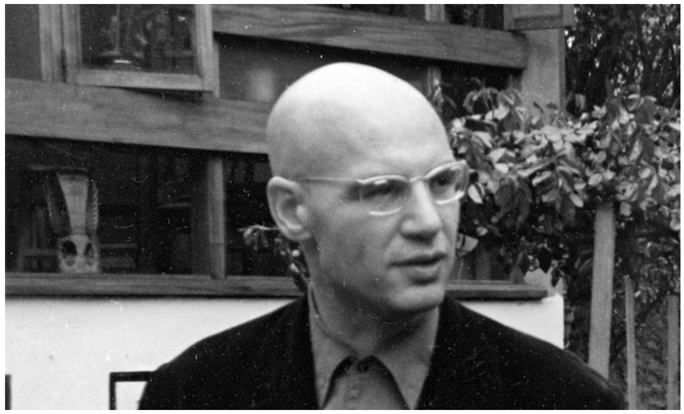
ALEXANDER GROTHENDIECK
(1928-2014)

PH. ELLIA

Indice

Date: February 23, 2015.

1. Introduzione



Questi sono gli appunti (in versione lunga) di una conferenza tenuta per colleghi matematici (non necessariamente geometri) sulla *matematica* di Grothendieck. E' chiaramente *mission impossible* cercare di spiegare in un'ora anche uno solo dei temi trattati da Grothendieck. Mi limiterò a dare una vaga idea, un assaggino. Il lettore esperto non deve quindi stupirsi di certe omissioni (alcune delle quali, sul finale, sono dovute alla mia ignoranza).

Ma prima di iniziare vorrei ricordare alcuni dati biografici (esclusivamente scientifici).

• Grothendieck è nato nel 1928 (a Berlino)

• Dopo avere rivoluzionato l'analisi funzionale (tesi di dottorato nel 1953), nel 1955 cambia argomento e si indirizza verso la topologia algebrica e la geometria.

• I primi lavori: 1) Tohoku (1957) 2) Riemann-Roch relativo (Borel-Serre (1958))

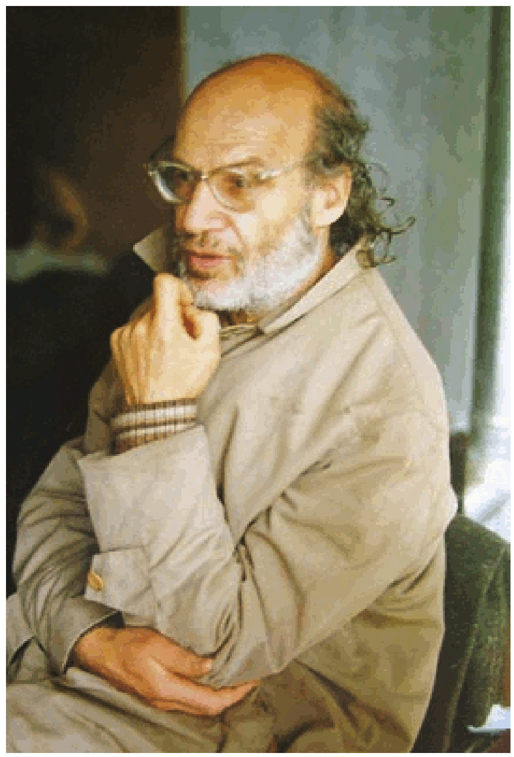
Nel primo lavoro *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J., 119-221 (1957) mette in evidenza un procedimento generale per "derivare, approssimare" un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{T}$. Questo gli permette, tra altre cose, di definire la coomologia dei fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico qualsiasi. Il secondo lavoro è una versione relativa del teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch. Grothendieck era così impegnato con tutte le idee che aveva per la mente che ha lasciato che fossero Borel e Serre a scrivere e pubblicare la dimostrazione. Si tratta di due lavori fondamentali.

• Da fine 1959 al 1970: sono gli anni d'oro dell'IHES. L'IHES (Institut des Hautes Etudes Scientifiques) è un istituto, sul tipo di quello di Princeton, fondato dall'imprenditore Motchane (cari nostri imprenditori, vi stiamo ancora aspettando!). Motchane chiese a Dieudonné di dirigere il settore ”matematica”. Dieudonné accetto alla condizione che ci fosse anche Grothendieck. Bisogna dire che all'epoca Grothendieck era apolide e quindi aveva difficoltà a trovare una posizione accademica in Francia. Avrebbe potuto chiedere la nazionalità francese ma non lo faceva per paura di dovere fare il militare, idea insopportabile per lui. Diventò francese più tardi (1971). In quel periodo Grothendieck ha lavorato giorno e notte, di giorno col Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA), per dimostrare le congetture di Weil, di notte per scrivere, in collaborazione con Dieudonné, gli Elements de Géométrie Algébrique (EGA), per rifondare la geometria algebrica.

(In prima fila, sulla sinistra, si riconosce Dieudonné)

• Nel 1970 Grothendieck dà le dimissioni dall'IHES, per motivi "politici". Dopo qualche anno di turbolenze, prende (1973) una posizione di professore all'università di Montpellier (la sua università da studente).

• Dopodiché silenzio fino al 1983-84 , quando fa circolare due documenti con contenuti matematici *A la poursuite des champs* et *Esquisse d'un programme*. In realtà *Esquisse d'un programme* è il suo programma di ricerca per una domanda al CNRS. La domanda dopo varie polemiche viene accettata, però con una posizione astérisque. Quindi dal 1984 al 1988 al CNRS.



(Verso 1988 ?)

• Dal 1988 in pensione e poi sempre più in ritiro progressivo dal mondo fino al 2014, anno della morte.

Grothendieck stesso ha detto che la parte della sua opera matematica di cui è particolarmente soddisfatto si può riassumere con tre parole (e qualche migliaia di pagine):

(1) Schemi
(2) Topos
(3) Motivi.

In questo seminario parlerò soprattutto della teoria degli schemi. Ma prima di partire con gli schemi rivediamo velocemente la nozione "classica" di varietà algebrica.

2. Geometria classica.

In questa sezione rivediamo velocemente le basi della geometria algebrica "classica" (cioè grosso modo dopo Zariski e prima di Serre). In particolare cercheremo di definire la nozione classica di varietà affine (proiettiva). Come in ogni contesto geometrico (differenziabile, analitico, ecc...) dobbiamo dare uno spazio topologico e dire chi sono le "buone" funzioni (differenziabili, analitiche, ecc...).

Definizione 2.1. *Tutti gli anelli, A, considerati sono commutativi (con unità); $I \subset A$ è un* ideale *se $(I,+)$ è un sotto gruppo e se $b \in I, a \in A \Rightarrow ab \in I$. Con k si indica un campo e con $\mathbb{A}^n_k := k^n$ lo* spazio affine *n-dimensionale su k.*

Definizione 2.2. *Se $I \subset k[x_1, ..., x_n]$ è un ideale, $\mathbb{V}(I) = \{a = (a_1, ..., a_n) \in k^n \mid P(a) = 0, \forall P \in I\}$.*
Un sotto insieme $X \subset k^n$ è algebrico *se $X = \mathbb{V}(I)$ per un qualche ideale $I \subset k[x_1, ..., x_n]$.*

Si ricorda che ogni ideale $I \subset k[x_1, ..., x_n]$ è finitamente generato (teorema della base di Hilbert), quindi un sotto insieme algebrico è l'insieme delle soluzioni di un sistema (di un numero finito) di equazioni polinomiali.

Attenzione! Ideali diversi possono definire lo stesso insieme algebrico.

Per esempio nel piano affine $I = (x)$ e $J = (x^2)$ definiscono entrambi la retta, R, di equazione $x = 0$.

Se noi vogliamo assegnare un ideale a un sotto insieme algebrico, allora prendiamo il più grande ideale che lo definisce.

Definizione 2.3. *Sia X un sotto insieme algebrico,* l'ideale di definizione *di X è $\mathbb{I}(X) = \{P(x_1, ..., x_n) \mid P|X = 0\}$, cioè $\mathbb{I}(X)$ è l'ideale di* <u>*tutti*</u> *i polinomi che si annullano su X.*

Quindi nell'esempio precedente $\mathbb{I}(R) = (x)$.

Un insieme algebrico X è *irriducibile* se non si può scrivere come l'unione di due sotto insiemi algebrici distinti (non vuoti e diversi da X). Si dimostra che X è irriducibile $\Leftrightarrow \mathbb{I}(X)$ è un *ideale primo.*
($I \subset A$ è primo se $ab \in I \Rightarrow a \in I$ o $b \in I$. Questo è equivalente a richiedere che A/I sia un anello integro, cioè $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ o $y = 0$).

Definizione 2.4. *Una* varietà affine *$X \subset k^n$ è un insieme algebrico irriducibile.*

Quindi:

$$\begin{array}{ccl} \{\text{ varietà affini di } \mathbb{A}^n_k\} & \to & \{\text{ideali primi di } k[x_1, ..., x_n]\} \\ X & \to & \mathbb{I}(X) \end{array}$$

Quest'applicazione è iniettiva. E' anche suriettiva? In generale no ($J = (x^2 + 1) \subset \mathbb{R}[x]$ è un ideale primo (anzi massimale), ma $\mathbb{V}(J) = \emptyset$. Siccome $\mathbb{I}(\emptyset) = k[x_1, ..., x_n]$: il vuoto non è una varietà affine).

Se k è algebricamente chiuso (per esempio $k = \mathbb{C}$), il teorema degli zeri di Hilbert ci dice che la corrispondenza varietà affini di $k^n \leftrightarrow$ ideali primi, è biiettiva. Inoltre (**e questo è fondamentale per il seguito**) in questa corrispondenza:

$$\text{ideali massimali} \ \leftrightarrow \ \text{punti di } k^n$$

($I \subset A$ è massimale se A/I è un campo). Un punto $a \in k^n$ è determinato dalle sue coordinate le quali determinano un ideale $\mathfrak{m}_a = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$. L'ideale $\mathfrak{m}_a$ è massimale perché $k[x_1, ...x_n]/\mathfrak{m}_a \simeq k$ (la classe di P modulo $\mathfrak{m}_a$ non è altro che $P(a)$, il valore di P in a).

Per questo motivo e anche perché non vogliamo avere a che fare con varietà vuote, la geometria algebrica classica si svolge su un campo algebricamente chiuso.

Fino alla fine di questa sezione k indica un campo algebricamente chiuso

Si possono svolgere considerazioni analoghe nel proiettivo e definire le sotto varietà proiettive $X \subset \mathbb{P}^n_k$. Ci sono alcune differenze:

-bisogna considerare polinomi omogenei.
-un polinomio omogeneo non definisce una funzione su $\mathbb{P}^n$, ma ha senso chiedersi se è zero o meno in un punto, quindi $\mathbb{V}(P)$ ha senso e quindi anche $\mathbb{V}(I)$ se I è un ideale omogeneo (i.e. generato da polinomi omogenei).
-per avere una funzione su $\mathbb{P}^n$ bisogna considerare P/Q omogenei, dello stesso grado. Ovviamente una tale funzione (*funzione razionale*) non è definita (*regolare*) se $Q(x) = 0$.

Questo ci fa pensare che le funzioni polinomiali (inesistenti, anche localmente, sul proiettivo) non sono le "buone" funzioni, ma che bisognerebbe invece considerare le funzioni razionali *regolari*...

2.1. **La topologia di Zariski.**

In geometria algebrica si usa la *topologia di Zariski*: i chiusi di $\mathbb{A}^n_k$ sono i sotto-insiemi algebrici.

Per esempio sulla retta affine $\mathbb{A}^1_k = k$, gli aperti sono $k, \emptyset$ e i complementari degli insiemi finiti. Quindi:

-due aperti non vuoti s'intersecano sempre (non Hausdorff)
-la retta affine è quasi-compatta (cioè si può sempre estrarre un sotto ricoprimento finito)
-la topologia di Zariski su $\mathbb{A}^2$ non è la topologia prodotto di $\mathbb{A}^1$

Vantaggi: è definita su un campo qualsiasi e rende continue le funzioni regolari.
Inconveniente: gli aperti sono enormi e pochi (questo come vedremo è un bel problema).

2.2. **Le buone funzioni.**

Sia X una varietà algebrica (affine o proiettiva), ci rimane da dire chi sono le "buone funzioni" $U \to k$ per ogni aperto $U \subset X$. Fatto questo un morfismo (algebrico) tra due varietà $\varphi : X \to Y$ sarà un'applicazione continua che trasforma "buone funzioni" in "buone funzioni". Cioè se $\mathcal{O}_X(U)$ è l'insieme delle "buone" (diremo *regolari*) funzioni su $U \subset X$, allora per ogni $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$.

In geometria (differenziabile, analitica) c'è la nozione di *germe di funzione in x*. Per esempio sia X una varietà differenziabile e sia $x \in X$. Sull'insieme delle coppie (U, f), dove U è un intorno aperto di x e dove $f : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile, si definisce $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste $W \subset U \cap V$, $x \in W$, W aperto, tale che $f|W = g|W$. Si mostra che $\sim$ è una relazione d'equivalenza. La classe d'equivalenza di (U, f) è il germe di f in x e si nota f_x. L'insieme dei germi si nota $\mathcal{O}_{X,x}$. Si verifica che $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello. Un germe f_x ha un valore in x. Infatti se (U, f) è un rappresentante di f_x, si pone $f_x(x) := f(x)$, questo non dipendente dalla scelta del rappresentante. Se $f_x(x) = f(x) \neq 0$, allora esiste un intorno V di x tale che $1/f$ sia differenziabile su V. Se $1/f_x$ è la classe di $(V, 1/f)$, allora $f_x.(1/f_x) = 1$. Cioè nell'anello $\mathcal{O}_{X,x}$ un elemento è invertibile se e solo se non appartiene a $\mathfrak{m}_x = \{f_x \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f_x(x) = 0\}$. Si verifica che $\mathfrak{m}_x$ è un ideale. Per un risultato di algebra questo implica che $\mathfrak{m}_x$ è *l'unico ideale massimale* di $\mathcal{O}_{X,x}$. Un anello con un unico ideale massimale è un *anello locale*. Abbiamo $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{R}$ (i valori dei germi).

Quindi ad ogni punto di X abbiamo associato un anello locale, $\mathcal{O}_{X,x}$, l'anello locale dei germi in x di "buone" (differenziabili, analitiche) funzioni.

Vorremo qualcosa di analogo in geometria algebrica. E' chiaro che le funzioni polinomiali non fanno il lavoro: se $P(x) \neq 0$, $1/P$ non è una funzione polinomiale in un intorno di x, ma è una funzione razionale, regolare, in un intorno di x. Questo giustifica la seguente:

Definizione 2.5. *Sia $X \subset k^n$ una varietà affine e sia $U \subset X$ un aperto. Una funzione $f : U \to k$ è regolare in $x \in U$ se esiste un intorno aperto di x, $V \subset U$ e una funzione razionale, P/Q, regolare su V (i.e. $Q(y) \neq 0, \forall y \in V$), tale che $f = P/Q$ su V. La funzione è regolare su U se è regolare in x, $\forall x \in U$.*

Indicheremo con $\mathcal{O}_X(U)$ l'insieme delle funzioni regolari su U.

Nel caso proiettivo abbiamo una definizione analoga, tenendo conto che una funzionale razionale P/Q è il quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado.

Nel caso affine <u>si dimostra</u> che se X è una varietà, allora:

$$\mathcal{O}_X(X) \simeq k[x_1, ..., x_n]/\mathbb{I}(X) =: A(X).$$

Osserviamo che $A(X)$ è l'insieme delle restrizioni a X delle funzioni polinomiali. Alcuni testi prendono questo risultato come punto di partenza, ma è fuorviante.

Stando alla nostra definizione questo risultato può sembrare sorprendente: sia X la retta di equazione $y = 0$ nel piano. Sia $P(x, y) = y - 1$. Il polinomio P non si annulla su X, quindi la funzione razionale $1/P$ è regolare su tutto X e quindi $1/P \in \mathcal{O}_X(X)$. Non sembra che $1/P$ sia la restrizione a X di un polinomio (invece lo è: $1/P|X$ è la funzione costante uguale a -1). Più generalmente sia $X \subset k^n$ una varietà affine e sia P un polinomio tale che $\mathbb{V}(P) \cap X = \emptyset$. Allora $J := \mathbb{I}(X) + (P)$ definisce il vuoto. Quindi (teorema degli zeri) $1 \in J$ e possiamo scrivere $1 = PR + \sum_i F_i R_i$, dove $(F_1, .., F_r) = \mathbb{I}(X)$. Quindi nel campo delle funzioni razionali: $1/P = R + \sum_i (R_i/P)F_i$. Il secondo termine del membro di destra è una funzione razionale che si annulla su X, quindi $1/P|X = R|X$ e $1/P$ è una funzione polinomiale su X.

Se X è una varietà proiettiva abbiamo $\mathcal{O}_X(X) = k$ (è l'analogo del teorema di Liouville: ogni funzione olomorfa su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è costante).

3. Schemi affini.

Tutto questo è molto bello ma:
-Funziona bene solo se k è algebricamente chiuso
-Manca una nozione di varietà algebrica astratta (le nostre varietà sono immerse in k^n o $\mathbb{P}^n_k$).
-Per chi sogna di usare metodi geometrici per problemi aritmetici, lavorare su un campo è una grossa limitatzione, bisognerebbe potere lavorare su un anello qualsiasi ($\mathbb{Z}$ in particolare).

Per il secondo punto, teniamo presente una difficoltà: due curve proiettive, non singolari, in generale non hanno due aperti isomorfi (sarebbero birazionali, quindi isomorfe). Questo viene dal fatto che non c'è in geometria algebrica nessun teorema delle funzioni implicite e quindi nessun teorema di inversione locale. In geometria differenziale due varietà delle stessa dimensione hanno sempre due aperti isomorfi. Quindi non si può procedere come in geometria differenziale, incollando un "modello standard" (aperto di $\mathbb{R}^n$).

Nel 1955 J.P. Serre, seguendo un suggerimento di Henri Cartan, definisce nel suo famoso lavoro FAC (*Faisceaux algébriques cohérents*) una nozione di varietà algebrica *astratta*, ottenuta tramite incollamenti di varietà affini, usando la teoria dei fasci. La teoria però è ancora limitata: funziona bene solo su un campo algebricamente chiuso.

Ci sono stati vari tentativi (Zariski, Weil, Serre, Nagata, Chevalley, Cartier) di definire queste varietà su campi, anelli più generali. Ma ogni volta il risultato non è soddisfacente.

Grothendieck trova la soluzione giusta nella teoria degli schemi *vista* nel 1958 e sviluppata, con l'aiuto di Dieudonné nel periodo (1960-70). Di notte Grothendieck butta giù le note degli EGA (Elements de Géometrie Algébrique), queste note sono poi passate a Dieudonné, che completa le dimostrazioni appena schizzate, verifica i dettagli e scrive. Il risultato (EGA I,...,IV) sono più di 1.600 pagine che rappresentano i fondamenti della nuova geometria algebrica.

Il punto di partenza di Grothendieck è che bisogna considerare tutti gli anelli.

Problema: associare ad ogni anello (commutativo, con unità) A una "varietà algebrica" cioè uno spazio topologico X e definire su X le *buone* funzioni (cioè le funzioni regolari).

3.1. **Lo spazio topologico** $X = Spec(A)$**.**

Bisogna ragionare per analogia, partendo dal caso classico $A = k[x_1, ..., x_n]$. Bisogna quindi vedere gli elementi di A come delle funzioni polinomiali sulla varietà.

I punti della nostra varietà:

Abbiamo visto che un punto a di k^n determina un ideale massimale $\mathfrak{m}_x = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$. (Inoltre se k è algebricamente chiuso abbiamo una corrispondenza perfetta).

Sembra quindi naturale prendere come insieme di punti l'insieme $Spm(A)$ degli ideali massimali di A (è quello che ha fatto Serre).

Ma questo non "passa" ai morfismi ($f^{-1}(\mathfrak{m})$ in generale non è massimale, ma primo; più generalmente la contro immagine di un primo è primo. Per esempio se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ è l'inclusione, (0) è massimale in $\mathbb{Q}$ e $f^{-1}((0)) = (0)$ è primo in $\mathbb{Z}$, non massimale).

Quindi $X = Spec(A) := \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p}$ è un ideale primo$\}$. Adesso bisogna mettere una topologia su X.

Un $f \in A$ ("funzione polinomiale") si annulla nel punto $x = \mathfrak{p} \Leftrightarrow f \in \mathfrak{p}$. Questo è consistente con il caso classico ($P(x) = 0 \Leftrightarrow P \in \mathfrak{m}_x$).

Quindi $f \in A$ determina l'ipersuperficie $\mathbb{V}(f) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid f \in \mathfrak{p}\}$ (è esattamente l'analogo di $\{x \mid f(x) = 0\}$).

Se $I \subset A$ è un ideale, definiamo $\mathbb{V}(I) := \{\mathfrak{p} \mid I \subset \mathfrak{p}\} = \{x = \mathfrak{p} \mid f(x) = 0, \forall f \in I\}$ (analoghi degli insiemi algebrici del caso classico).

Come nel caso classico si vede che i $\mathbb{V}(I)$ sono i chiusi di una topologia, detta *topologia di Zariski* su $Spec(A)$.

Il complementare dell'ipersuperficie $\mathbb{V}(f)$ è $D(f) := \{\mathfrak{p} \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. I $D(f)$ formano una base di aperti al variare di f in A.

3.2. Le funzioni regolari su $X = Spec(A)$.

Adesso bisogna definire le *buone funzioni* (chiamate nel seguito *funzioni regolari*). Indicheremo con $\mathcal{O}_X(U)$ l'insieme delle funzioni regolari sull'aperto $U \subset X$. Dobbiamo quindi specificare $\mathcal{O}_X(U)$ per ogni aperto U (in realtà basta farlo per i $D(f)$).

Queste funzioni dovranno (come ogni funzione che si rispetti) comportarsi bene per restrizione e incollamento. Cioè:

Definizione 3.1. (Restrizione)
Se $V \subset U$ abbiamo un morfismo di restrizione: $r_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ tale che se $W \subset V \subset U$: $r_{VW} \circ r_{UV} = r_{UW}$. Inoltre $r_{UU} = Id$ per ogni aperto U.

Per essere più intuitivi scriveremo $f|V$ al posto di $r_{UV}(f)$. La condizione di incollamento è:

Definizione 3.2. (Incollamento)
Se $U = \cup_i U_i$ e se $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ tali che $f_i|U_i \cap U_j = f_j|U_i \cap U_j$, allora esiste $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tale che $f|U_i = f_i$

La condizione di incollamento dice solo (per delle vere funzioni) che la proprietà $f \in \mathcal{O}_X(U)$ è una *proprietà locale*.

Per esempio $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata}\}$, soddisfa la condizione di restrizione, ma <u>non</u> soddisfa la condizione di incollamento (l'essere limitata non è una proprietà locale).

Se la condizione di restrizione è verificata si dice che $\mathcal{O}_X$ è un **prefascio**, se è verificata anche la condizione di incollamento si dice che $\mathcal{O}_X$ è un **fascio**.

Attenzione: Tutto questo è abbastanza ovvio quando si tratta di "vere" funzioni, ma le stesse considerazioni possono essere svolte in astratto. Per esempio dato uno spazio topologico X se assegniamo ad ogni aperto U un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ con dei morfismi $r_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ che soddisfano le condizioni di restrizioni, abbiamo un *prefascio di gruppi abeliani su X*. Se il prefascio $\mathcal{F}$ soddisfa la condizione d'incollamento, $\mathcal{F}$ è un fascio di gruppi abeliani su X.

Tornando al nostro $X = Spec(A)$, vogliamo che $\mathcal{O}_X$ sia un fascio, cioè che la nozione di *funzione regolare* sia locale.

Vogliamo anche (come in geometria differenziale) che se $f(x) \neq 0$, allora $1/f$ sia *regolare* in un intorno di x (questo ci dirà che l'anello dei *germi di funzioni* in x è un *anello locale*).

Detto ciò cerchiamo di proseguire la nostra analogia tra $Spec(A)$ e il caso classico dove, come abbiamo visto, una funzione è regolare se è localmente una funzione razionale regolare, definita.

Abbiamo identificato $f \in A$ a una funzione polinomiale, quindi una funzione razionale sarebbe un quoziente f/g, $f, g \in A$, una funzione razionale *regolare* in $x = \mathfrak{p}$, un quoziente f/g, con $g \notin \mathfrak{p}$.

C'è un piccolo problema: se A non è integro, non abbiamo una nozione di quoziente (frazione) di elementi di A!

Per fortuna abbiamo un *device*, strumento algebrico che fa al caso nostro: infatti vogliamo invertire gli elementi di A solo "localmente", quindi possiamo considerare il *localizzato* in $\mathfrak{p}$: $A_\mathfrak{p} = \{f/g \mid f, g \in A, g \notin \mathfrak{p}\}$, dove $f/g = h/t \Leftrightarrow$ esiste $s \notin \mathfrak{p}$ tale che $s(ft - gh) = 0$. Si dimostra che $A_\mathfrak{p}$ è un anello locale, d'ideale massimale $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} = \{f/g \mid f \in \mathfrak{p}\}$, il campo quoziente (*campo residuo*) è il campo dei quozienti dell'anello integro $A/\mathfrak{p}$: $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_\mathfrak{p} \simeq K(A/\mathfrak{p})$.

Proseguendo l'analogia, gli elementi di $A_\mathfrak{p}$ sono i germi di funzioni regolari in $x = \mathfrak{p}$, cioè $\mathcal{O}_{X,x} = A_\mathfrak{p}$ e una funzione regolare su un aperto U si ottiene "incollando" i germi, cioè $s \in \mathcal{O}_X(U)$ è un'applicazione $U \to \sqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}$, tale che per ogni $x \in U$, esista un intorno aperto V di x in U e $f, g \in A$, $g \notin \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in V$, tali che $s = f/g$ su V (cioè $s(\mathfrak{p}) = f/g \in A_\mathfrak{p}$, $\forall \mathfrak{p} \in V$). Abbiamo esattamente ricalcato il caso classico.

Risulta che $\mathcal{O}_X(D(f)) = \{g/f^n \mid n \in \mathbb{N}, g \in A\}$, dove $g/f^n = h/f^m \Leftrightarrow$ esiste $s \in \mathbb{N}$ tale che $f^s(gf^m - hf^n) = 0$; cioè $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ (il localizzato rispetto a $S = \{f^n\}$). Nell'analogia col caso classico gli elementi di $\mathcal{O}_X(D(f))$ sono le funzioni razionali *regolari* su tutto $D(f)$.

In particolare:

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(D(1)) = A$$

Si <u>dimostra</u> che l'assegnazione $U \to \mathcal{O}_X(U)$ (con le frecce di restrizione evidenti) definisce un fascio di gruppi abeliani, anzi un fascio di anelli. Inoltre le spighe $\mathcal{O}_{X,x}$ sono anelli locali. Si dice che $(X = Spec(A), \mathcal{O}_X)$ è uno spazio *localmente anellato* (cioè X è uno spazio topologico, $\mathcal{O}_X$ è un fascio di anelli (anellato) le cui spighe sono anelli locali (localmente)). Le nostre "funzioni", come vedremo, non sono vere funzioni, ma il fatto che costituiscono un fascio ci garantisce che formalmente si comportano bene.

Definizione 3.3. (Schemi affini)
Uno schema affine è uno spazio localmente anellato, isomorfo (come spazio localmente anellato) a un $(X = Spec(A), \mathcal{O}_X)$ *per un qualche anello* A.

Questo significa sostanzialmente che uno schema affine è un $(X = Spec(A), \mathcal{O}_X)$ per un qualche anello A.

E' importante ricordarsi che uno schema affine è una coppia costituita da uno spazio topologico X e di un fascio "di funzioni" $\mathcal{O}_X$. Nella letteratura si indica spesso con X lo schema e si indica con $|X|$ lo spazio topologico sotto giacente (cioè $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$). Un morfismo tra due schemi affini $X \to Y$ è una coppia $(f, f^\#)$, dove $f : |X| \to |Y|$ è un'applicazione continua e dove $f^\#$ è un morfismo tra fasci che ci dice come trasformare funzioni regolari su Y in funzioni regolari su X (tralascio i dettagli tecnici).

Se $\varphi : A \to B$ è un morfismo tra due anelli, si può dimostrare che φ induce un morfismo di schemi $Spec(B) \to Spec(A)$. Viceversa ogni morfismo $Spec(B) \to Spec(A)$ proviene da un morfismo d'anelli: $A \to B$. Segue che:

la categoria degli schemi affini è equivalente alla categoria (opposta) degli anelli commutativi.

Slurp! La geometria algebrica si è mangiata l'algebra commutativa!

4. Schemi, esempi.

Passiamo adesso alla definizione generale:

Definizione 4.1. (Schemi)
Uno schema è uno spazio localmente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ *tale che per ogni* $x \in X$ *esista un intorno aperto* U *di* x *tale che* $(U, \mathcal{O}_X|U)$ *sia uno schema affine.*

Quindi uno schema si ottiene "incollando" schemi affini. Per la nostra colla, la nozione di fascio è essenziale (come nel caso di Serre).

Gli schemi sono oggetti strani:

• Se $A = k$ è un campo, $Spec(k)$ ha un punto solo (l'unico ideale primo di k è (0)). Tutti i campi danno lo stesso spazio topologico $\{*\}$. Si ritrova il campo con il fascio di funzioni $\mathcal{O}_X(X) = k$. ("Nuovo" concetto di punto!)

• I punti non sono necessariamente chiusi! Sia $X = Spec(A)$. Se $x = \mathfrak{p}$ è un ideale primo non massimale $\overline{\{x\}} = \mathbb{V}(\mathfrak{p})$ (se $f(x, y) \in k[x, y]$ è un polinomio irriducibile, l'ideale $\mathfrak{p} = (f)$ è primo; i punti di $\mathbb{V}((f))$ sono gli ideali massimali $\mathfrak{m}_a = (x - a_1, y - a_2)$ dove $f(a_1, a_2) = 0$ (punti chiusi) e il punto $\xi := \mathfrak{p}$ la cui chiusura è tutta la curva C di equazione $f = 0$; ξ è il punto generico di C)

Più generalmente se A è integro, $\xi = (0)$ è primo e $\overline{\{\xi\}} = \mathbb{V}((0)) = \{\mathfrak{p} \mid (0) \subset \mathfrak{p}\} = Spec(A)$, abbiamo un punto la cui chiusura è tutto lo spazio!

• Le funzioni $f \in A$ non sono vere funzioni: prendono i loro valori in campi variabili.

Il valore di f nel punto $x = \mathfrak{p}$ di $Spec(A)$ è la classe di f nel *campo residuo* $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = K(A/\mathfrak{p})$.

Se $A = \mathbb{Z}$, gli ideali primi sono (p) (p numero primo) e (0). Abbiamo $\kappa(x) = \mathbb{F}_p$, mentre $\kappa(\xi) = \mathbb{Q}$ ($\xi = (0)$ punto generico).

Nel caso classico $A = k[x_1, ..., x_n]$, $\overline{k} = k$, considerando solo punti chiusi (quindi ideali massimali) $\kappa(x) \simeq k$, per ogni x.

• Sia $A = k[x]/(x^2)$, $X = Spec(A)$. Sia f la classe di x, allora f è una funzione nilpotente su X: $f \neq 0$ ma $f^2 = 0$.

L'esistenza di elementi nilpotenti è stata una delle cose che ha più scandalizzato all'inizio, ma come vedremo è essenziale considerare elementi nilpotenti (anche per la geometria classica!).

• L'anello $S = k[x_0, ..., x_n]$ è un anello graduato, cioè $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$, dove S_n è lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado n. Sia $Proj(S)$ l'insieme degli ideali primi, omogenei, che non contengono $(x_0, ..., x_n)$. Allora è possibile (in analogia col caso classico) definire una struttura di schema su $Proj(S)$. Per ovvi motivi si nota $Proj(S) = \mathbb{P}^n_k$ (n-spazio proiettivo su k). E' uno schema che non è affine. In modo analogo se A è un anello, si pone $S = A[x_0, ..., x_n]$ e $Proj(S) = \mathbb{P}^n_A$ (n-spazio proiettivo su A). Abbiamo quindi la nozione di spazio proiettivo su un anello!

5. L'approccio di Grothendieck.

Ci sarebbe tanto da dire ma mi fermerò qua. Finora abbiamo definito una classe di oggetti matematici. Ora si tratta di dimostrare qualche teorema!

Vista la vastità dell'argomento è difficile capire da dove iniziare. L'approccio di Grothendieck è molto singolare (categoriale), tipico del suo modo di fare matematica:

-sono più importanti i morfismi degli oggetti

-le costruzioni devono essere relative e funtoriali.

Quindi Grothendieck studia gli schemi su S (S uno schema non meglio specificato): $\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ S \end{array}$, il morfismo f è il morfismo strutturale. Osservare che ogni schema è un $Spec(\mathbb{Z})$ schema (perché per ogni anello A c'è un unico morfismo $\mathbb{Z} \to A : n \to n.1_A$).

5.1. **Prodotti.**

Per prima cosa Grothendieck mostra che esiste un prodotto nella categoria Sch/S degli schemi su S (o S-schemi).

Se X, Y sono due S-schemi, allora esiste un S-schema, notato $X \times_S Y$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & S \end{array}$$

Attenzione: L'insieme $X \times_S Y$ NON è necessariamente il prodotto (fibrato) degli insiemi X, Y ($X \times_S Y$ può anche essere vuoto!). Ma si tratta di un prodotto nel senso categorico.

Per questo si tratta prima il caso affine. Sia $S = Spec(A)$, $X = Spec(B)$. Il morfismo strutturale $X \to S$ corrisponde a un morfismo $A \stackrel{\varphi}{\to} B$ e quindi B è una A-algebra ($A \times B \to B : (a, b) \to b.\varphi(a)$). Sia $Y = Spec(C)$ un altro S-schema affine, allora $X \times_S Y = Spec(B \otimes_A C)$.

Nel caso generale, con un bel po' di pazienza e un bel tubo di colla, si ricopre X, Y, S con aperti affini, si fanno i prodotti parziali e si rincolla tutto (funziona).

Il prodotto è un prodotto nel senso delle categorie ($Hom_S(T, X \times_S Y) = Hom_S(T, X) \times Hom_S(T, Y)$, per ogni S-schema T).

5.2. **Cambiamento di base.**

Sia

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow \\ S' & \to & S \end{array}$$

Vogliamo fare corrispondere al S-schema X un S'-schema X':

Si prende $X' = X \times_S S'$ (X e S' sono entrambi degli S-schemi). Abbiamo

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \to & S \end{array}$$

Si nota anche $X' = X_{S'}$.

Si dice che $X_{S'}$ è stato ottenuto da X per *cambiamento di base*.

Otteniamo così un funtore $Sch/S \to Sch/S'$.

Un esempio tipico dell'utilità di questa nozione:

Sia $k \subset k'$ un'estensione di campi (per esempio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$). Abbiamo quindi $Spec(k') \to Spec(k)$: ad ogni k-schema possiamo associare un k'-schema (estensione degli scalari).

Adesso si capisce il perché del nome *schema*:

Da uno schema, X, su $\mathbb{Z}$, per cambiamenti di base ($S \to Spec(\mathbb{Z})$) si ottengono tanti schemi X_S: l'X iniziale è lo schema (schemino, scheletro) di questi schemi.

Grothendieck inizia poi a studiare le proprietà dei morfismi che sono conservate per cambiamento di base (*problèmes de montée*, studierà poi i *problèmes de descente*, più difficili).

5.3. **Piattezza.**

Tra le proprietà conservate per cambiamento di base, Grothendieck individua la nozione di *morfismo piatto*.

Si ricorda che un A-modulo M è piatto se il funtore $- \otimes_A M$ è esatto (il prodotto tensoriale è sempre esatto a destra, ma non sempre a sinistra).

Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è piatto nel punto $x \in X$ se $\mathcal{O}_{X,x}$ è un $\mathcal{O}_{Y,y}$-modulo piatto, dove $y = f(x)$; il morfismo è piatto se è piatto in ogni $x \in X$.

La nozione di piattezza, anche se astrusa, è la nozione giusta per avere una buona definizione di *famiglia di varietà algebriche* e una buona teoria delle deformazioni.

Usando la nozione di piattezza (e il concetto di funtore rappresentabile), Grothendieck dimostra l'esistenza dello schema di Hilbert. Senza entrare troppo nei dettagli, facciamo un esempio semplice intuitivo: esiste uno schema proiettivo, $H(d, g)$, che parametrizza *bene* le curve $C \subset \mathbb{P}^3$, di grado d e genere g, fissati.

Ma il risultato è molto più generale: al posto di $\mathbb{P}^3$ si può prendere uno schema proiettivo qualsiasi e al posto delle curve, dei sotto schemi con vari invarianti fissati (polinomio di Hilbert fissato).

Nel suo famoso lavoro *Further pathologies in algebraic geometry* (Am. J. of Math, 1962), Mumford ha mostrato che in $\mathbb{P}^3$ lo schema $H(14, 24)$ è *non* *ridotto* (ha dei nilpotenti dappertutto), questo significa che non esiste nessuna varietà che parametrizza "bene" le curve lisce di grado 14, genere 24 in $\mathbb{P}^3$: servono proprio gli schemi, anche per problemi di *geometria classica*.

L'esempio di Mumford è stato generalizzato da vari autori. Oggi sappiamo che esistono tante componenti non ridotte dello schema di Hilbert. Anzi per quanto riguarda le patologie vale la legge di Murphy: il peggio che potrebbe accadere, accade veramente!

L'esistenza dello schema di Hilbert è solo uno tra i tanti risultati dimostrati da Grothendieck in geometria algebrica (=teoria degli schemi).

6. Topos

Sì lo so il plurale di topo è topoi, ma qui lo diciamo alla Grothendieck.

6.1. Le congetture di Weil.

Le congetture di Weil collegano in qualche modo proprietà topologiche e aritmetiche di varietà definite su un campo finito.

Sia $f(x,y,z) \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ un polinomio omogeneo che definisce una curva liscia in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Siccome i coefficienti sono in $\mathbb{Z}$, possiamo considerare, f_p, il polinomio modulo p. Otteniamo una curva, C, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$. Per ogni $q = p^r$ sia n_r il numero di punti su $\mathbb{F}_q$.

Si pone $Z(C;t) = exp(\sum_{r=1}^{\infty} n_r \dfrac{t^r}{r}) \in \mathbb{Q}[[t]]$. (Abbiamo $\frac{d}{dt} log Z(C;t) = \sum_{m \geq 1} n_r t^{r-1}$).

Si definisce $Z(X;t)$ in modo analogo per uno schema X (di dimensione > 1, non necessariamente proveniente da uno schema su $\mathbb{C}$).

Le congetture di Weil sono:

(W1) $Z(X;t)$ è una funzione razionale di t

(W2) $Z(X;t)$ verifica un'equazione funzionale

(W3) $Z(X;t) = \dfrac{P_1(t)P_3(t)...P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)...P_{2n}(t)}$, $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$; $P_i(t) = \prod(1-\alpha_{ij}t)$, dove i α_{ij} sono dei numeri algebrici con $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$ (*ipotesi di Riemann*)

(W4) Se X proviene da una varietà su $\mathbb{C}$, il grado di P_i è $h^i(C_{an}, \mathbb{Z})$

Weil ha dimostrato le sue congetture nel caso delle curve.

Era ben noto da Weil (forse) e da Serre (sicuramente) che per dimostrare le congetture in generale, bastava avere una "buona" teoria coomologica, *a* *coefficienti in un campo di caratteristica zero*, per le varietà (schemi) definite su un campo finito. Si sapeva anche che il campo di caratteristica zero non poteva essere $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Prima di andare avanti, cerchiamo di dare una rapida idea della coomologia.

6.2. **Coomologia.**

Abbiamo visto che l'assegnazione $U \to \mathcal{F}(U)$, dove $\mathcal{F}(U)$ è un gruppo abeliano, definisce (modulo le condizioni di restrizione, incollamento) un (pre)-fascio $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani sullo spazio topologico X.

Un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tra due (pre)fasci consiste nel darsi per ogni U un morfismo di gruppi $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, questi morfismi devono essere compatibili con le restrizioni.

Quindi come per i gruppi abeliani si può considerare delle successioni esatte: $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$. In particolare se $U = X$ abbiamo: $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X)$ ma l'ultima freccia, in generale, non è suriettiva.

La coomologia serve a misurare questo difetto di suriettività, più precisamente si tratta di definire dei gruppi di coomologia $H^i(X, \mathcal{F})$ di modo da potere continuare la successione esatta:

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H}) \to ...$$

$$... \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{G}) \to H^i(X, \mathcal{H}) \to ...$$

Usando metodi di topologia algebrica si definisce per esempio, su spazi topologici con certe proprietà, la coomologia di Čech.

Uno dei primi lavori di Grothendieck (Tohoku 1956) è stato di definire, in modo funtoriale, una coomologia dei fasci per X spazio topologico qualsiasi (teoria dei funtori derivati). Questa coomologia coincide con quella di Čech se X è uno spazio topologico appena decente. In realtà Grothendieck mostra qualcosa di più generale: un funtore da una categoria $\mathcal{C}$ in Ab, può essere *derivato*, approssimato da *funtori derivati* dal momento che $\mathcal{C}$ è una categoria abeliana con abbastanza iniettivi (sono condizioni tecniche da verificare una volta per tutte).

6.3. **Il sito étale.**

Il problema è che se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo su una varietà (schema) proiettivo su un campo k, allora $H^i(X, \mathcal{F})$ è un k-spazio vettoriale. Nel nostro caso abbiamo quindi una coomologia a coefficienti in un campo di caratteristica p: non va bene.

E' assistendo ad una conferenza di Serre al seminario Chevalley che Grothendieck ha l'idea chiave: per definire una buona coomologia servono più aperti, quindi bisogna rimpiazzare lo schema X con tutti i suoi aperti *per aria*, cioè bisogna considerare tutti i morfismi étale $U \to X$ (rivestimenti non ramificati).

Ma Grothendieck è il genio della generalizzazione. Quindi parte in una vasta teoria (quella dei topos appunto) ben più generale di quello che serve. L'idea di base è che per definire una coomologia non c'è bisogno di avere lo spazio topologico X, ma bastano i suoi aperti, i ricoprimenti aperti.

I ricoprimenti aperti in topologia soddisfano le seguenti proprietà:
1) l'identità $U \to U$ è un ricoprimento di U
2) Se $(U_i \to U)_{i\in I}$ è un ricoprimento di U e se per ogni i, $(V_{ji} \to U_i)$ è un ricoprimento, allora $(V_{ji} \to U_i \to U)$ è un ricoprimento di U
3) Se $(U_i \to U)$ è un ricoprimento e se $V \subset U$, allora $(U_i \cap V \to V)$ è un ricoprimento.

(Qui le frecce sono inclusioni.)

Si tratta adesso di definire una *topologia di Grothendieck* su una categoria $\mathcal{C}$. Grosso modo questo consiste nel darsi per ogni oggetto U, un insieme, $Cov(U)$, di "ricoprimenti" ("familles couvrantes") $(U_i \to U)_{i\in I}$ che soddisfano 1),..., 3) .

La condizione 3) va modificata in: Se $V \to U$ è una freccia e se $(U_i \to U)$ è in $Cov(U)$, allora $(V \times_U U_i \to V)$ è in $Cov(V)$ (ci vogliono i prodotti in $\mathcal{C}$).

Definizione 6.1. (Sito)
Un sito, T, è una categoria $\mathcal{C}$ con una topologia di Grothendieck.

Definizione 6.2. (Prefasci e fasci su un sito)
Un prefascio (di gruppi abeliani) sul sito T è un funtore contravariante da $\mathcal{C}$ in Ab.

Un fascio su T è un prefascio che verifica la condizione di incollamento.

Un prefascio NON dipende dalla topologia (di Grothendieck), ma un fascio sì.

Esempi: • X spazio topologico, $\mathcal{C}$ la categoria degli aperti (le frecce sono le inclusioni). La topologia di Grothendieck è data dai ricoprimenti aperti. Abbiamo un sito. Se X è uno schema con la topologia di Zariski, si dice che $T = X_{Zar}$ è il *sito di Zariski su* X. Un (pre)fascio su X_{Zar} è un (pre)fascio nel senso usuale.

• $\mathcal{C} = Et/X$, gli oggetti sono $U \to X$ morfismo étale di schemi. Le frecce sono i morfismi su X.

La topologia è data da $(U_i \xrightarrow{f_i} U)$ morfismi étales con $\cup f_i(U_i) = U$.

Questo è il *sito étale* di X: $T = X_{et}$. Ogni fascio (di $\mathcal{O}_X$-moduli), $\mathcal{F}$, definisce un fascio su X_{et} (essenzialmente dato da $f^*(\mathcal{F})$ dove $f : U \to X$).

Definizione 6.3. (Topo)
Un topo è una categoria equivalente alla categoria dei fasci su un sito.

La nozione di topo non è indispensabile per le congetture di Weil (ma Grothendieck diceva che era l'ambito naturale nel quale lavorare).

Adesso si procede così:
1) La categoria dei fasci su X_{et} (il topo étale su X) è una categoria abeliana, con abbastanza iniettivi. Quindi per Tohoku, possiamo derivare il funtore sezioni globali $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(X)$ e ottenere la *coomologia étale* $H^i(X_{et}, -)$.

2) Non è ancora la buona coomologia, la buona coomologia è la *coomologia l-adica* (l un primo):

$$H^i(X, \mathbb{Q}_l) := (\lim_{\leftarrow} H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

Qui $\mathbb{Z}_l$ è l'anello degli interi l-adici e $\mathbb{Q}_l$ è il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}_l$. Siccome $H^i(X, \mathbb{Q}_l)$ è un $\mathbb{Q}_l$-spazio vettoriale, abbiamo una coomologia a coefficienti in un campo di caratteristica zero! (bisogna che $l \neq char(X)$).

Con questa coomologia Grothendieck riesce a dimostrare le congetture di Weil, tranne "l'ipotesi di Riemann".

Bisogna dire, per completezza, che già nel 1959, Dwork aveva dimostrato la razionalità della funzione $Z(X, t)$, in tutta generalità, con metodi di analisi p-adica (quindi non è sorprendente (?) che il campo cercato sia $\mathbb{Q}_l$).

6.4. Le congetture standard e la fine della storia.

Grothendieck non riesce a dimostrare "l'ipotesi di Riemann". Formula invece delle congetture che chiama (ottimisticamente) le *congetture standard*. Le congetture standard implicano le congetture di Weil.

Per Grothendieck, ormai un po' stanco, questa è la fine della storia: qualcuno (uno dei suoi allievi, Deligne?), continuerà la sua opera e dimostrerà le congetture standard e il cerchio sarà chiuso.

Le cose non sono andate così. Nel 1973 Deligne conclude la dimostrazione delle congetture di Weil, senza dimostrare le congetture standard, ma "sporcandosi" le mani con la coomologia l-adica. Per Grothendieck è una delusione.

Le congetture standard sono ancora (largamente) aperte.

6.5. **Topos e logica.**

Come sappiamo la matematica ha le sue fondamenta nella teoria degli insiemi.

Dal punto di vista delle categorie, la categoria degli insiemi è una fra tante. E' quindi lecito a questo punto chiedersi cosa ha di tanto speciale. La domanda è naturale anche perché i logici (ma non solo) pensano di "basare" la matematica, non più sulla teoria degli insiemi, ma sulla teoria delle categorie (si cerca una formulazione categoriale (categorica?) della teoria degli insiemi). In realtà non esiste <u>una</u> teoria degli insiemi, ne esistono varie (Gődel, Coen). Quindi non c'è una categoria degli insiemi ma vari *modelli* (non equivalenti) della teoria degli insiemi. Sembrerebbe che i topos siano quelle categorie in grado di "spiegare" questi vari modelli della teoria degli insiemi.

Per i logici che si occupano di queste questioni la teoria dei fasci e i lavori di Grothendieck sono strumenti fondamentali.

Ecco perché Grothendieck diceva che si trattava dell'ambito naturale nel quale lavorare!

Quindi Grothendieck ci ha fatto fare geometria su un anello qualsiasi e poi anche sulle categorie!

7. Motivi

La teoria dei motivi è ancora un *work in progress*, una teoria ancora da definire. Quindi ne dirò ben poco. L'idea o piuttosto la speranza è di *unificare*, capire (il vero motivo) delle varie teorie coomologiche. Come abbiamo visto per ogni primo $l \neq char(X)$, abbiamo una "buona" coomologia l-adica per X (se $l = char(X)$, abbiamo la coomologia cristallina), senza parlare delle coomologie "classiche". Tutte queste coomologie devono venire da un'unica coomolgia, da un unico fatto. La speranza è quindi di trovare una teoria generale attraverso la quale ogni coomologia "fattorizzi".

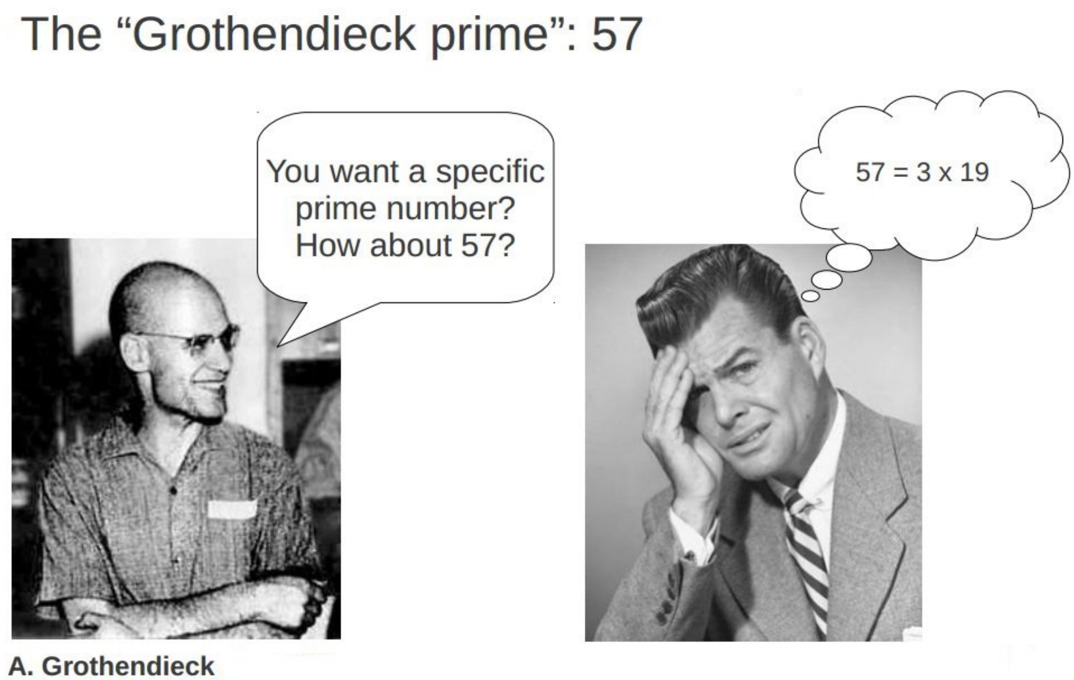
Sembra che la scuola russa (Voevodsky, Manin ed altri) in particolare abbia dato contributi significativi in merito.

8. Conclusione.

Questo seminario non rende certo giustizia all'opera matematica di Grothendieck. Si tratta di un lavoro poderoso, da visionario, che ha rivoluzionato la matematica e cambiato il modo di pensarla. Le ricadute sono innumerevoli. Tra queste, per esempio, il teorema di Faltings (ex congettura di Mordell) e quello di Wiles (ex congettura di Fermat), due teoremi che sembravano fuori portata. Entrambe le dimostrazioni usano pesantemente la teoria degli schemi.

Il fenomeno Grothendieck (almeno come l'abbiamo conosciuto) è stato possibile anche grazie a Serre e Dieudonné. La corrispondenza Serre-Grothendieck ([1]) testimonia della ricchezza dello scambio scientifico tra i due. A questo va aggiunto che l'ambiente matematico francese dell'epoca era in un periodo d'oro, anche grazie allo spirito "Bourbaki" (Weil, Cartan, Dieudonné, membri fondatori, e poi Serre, Grothendieck, ma distrattamente, e tanti altri).

Stando alle testimonianze quello che colpiva di più in Grothendieck era la sua grande energia e la sua ingenuità, sia in matematica che nella vita di tutti i giorni. Grothendieck era completamente preso dalle sue "visioni", dal suo mondo matematico, ignorando, certe volte, alcuni fatti di base. Serre, per esempio, lamentava la sua totale ignoranza della geometria algebrica classica. In una conferenza (immagino sulla coomologia l-adica), con numeri primi che sbucavano da tutte le parti, a un certo punto qualcuno del pubblico, visibilmente perso, chiese: *Potrebbe fare un esempio con un numero primo specifico, in carne e ossa?* Grothendieck, che non era per niente sprezzante, sempre pronto a spiegare e rispiegare, rispose: *Sì, va bene, allora prendiamo* $p = 57$.



Per notizie biografiche vedere [3] e le referenze incluse. Per maggior informazioni consultare la pagina (francese) di Wikipedia dedicata a Grothendieck.

Il testo di referenza per iniziare la geometria algebrica è [2], [1] è interessante sia da un punto di vista scientifico che storico.

Bibliografia

[1] Colmez, P.-Serre, J.P.: *Correspondance Grothendieck-Serre*, SMF (2001); AMS-SMF (2004), bilingual edition

[2] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*, GTM 52 (1977)

[3] Jackson, A.: *Comme appelé du néant: as if summoned from the void. The life of Alexandre Grothendieck.*, Notices of the American Math. Soc., vol. 51, n°4, 1038-1056 (2004) , vol. 51, n°10, 1196-1212, (2004)

Dipartimento di Matematica, 35 via Machiavelli, 44100 Ferrara
E-mail address: phe@unife.it