Geometria I. Esercizi svolti.

Alcuni esercizi svolti dal mio libro "Appunti di Geometria I" (Pitagora Editore).

Es. 1.5, p. 64.

Siano F, H due sotto spazi vettoriali del k-spazio vettoriale E. Se $H \subset F$, allora $F \cup H = F$ e quindi $F \cup H$ è un s.s.v. (sotto spazio vettoriale) di E. Avendo in mente l'esempio 7.1, p. 59 viene da pensare che questa sia l'unica situazione in cui $F \cup H$ sia un s.s.v. Proviamo quindi a dimostrare:

$$F \cup H \text{ è un s.s.v.} \Leftrightarrow F \subset H \text{ o } H \subset F.$$

Abbiamo già fatto l'implicazione ($\Leftarrow$), rimane da mostrare l'altra:

$$F \cup H \text{ è un s.s.v.} \Rightarrow F \subset H \text{ o } H \subset F.$$

Siccome non ci viene niente in mente, proviamo con la contrapposta:

$$F \not\subset H \text{ e } H \not\subset F \Rightarrow F \cup H \text{ non è un s.s.v.}$$

Bisogna sfruttare l'ipotesi $F \not\subset H$ e $H \not\subset F$.

Abbiamo $F \not\subset H$ se e solo se esiste $f \in F$ tale che $f \notin H$. In modo analogo $H \not\subset F \Leftrightarrow \exists h \in H$ tale che $h \notin F$.

Bene, cosa possiamo fare con f e h?

Pensando sempre all'esempio 7.1, p.59, proviamo a mostrare che $f + h \notin F \cup H$.

Abbiamo: $f + h \in F \cup H \Leftrightarrow f + h \in F$ o $f + h \in H$.

Se $f + h \in F$, allora $f + h = f', f' \in F$ e quindi $h = f' - f$. Siccome F è un s.s.v. $f' - f \in F$. Quindi $h \in F$, ma questo non è possibile perché, per costruzione, $h \notin F$.

Nello stesso modo si mostra che $f + h \notin H$.

Quindi $f + h \notin F \cup H$ e $F \cup H$ non è un s.s.v. $\square$

Es. 2.4, p. 68.

Sia $f : E \to F$ un'applicazione lineare, biiettiva tra i due k spazi vettoriali, E, F. Si tratta di vedere che $f^{-1} : F \to E$ è lineare.

Bisogna quindi mostrare che $\forall u, u' \in F$, $\forall \alpha, \beta \in k$, $f^{-1}(\alpha u + \beta u') = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(u')$.

Bisogna sfruttare l'ipotesi che f è biiettiva e lineare.

Siccome f è biiettiva, quindi suriettiva, esiste $e \in E$ tale che $f(e) = u$. Nello stesso modo esiste $e' \in E$ tale che $f(e') = u'$. Inoltre essendo f biiettiva abbiamo $e = f^{-1}(u), e' = f^{-1}(u')$.

Proviamo a calcolare $f^{-1}(\alpha u + \beta u')$. Abbiamo

$f^{-1}(\alpha u + \beta u') = f^{-1}(\alpha f(e) + \beta f(e'))$

Bisogna usare la linearità di f!

$f^{-1}(\alpha u + \beta u') = f^{-1}(\alpha f(e) + \beta f(e')) = f^{-1}(f(\alpha e + \beta e'))$ (linearità di f)

$= \alpha e + \beta e' = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(u')$. Quindi f^{-1} è lineare $\square$

Es. 3.2, p. 70.

Abbiamo visto a lezione che se k è un campo, lo spazio vettoriale $k[x]$ non è finitamente generato. Ricordiamo velocemente come funziona. Se $k[x] = \langle P_1(x), ..., P_n(x) \rangle$, allora ogni polinomio $Q(x) \in k[x]$ si scrive come una combinazione lineare di $P_1(x), ..., P_n(x)$: $Q(x) = \lambda_1 P_1(x) + \cdots \lambda_n P_n(x)$. Sia $m = max\{\deg(P_1(x)), ..., \deg(P_n(x)\}$ ($\deg(P(x))$ è il grado di $P(x)$; degree = grado). Allora ogni combinazione lineare di $P_1(x), ..., P_n(x)$ ha grado $\leq m$.

Quindi se $\deg(Q(x)) > m$, (per esempio $Q(x) = x^{m+1}$), $Q(x)$ non è combinazione lineare dei $P_i(x)$. Pertanto $k[x]$ non può essere generato da un numero finito di vettori.

Siano X, Y due insiemi finiti, con $card(X) = x, card(Y) = y$. Allora l'insieme delle applicazioni da X in Y, $App(X, Y)$, è un insieme finito di cardinalità y^x. Infatti per ogni $b \in X$ ci sono y possibilità di assegnare un valore a b. Quindi ci sono $y.y....y$ (x fattori) possibilità di definire un'applicazione da X in Y.

Pertanto $\#(App(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = 4$. Segue che, essendo finito, $A := App(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ è finitamente generato (da i suoi elementi).

Per completezza entriamo nei dettagli. Abbiamo $A = \{f, Id, O, h\}$, dove $f(0) = 1, f(1) = 0$, Id è l'identità, $O(0) = O(1) = 0$ (applicazione nulla), $h(0) = h(1) = 1$. Il $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ spazio vettoriale A è generato da f e Id. Infatti $h = f + Id$ $\square$

Es. 4.11, p. 84.

Sia $V \subset \mathbb{C}^3$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0, 2x + iy - z = 0\}$. Si tratta di mostrare che V è un s.s.v. (sotto spazio vettoriale) di $\mathbb{C}^3$.

Primo metodo: Applichiamo la definizione, dobbiamo verificare: a) $0 \in V$, b) $\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha u + \beta v \in V$.

a) Se $x = y = z = 0$ è chiaro che le due equazioni sono soddisfatte, quindi $0 = (0, 0, 0) \in V$.

b) Poniamo $u = (x, y, z), v = (x', y', z')$, allora $\alpha u + \beta v = (X = \alpha x + \beta x', Y = \alpha y + \beta y', Z = \alpha z + \beta z')$. Per la prima equazione dobbiamo verificare $X + Y + Z = 0$, ossia $\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z' = 0$. Abbiamo $\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z' = \alpha(x + y + z) + \beta(x' + y' + z')$. Per ipotesi $x + y + z = 0 = x' + y' + z'$, quindi $X + Y + Z = 0$.

Per la seconda equazione dobbiamo verificare $2X + iY - Z = 0$, ossia $2(\alpha x + \beta x') + i(\alpha y + \beta y') - (\alpha z + \beta z') = 0$. Abbiamo $2(\alpha x+\beta x')+i(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z') = \alpha(2x+iy-z)+\beta(2x'+iy'-z')$. Per ipotesi $2x+iy-z = 0 = 2x'+iy'-z'$, quindi $2X + iY - Z = 0$.

Questo dimostra $\alpha u + \beta v \in V$, quindi b) è verificato e V è un s.s.v.

Secondo metodo: Consideriamo $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 : (x, y, z) \to (x + y + z, 2x + iy - z)$. L'applicazione f è lineare perché definita da polinomi omogenei del primo grado nelle coordinate x, y, z. Abbiamo $V = Ker(f)$, quindi V è un s.s.v.

Il secondo metodo è nettamente più veloce ed elegante!

Si tratta adesso di determinare la dimensione di V. Per questo bisogna trovare una base di V e quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + iy - z = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni otteniamo $x = \frac{-(1+i)}{3}y$. Inserendo nella prima equazione $z = \frac{i-2}{3}y$. Quindi tutte le soluzione del sistema sono della forma $(\frac{-(1+i)}{3}y, y, \frac{i-2}{3}y) = y(\frac{-(1+i)}{3}, 1, \frac{i-2}{3})$, $y \in \mathbb{C}$. Quindi V è l'insieme dei multipli del vettore $w := (\frac{-(1+i)}{3}, 1, \frac{i-2}{3})$, cioè (w) è una base di V e $\dim(V) = 1$. $\square$

Es. 4.14, p. 84.

(i) Sia $\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n = 0$, dobbiamo mostrare che necessariamente $\alpha_i = 0, \forall i$. Siccome $x_i = x'_i + x''_i$, abbiamo $\alpha_1(x'_1 + x''_1) + \cdots + \alpha_n(x'_n + x''_n) = 0$ $(*)$. Dobbiamo usare l'ipotesi $E = E' \oplus E''$. Riscriviamo $(*)$ nella forma: $\alpha_1 x'_1 + \cdots + \alpha_n x'n = -(\alpha_1 x''_1 + \cdots + \alpha_n x''n) =: w$. A sinistra abbiamo un vettore di E', a destra un vettore di E'', quindi $w \in E' \cap E''$. Per ipotesi $E' \cap E'' = \{0\}$, quindi $0 = w = \alpha_1 x'_1 + \cdots + \alpha_n x'n$. Siccome gli x'_i sono indipendenti per ipotesi questo implica $\alpha_i = 0, \forall i$.

(ii) In $\mathbb{R}^3$, siano $x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (2, 1, 0)$. I due vettori sono indipendenti ($\alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$). Sia $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ ($E' = \mathbb{R}, E'' = \mathbb{R}^2$, sostanzialmente si proietta sull'asse delle x e sul piano delle (y, z)). Allora $x'_1 = 1$, $x'_2 = 2$ e questi due vettori di $\mathbb{R}$ sono dipendenti ($\mathbb{R}$ ha dimensione uno). Invece $x''_1 = (0, 1)$, $x''_2 = (1, 0)$ sono due vettori indipendenti di $\mathbb{R}^2$.

Prendiamo adesso x_1, x_2, x_3 tre vettori indipendenti in $\mathbb{R}^3$. Le loro proiezioni su $E' = \mathbb{R}$ saranno dipendenti ($\mathbb{R}$ ha dimensione uno), come anche le loro proiezioni su $E'' = \mathbb{R}^2$ ($\dim(\mathbb{R}^2) = 2$).

(iii) Supponiamo $x_1, ..., x_n$ indipendenti e mostriamo
$x'_1, ..., x'_n$ indipendenti $\Leftrightarrow \langle x_1, ..., x_n \rangle \cap E'' = \{0\}$.

($\Rightarrow$) Sia $u \in E'' \cap \langle x_1, ..., x_n \rangle$, allora $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = v''$ (con $v'' \in E''$). Quindi $\alpha_1 x'_1 + \cdots + \alpha_n x'_n = v'' - (\alpha_1 x''_1 + \cdots + \alpha_n x''_n)$. A destra abbiamo un vettore di E', a sinisttra uno di E''. Siccome $E' \cap E'' = \{0\}$, viene $\alpha_1 x'_1 + \cdots + \alpha_n x'_n = 0$. Siccome gli x'_i sono indipendenti per ipotesi abbiamo $\alpha_i = 0, \forall i$ e quindi $u = 0$.

($\Leftarrow$) Sia $\alpha_1 x'_1 + \cdots + \alpha_n x'_n = 0$. Dobbiamo mostrare $\alpha_i = 0, \forall i$. Consideriamo $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. Osserviamo che $u = \alpha_1 x''_1 + \cdots + \alpha_n x''_n$ (perché $\alpha_1 x'_1 + \cdots + \alpha_n x'_n = 0$). Quindi $u \in \langle x_1, ..., x_n \rangle \cap E''$. Usando l'ipotesi viene $u = 0$, cioè $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. Siccome $x_1, ..., x_n$ sono indipendenti (per ipotesi) questo implica $\alpha_i = 0, \forall i$.

Se i vettori $x_1, ..., x_n$ sono dipendenti l'equivalenza precedente non è più vera. Per esempio siano $x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (2, 0, 0)$ in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ (asse delle x, piano delle (y, z)). Allora $\langle x_1, x_2 \rangle \cap E'' = \{0\}$ (osservare che $\langle x_1, x_2 \rangle = E'$), ma $x'_1 = 1, x'_2 = 2$ non sono indipendenti in $\mathbb{R}$.

(iv) I tre vettori sono indipendenti, questo segue dal punto (i). Infatti sia $\mathbb{R}^{2000} = \mathbb{R}^{1997} \oplus \mathbb{R}^3$, dove $\mathbb{R}^3$ è lo spazio delle ultime tre coordinate. Le proiezioni dei tre vettori su $\mathbb{R}^3 =: E'$ sono i tre vettori $(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)$ che sono chiaramente indipendenti. $\square$

Correzione del Parziale del 22-2-2017

Esercizio 1.

(1) Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Mostrare che M è invertibile e calcolare M^{-1}.

(2) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Calcolare $\det A$.

Correzione:

(1) Abbiamo $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) Dopo le seguenti successive combinazioni tra colonne: $C4 \to C_4 - C_3$, $C_3 \to C_3 + C_2$, $C_1 \to C_1 + 2C_2$ si arriva a: $\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 14 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 14 & 4 & 5 \end{vmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -10 \\ 3 & -1 & 4 \\ 14 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. Sviluppando secondo la prima colonna $\det A = -3.55 + 14.2 = -137$. $\square$

Esercizio 2.

Siano in $\mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ dove le coordinate sono espresse nella base canonica $C = (e_1, e_2, e_3)$.

(1) Mostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che $mat(f; C, B) = A$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrare che f è invertibile (giustificare. N.B. A non è la matrice di f con la stessa base all'arrivo e alla partenza).

(3) Determinare $mat(f^{-1}; B, B)$.

Correzione:

(1) Il determinante dei vettori v_i nella base C è: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \to R_1 + R_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Siccome il determinante è non nullo i tre vettori di $\mathbb{R}^3$ (che ha dimensione tre) sono indipendenti e formano una base.

(2) **Prima soluzione** Le colonne di A sono le coordinate nella base B dei vettori $f(e_1), ..., f(e_3)$. Siccome $\det A = -1$, questi vettori sono indipendenti e formano una base. Quindi f trasforma la base (e_i) nella base $(f(e_i))$, pertanto f è biiettiva.

Seconda soluzione: Siccome $A = mat(f; C, B)$ le coordinate di $f(v_i)$ nella base B si ottengono applicando A alle coordinate di v_i nella base canonica. Quindi $f(v_1) = A. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$. Quindi $f(v_1) = v_1 + v_2$. In modo analogo $f(v_2) = A. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}_B$ e $f(v_3) = A. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$. In conclusione $mat(f; B, B) =: M =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Abbiamo $\det(M) = -2$. Osservare che, per definizione: $\det(M) = \det(f)$. Osservare inoltre che $\det(f) \neq \det(A)$.

Quest'approccio è utile per risolvere il punto successivo: basta calcolare $M^{-1} = mat(f^{-1}; B, B)$.

(3) **Prima soluzione:** Abbiamo: $E_C \xrightarrow{f} E_B \xrightarrow{f^{-1}} E_C$. L'applicazione composta è $E_C \xrightarrow{Id} E_C$, la cui matrice è I_3. Pertanto $mat(f^{-1}; B, C).A = I_3$. Segue che $mat(f^{-1}; B, C) = A^{-1}$. Adesso abbiamo $E_B \xrightarrow{f^{-1}} E_C \xrightarrow{Id} E_B$; la composta è $f^{-1} : E_B \to E_B$. Quindi $mat(f^{-1}; B, B) = P.A^{-1}$, dove $P = mat(Id; C, B)$.

Si calcola $A^{-1} = A$. Le colonne di P sono le coordinate dei vettori e_i nella base v_i. Si tratta quindi di determinare a, b, c tali che $e_i = av_1 + bv_2 + cv_3$. Bisogna quindi risolvere tre sistemi lineari della forma:

$$\begin{cases} a + c = x_i \\ -a + b = y_i \\ -b + c = z_i \end{cases}$$

dove (x_i, y_i, z_i) sono le coordinate di e_i nella base canonica (per esempio $(1, 0, 0) = (x_1, y_1, z_1)$ ecc...). Si trova $P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Adesso si calcola il prodotto $P.A^{-1}$ tenendo conto che $A = A^{-1}$ e si trova

$$mat(f^{-1}; B, B) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Seconda soluzione: Guardando alle colonne della matrice A ricaviamo:

$$\begin{cases} f(e_1) = v_1 \\ f(e_2) = -v_2 \\ f(e_3) = v_2 + v_3 \end{cases}$$

Componendo entrambi i membri di ogni equazione con f^{-1}, otteniamo: $f^{-1}(v_1) = e_1$, $f^{-1}(v_2) = -e_2$, $f^{-1}(v_3) = e_2 + e_3$. Le colonne di $mat(f^{-1}; B, B)$ sono le coordinate nella base (v_i) dei vettori $f^{-1}(v_i)$. Quindi ci basta trovare le coordinate dei vettori e_i nella base v_i (cioè la matrice P della prima soluzione). Risolvendo i soliti sistemi si trova $e_1 = 1/2(v_1 + v_2 + v_3)$, $e_2 = -1/2v_1 + 1/2(v_2 + v_3)$ e $e_3 = -1/2(v_1 + v_2) + 1/2v_3$. Pertanto

$$mat(f^{-1}; B, B) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

Esercizio 3.

Si riprendono le notazioni dell'Esercizio 2. Mostrare che non esiste nessun vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^3$ che abbia le stesse coordinate nella base C e nella base B. Cioè se $(v_1, v_2, v_3)_C$ sono le coordinate di v nella base C, allora, con l'analoga notazione per B, abbiamo $(v_1, v_2, v_3)_C \neq (v_1, v_2, v_3)_B$, $\forall v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Correzione:

Se $v \in \mathbb{R}^3$ ha le stesse coordinate (x, y, z) nelle basi C, B, allora $P.X = X$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Quindi $P.X = X = I_3.X$, cioè $(I_3 - P).X = 0$. Quindi X è nel ker di $I_3 - P$. Abbiamo $I_3 - P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$

$1/2.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si ottiene $\det(I_3 - P) = 1/2$, quindi $I_3 - P$ è invertibile e $X = 0$ e v è il vettore nullo.

Detto diversamente: Supponiamo $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = xv_1 + yv_2 + zv_3$, allora abbiamo:

$$\begin{cases} x = x + z \\ y = -x + y \\ z = -y + z \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione di questo sistema è $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Esercizio 4.

Sia f un endomorfismo del k-spazio vettoriale E.
(1) Mostrare che $Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1}), \forall n \geq 1$ ($f^n = f \circ \cdots \circ f$, n termini).
(2) Si suppone $\dim(Im(f)) = 1$ e (per semplificare) $\dim E = 3$. Mostrare che ci sono solo due casi possibili:
(a) $Ker(f) = Ker(f^n), \forall n \geq 1$ oppure (b) $f^2 = 0$ e quindi $Ker(f^n) = E, \forall n \geq 2$. (Hint: si potrà scegliere astutamente una base di E e scrivere la matrice di f rispetto a quella base.)

Correzione:
(1) Se $f^n(v) = 0$, allora $f^{n+1}(v) = f(f^n(v)) = f(0) = 0$, quindi $Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1})$.
(2) **Prima soluzione:** Se $\dim(Im(f)) = 1$, allora per il teorema del rango, $\dim(Ker(f)) = 2$. Sia (e_1, e_2) una base di $Ker(f)$ e completiamola a una base B di E: $B = (e_1, e_2, e_3)$. Abbiamo $A = mat(f; B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Abbiamo $A^2 = mat(f^2; B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ca \\ 0 & 0 & cb \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$. Per induzione si ottiene $A^{n+1} = mat(f^{n+1}; B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^n a \\ 0 & 0 & c^n b \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$.
Quindi se $c = 0$, $f^n = 0$ se $n \geq 2$. Se $c \neq 0$, $f^{n+1}(e_3) = c^n a.e_1 + c^n b.e_2 + c^{n+1}.e_3 \neq 0$ e quindi $\dim Im(f^{n+1}) \geq 1$. Siccome $\dim Ker(f^{n+1}) \geq 2$, per il teorema del rango: $\dim Ker(f^{n+1}) = 2$ e $\dim Im(f^{n+1}) = 1$, $n \geq 0$.

Seconda soluzione: Con le notazioni precedenti abbiamo $f^2(e_3) = f(f(e_3)) = 0$ se e solo se $f(e_3) \in Ker(f) = \langle e_1, e_2 \rangle$ (cioè se e solo se $c = 0$). Quindi se $f(e_3) \in Ker(f)$, $f^n = 0, n \geq 2$. Se $f(e_3) \notin Ker(f)$, allora $f^2(e_3) \neq 0$ e $Ker(f^2) = Ker(f)$ per (1) e il teorema del rango. Abbiamo $f^3(e_3) = f^2(f(e_3)) = 0 \Leftrightarrow f(e_3) \in Ker(f^2) = Ker(f)$. Quindi $f^3(e_3) \neq 0$ e $Ker(f^3) = Ker(f^2) = Ker(f)$. Più generalmente se $Ker(f^n) = \cdots = Ker(f)$ e $f(e_3) \notin Ker(f)$, allora $f^{n+1}(e_3) \neq 0$ e $Ker(f^{n+1}) = \cdots = Ker(f)$. $\square$