \to H^{n+2}(M^{\bullet}) \to H^{n+2}(M''^{\bullet})$

Questa è la successione cercata in quanto si verifica che i morfismi tra gli H^i sono quelli indotti dalla successione iniziale di complessi.

Osserviamo che il connecting morphism è ottenuto nel modo seguente: sia $\overline{x} \in H^n(M''^{\bullet})$ con $x \in Ker(d''_n)$. Sia $x = g_n(y)$, come nella dimostrazione del lemma del serpente, $d_n(y) = f_{n+1}(z)$. Abbiamo $f_{n+2}(d'_{n+1}(z)) = d_{n+1}(f_{n+1}(z)) = d_{n+1}(d_n(y)) = 0$, siccome f_{n+2} è iniettiva, $d'_{n+1}(z) = 0$. L'immagine di $\overline{x}$ è z (mod $Im(d'_n)$)

Finalmente osserviamo il carattere funtoriale della successione esatta lunga di coomologia. Sia $\mathcal{C}$ la categoria i cui oggetti sono le successioni esatte corte di complessi di A-moduli (o più generalmente di oggetti di una categoria abeliana); i morfismo sono dati da i diagrammi commutativi:

$$(D) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \to & M'^{\bullet} & \stackrel{f}{\to} & M^{\bullet} & \stackrel{g}{\to} & M''^{\bullet} & \to 0 \\ & a' \downarrow & & a \downarrow & & a'' \downarrow & \\ 0 \to & N'^{\bullet} & \stackrel{f'}{\to} & N^{\bullet} & \stackrel{g'}{\to} & N''^{\bullet} & \to 0 \end{array}$$

In modo analogo sia $\mathcal{L}$ la categoria i cui oggetti sono le successioni esatte lunghe di A-moduli, allora:

Proposizione 9.12. *Con le notazioni precedenti, la successione esatta lunga di coomologia è un funtore da $\mathcal{C}$ in $\mathcal{L}$, cioè ad ogni diagramma (D) corrisponde un diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \stackrel{\delta}{\to} & H^n(M'^{\bullet}) & \to & H^n(M^{\bullet}) & \to & H^n(M''^{\bullet}) & \stackrel{\delta}{\to} & H^{n+1}(M'^{\bullet}) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots \stackrel{\delta}{\to} & H^n(N'^{\bullet}) & \to & H^n(N^{\bullet}) & \to & H^n(N''^{\bullet}) & \stackrel{\delta}{\to} & H^{n+1}(N'^{\bullet}) \end{array}$$

Dimostrazione. Siccome, per ogni n, H^n è un funtore, i due quadranti a sinistra sono commutativi, basta quindi dimostrare che il quadrante a destra

$$\begin{array}{ccc} H^n(M''^\bullet) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(M'^\bullet) \\ \downarrow H^n(a'') & & \downarrow H^{n+1}(a') \\ H^n(N''^\bullet) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(N'^\bullet) \end{array}$$

commuta. Riprendiamo le notazioni della fine della dimostrazione della Prop. 9.11: sia $\overline{x} \in H^n(M''^\bullet)$ con $x \in Ker(d''_n)$. Sia $x = g_n(y)$, come nella dimostrazione del lemma del serpente, $d_n(y) = f_{n+1}(z)$. Abbiamo $f_{n+2}(d'_{n+1}(z)) = d_{n+1}(f_{n+1}(z)) = d_{n+1}(d_n(y)) = 0$, siccome f_{n+2} è iniettiva, $d'_{n+1}(z) = 0$. L'immagine, tramite δ, di $\overline{x}$ è z (mod $Im(d'_n)$). Pertanto $H^{n+1}(a')(\delta(\overline{x})) = a'_{n+1}(z)$ (mod $\tilde{d}''_n(N''_n)$).

Abbiamo (è consigliato fare un diagramma!): $a''_n(x) = a''_n(g_n(y)) = \tilde{g_n}(a_n(y))$ e $\tilde{d}_n(a_n(y)) = a'_n(d_n(y)) = a'_n(f_{n+1}(z)) = \tilde{f}_{n+1}(a'_{n+1}(z))$. Questo mostra che l'immagine di $H^n(a'')(\overline{x})$ in $H^{n+1}(N'^\bullet)$ tramite δ è $a'_{n+1}(z)$ (mod $\tilde{d}''_n(N''_n)$). Quindi il quadrante è commutativo.

9.1 Funtori derivati.

Tornando ai nostri funtori derivati abbiamo:

Lemma 9.13. *Se $0 \to M \to I^\bullet$ e $0 \to N \to J^\bullet$ sono due risoluzioni iniettive e se $\varphi : M \to N$ è un morfismo allora esiste un sollevamento di φ ad un morfismo tra le risoluzioni, cioè esiste $f : I^\bullet \to J^\bullet$ tale che*

$$\begin{array}{ccc} M & \to & I^\bullet \\ \downarrow \varphi & & \downarrow f \\ N & \to & J^\bullet \end{array}$$

sia commutativo.

Inoltre se $g : I^\bullet \to J^\bullet$ è un altro sollevamento di φ, allora f e g sono omotopi.

Corollario 9.14. *1. Due risoluzioni iniettive di M: $0 \to M \to I^\bullet$, $0 \to M \to J^\bullet$, sono omotopicamente equivalenti.*

2. Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore covariante addittivo, a valori nella categoria abeliana $\mathcal{D}$, i due complessi $F(I^\bullet)$, $F(J^\bullet)$ sono omotopicamente equivalenti. In particolare $H^n(F(I^\bullet)) \simeq H^n(F(J^\bullet))$, per ogni n.

Lemma 9.15. *Sia* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *una successione esatta nella categoria abeliana* $\mathcal{C}$. *Siano* $0 \to M' \xrightarrow{\epsilon'} I'^{\bullet}$, $0 \to M'' \xrightarrow{\epsilon''} I''^{\bullet}$ *delle risolozioni iniettive. Esiste una risoluzione iniettiva* $0 \to M \xrightarrow{\epsilon} I'^{\bullet} \oplus I''^{\bullet}$ *tale che il diagramma*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I'^{\bullet} & \xrightarrow{i} & I'^{\bullet} \oplus I''^{\bullet} & \xrightarrow{p} & I''^{\bullet} & \to & 0 \end{array}$$

sia commutativo, dove i, p *sono i morfismi naturali di inclusione e proiezione.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & & & 0 & & \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \to & 0 \\ & & \epsilon' \downarrow & & & & \downarrow \epsilon'' & & \\ 0 & \to & I'_0 & \xrightarrow{i_0} & I'_0 \oplus I''_0 & \xrightarrow{p_0} & I''_0 & \to & 0 \end{array}$$

Siccome I'_0 è iniettivo, esiste $u_0 : M \to I'_0$ tale che $u_0 \circ f = \epsilon'$. Definiamo $\epsilon : M \to I'_0 \oplus I''_0$ tramite $\epsilon(x) = (u_0(x), \epsilon'(g(x)))$. Si verifica facilmente che $\epsilon \circ f = i_0 \circ \epsilon'$ e $\epsilon'' \circ g = p_0 \circ \epsilon$. Mostriamo che ϵ è iniettiva. Se $\epsilon''(g(x)) = 0$, allora $g(x) = 0$ e quindi $x = f(y)$; pertanto $0 = u_0(x) = u_0(f(y)) = \epsilon'(y)$. Per iniettività di ϵ', $y = 0$ e quindi $x = 0$.

Adesso il lemma del serpente fornisce una successione esatta:

$$0 \to Coker(\epsilon') \to Coker(\epsilon) \to Coker(\epsilon'') \to 0$$

e la dimostrazione prosegue ripetendo la costruzione precedente con $Coker(\epsilon')$, $Coker(\epsilon)$, $Coker(\epsilon'')$ al posto di M', M, M''.

Osservazione 9.16. Tutte le costruzioni fatte qui per risoluzioni iniettive sono vere, mutatis mutandis, per risoluzioni proiettive. Questo si può vedere sia direttamente, sia per dualità.

Sia M un oggetto di $\mathcal{C}$ e sia $0 \to M \to I^{\bullet}$ una risolzione iniettiva di M. Applicando F otteniamo un complesso $F(I^{\bullet})$ di cui possiamo considerare gli oggetti di coomologia $H^n(F(I^{\bullet}))$. Se $0 \to M \to J^{\bullet}$ è un'altra risoluzione iniettiva di M, abbiamo (cf Corollario 9.14), $H^n(F(I^{\bullet})) \simeq H^n(F(J^{\bullet}))$. Possiamo quindi porre senza ambiguità (almeno modulo isomorfismi) $R^nF(M) := H^n(F(I^{\bullet}))$.

Sia $\varphi : M \to N$ un morfismo. Se $0 \to M \to I^{\bullet}$, $0 \to N \to J^{\bullet}$ sono due risoluzioni iniettive, allora esiste un sollevamento di φ alle risoluzioni

$f : I^\bullet \to J^\bullet$ (cf Lemma 9.13), quindi otteniamo $F(f) : F(I^\bullet) \to F(J^\bullet)$ e il morfismo indotto in coomologia $H^n(F(f)) : H^n(F(I^\bullet)) \to H^n(F(J^\bullet))$. Se g è un altro sollevamento di φ allora f e g sono omotopi (Lemma 9.13), quindi anche $F(f)$ e $F(g)$ sono omotopi e perciò inducono lo stesso morfismo in coomologia. In conclusione ad ogni morfismo $\varphi : M \to N$ corrisponde un morfismo $R^nF(\varphi) : R^nF(M) \to R^nF(N)$. A questo punto si verifica senza troppe difficoltà che $R^nF : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore covariante additivo.

Definizione 9.17. *Con le notazioni precedenti $R^nF : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è l'n-esimo funtore derivato (a destra) del funtore F.*

Osservazione 9.18. 1. Più precisamente la definizione di R^nF dipende dalla scelta di una risoluzione iniettiva per ogni oggetto; con altre scelte si ottiene un altro funtore, isomorfo però al precedente, si parla quindi *del* funtore derivato R^nF. In certi casi (per esempio in A-mod) si può ovviare a questa difficoltà scegliendo una risoluzione canonica.
2. Siccome F è esatto a sinistra abbiamo $R^0F \simeq F$.
3. Se I è iniettivo allora $R^nF(I) = 0$ per ogni $n > 0$. Un oggetto, M, che verifica $R^nF(M) = 0$ per ogni $n > 0$ è detto *aciclico*; in generale esistono oggetti aciclici non iniettivi.

Proposizione 9.19 (successione esatta lunga).

1. *Ad ogni successione esatta corta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ in $\mathcal{C}$ corrisponde una successione esatta lunga in $\mathcal{D}$:*

$$\cdots \to R^nF(M') \to R^nF(M) \to R^nF(M'') \xrightarrow{\delta} R^{n+1}F(M') \to \cdots$$

2. *La successione esatta lunga è funtoriale, cioè ad ogni diagramma*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' & \to & 0 \end{array}$$

corrisponde un diagramma

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \to & R^nF(M') & \to & R^nF(M) & \to & R^nF(M'') & \xrightarrow{\delta} & R^{n+1}F(M') & \to & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \to & R^nF(N') & \to & R^nF(N) & \to & R^nF(N'') & \xrightarrow{\delta} & R^{n+1}F(N') & \to & \cdots \end{array}$$

Dimostrazione. 1. Siano $0 \to M' \to I'^\bullet$, $0 \to M'' \to I''^\bullet$ delle risoluzioni iniettive. Con il Lemma 9.15 si ottiene una successione esatta spezzata di risoluzioni $0 \to I'^\bullet \to I'^\bullet \oplus I''^\bullet \to I''^\bullet \to 0$, siccome F è additivo, la successione $0 \to F(I'^\bullet) \to F(I'^\bullet) \oplus F(I''^\bullet) \to F(I''^\bullet) \to 0$ è esatta; si conclude con la Proposizione 9.11.

2. Esercizio.

Bibliografia

1. Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*
2. Weibel, C.A.: *An introduction to homological algebra*