

Complementi di Geometria (2014-2015)

– First draft –

Ph. ELLIA

Upgrade 4 maggio 2015

Indice

Parte I Prerequisiti.

1	Introduzione.	3
2	Prefasci e fasci.	7
2.1	Prefasci, fasci di funzioni.	7
2.2	Prefasci e fasci: caso generale.	9
2.3	Il fascio associato a un prefascio, morfismi.	11
2.4	I funtori f_* , f^{-1} , f^* .	14
	Esercizi	16
3	Una rapidissima introduzione agli schemi.	19
3.1	Varietà algebriche reloaded.	19
3.2	Schemi affini: definizione.	21
3.3	Schemi: primi esempi.	25
	Esercizi	28
3.4	$Proj(S)$, S anello graduato.	30
	Esercizi	32
3.5	Prime proprietà degli schemi.	33
3.5.1	Prodotto.	34
3.5.2	Cambiamento di base.	34
3.5.3	Piattezza.	35
3.6	Schemi e varietà.	36
	Esercizi	37
4	Fasci coerenti e moduli graduati.	39
4.1	Fasci (quasi)coerenti su $Spec(A)$.	39
4.2	Il funtore $M \rightarrow M^\sim$, i fasci $\mathcal{O}(a)$.	40
	Esercizi	44

VI Indice

4.3	Il funtore $\mathcal{F} \rightarrow H_*^0(\mathcal{F})$.	45
4.4	Confronto tra H_*^0 e $-\sim$.	46
4.5	Sotto schemi chiusi di $\mathbb{P}_k^n$ e ideali omogenei.	47
	Esercizi	52
5	Coomologia, Riemann-Roch.	55
5.1	Coomologia	55
	Esercizi	58
5.2	Divisori su una curva proiettiva liscia, irriducibile.	60
5.2.1	L'anello locale in un punto di una curva.	61
5.2.2	Morfismi tra curve non singolari, morfismi finiti.	61
5.2.3	Divisori.	62
5.2.4	Il fascio invertibile associato a un divisore.	64
	Esercizi	67
5.3	Il teorema di Riemann-Roch e conseguenze.	68
	Esercizi	71
5.4	Sistemi lineari senza punti base, morfismi nello spazio proiettivo.	73
	Esercizi	78
Parte II Curve in $\mathbb{P}^3$.		
6	Curve di $\mathbb{P}^3$: introduzione.	83
6.1	Primi esempi.	83
6.2	Intersezioni complete, curve su una quadrica liscia.	88
	Esercizi	92
7	Il teorema di Halphen sul genere massimo.	95
7.1	Restrizione a un piano.	95
7.2	Il metodo di Castelnuovo della sezione piana.	97
7.3	Il lemma delle trisecanti.	98
7.4	Il teorema di Halphen.	100
	Esercizi	103
8	Il carattere numerico di una curva.	105
8.1	Il carattere numerico di un insieme di punti in $\mathbb{P}^2$.	105
	Esercizi	109
8.2	Il carattere numerico di una curva.	110
8.3	Il lemma di posizione uniforme.	113
	Esercizi	117

9	$G(d, s)$ per $d > s(s - 1)$.	119
9.1	Il carattere massimale.	119
	Esercizi	122
9.2	Curve proiettivamente normali, il lifting problem.	123
	Esercizi	127
9.3	La liaison.	128
	Esercizi	134

Parte III Appendice A.

10	Morfismi finiti tra curve.	139
	Bibliografia	143

Parte I

Prerequisiti.

Introduzione.

La geometria algebrica moderna nasce con Riemann. Questo è paradossale perché c'è poca algebra nei lavori di Riemann (i suoi metodi sono analitici, topologici) ma molta geometria e i suoi risultati (teorema di uniformizzazione) mettono le basi per un legame tra geometria analitica e geometria proiettiva. Alla morte di Riemann (1866) si distinguono due filoni: quello *algebrico* e quello *geometrico*, chiamiamoli così.

Il filone *algebrico* inaugurato da Dedekind e Weber ha per scopo di ritrovare, per via esclusivamente algebrica, i risultati di Riemann sulle superfici di Riemann compatte. Si tratta per iniziare di associare una curva C_K a ogni estensione finita K di $\mathbb{C}(X)$, di modo che K sia il campo delle funzioni razionale di C_K (vedere [15], I. 6). Dedekind e Weber sono tra i protagonisti della fondazione della teoria algebrica dei numeri e quindi non è sorprendente trovare molte analogie tra la loro "geometria" e la teoria dei numeri. Si intravede (molto lontanamente) la speranza di usare metodi geometrici per problemi di teoria dei numeri. Sulle prime questo filone non ha molti seguaci, ma si rileverà fondamentale in seguito.

Il filone *geometrico* (Roch, Clebsch, Brill, Max Noether (il padre di Emmy), Cayley, Halphen, Zeuthen) e la prima generazione di geometri italiani (Cremona, C. Segre, Bertini) si interessa, con metodi sempre più geometrici, alla geometria delle curve algebriche piane (anche singolari) e più generalmente alle sotto varietà proiettive di $\mathbb{P}^n$. Questo è il filone più popolare e sarà dominato (nel periodo 1880-1930 circa) dalla scuola italiana (Castelnuovo, Enriques, Severi e tanti, tanti altri). Si lavora soprattutto in geometria birazionale, lo strumento principale è la nozione di sistema lineare. Le dimostrazioni usano argomenti di geometria sintetica, l'algebra è praticamente assente. La mole di risultati dimostrati è impressionante, il maggior successo è la classificazione di Enriques (con notevoli contributi di Castelnuovo) delle superfici algebriche. Verso gli anni 30 la macchina inizia a inceppare. Una

mancanza di rigore nelle definizioni e nelle dimostrazioni rendono la teoria confusa, imprecisa. Il bisogno di una rifondazione si fa sentire e specie di un uso maggiore dell'algebra per portare rigore. Oscar Zariski, che aveva studiato a Roma, era presentato da Castelnuovo come la persona capace di portare avanti questa rifondazione. Sfortunatamente i nostri sono stati incapaci di procurare a Zariski una posizione accademica in Italia. (Forse non tutti (Enriques, Severi) erano convinti dell'utilità di una rifondazione algebrica della geometria.) E quindi Zariski è andato negli Stati Uniti dove in pochi anni ha effettivamente reso più algebrica la geometria (topologia di Zariski, spazio tangente di Zariski ecc...) e fondato una scuola molto influente (Mumford è un allievo di Zariski, tra tanti altri).

Passati gli anni bui della seconda guerra mondiale, verso l'inizio degli anni '50, si assiste, in topologia, alla nascita di tecniche nuove che cambieranno la matematica: teoria delle categorie e nascita della topologia algebrica, omologia, coomologia, algebra omologica e teoria dei fasci. Dopo l'avanzata di Zariski, la geometria algebrica è ferma.

Nel 1955, seguendo un suggerimento di H. Cartan, Serre, usando la teoria dei fasci, dà una definizione di varietà algebrica "astratta" e mostra l'utilità dei metodi coomologici dimostrando vari risultati fondamentali (cf [20]). La nuova teoria però è limitata: funziona bene solo su un campo algebricamente chiuso. Per quelli che vorrebbero portare avanti il programma iniziato da Dedekind e Weber, cioè usare metodi geometrici in aritmetica, questa è una seria limitazione. Dopo vari tentativi (Weil, Serre, Nagata, Chevalley, Cartier) Grothendieck trova la soluzione nella sua teoria degli schemi. Il periodo 1960-1970 è il periodo d'oro dell'IHES, del *Séminaire de géométrie algébrique* (SGA) e degli *Eléments de géométrie algébrique* (EGA). Chiunque voleva studiare geometria algebrica "doveva" studiarsi le 1.600 pagine degli EGA. Per fortuna nel 1977, Hartshorne con il suo libro *Algebraic geometry* ([15]) è riuscito a fare un'ottima sintesi degli EGA, mettendo tra l'altro la teoria degli schemi al servizio della geometria "classica". Il libro di Hartshorne rimane tuttora la migliore referenza per iniziare lo studio della geometria algebrica.

Infatti dopo la "sbornia schematica" degli anni 1960-70, ma muniti di un linguaggio (quello degli schemi) ineccepibile e di una marea di strumenti, risultati generali si è iniziato (fine degli anni '70 circa) a riconsiderare i problemi classici. Una rilettura attenta a messo in evidenza che molti risultati classici (specie della scuola italiana), considerati validi da decenni, avevano una dimostrazione incompleta o, addirittura, sbagliata. Alcuni di questi risultati si sono poi rilevati falsi!

Nel 1882 è stato messo in palio un premio (premio Steiner) per il miglior lavoro sulla classificazione delle curve algebriche (vedi [15], IV.6). Il premio fu

vinto, a pari merito, da Halphen e Brill-Noether.

Nella sua memoria ([13]) Halphen propone un approccio alla classificazione delle curve (nel seguito sempre lisce, irriducibili) di $\mathbb{P}^3$ (spazio proiettivo su un campo algebricamente chiuso, di caratteristica zero, $\mathbb{C}$ per Halphen). Definisce $G(d, s) := \max \{g \mid \text{esiste una curva, di grado } d, \text{ genere } g, \text{ non contenuta in una superficie di grado } < s\}$. Quindi, per esempio, $G(d, 2)$ è il genere *massimo* di una curva sghemba di grado d in $\mathbb{P}^3$. Nella sua memoria Halphen si propone di:

1. Determinare $G(d, 2), G(d, 3)$.
2. Determinare (usando 1) tutte le coppie (d, g) tali che esista in $\mathbb{P}^3$ una curva di genere g , grado d .
3. Determinare $G(d, s)$ per ogni d, s .
4. Mostrare come la conoscenza dei $G(d, s)$ sia fondamentale per la classificazione delle *famiglie* di curve. Per illustrare questo ultimo punto Halphen fornisce vari esempi, tra cui una classificazione completa (secondo lui) delle *famiglie* di curve di grado 120.

Per il punto 3. Halphen dà una formula precisa nei casi $d > s(s-1)$ (range C) e $d < (s^2+4s+6)/3$ (range A). Nel range intermedio (range B) Halphen non dà nessuna formula, ma dice di avere un algoritmo per determinare $G(d, s)$.

Oggi sappiamo che i risultati di Halphen riguardo al punto 1. sono esatti e la sua dimostrazione è (essenzialmente) corretta. Per quanto riguarda 2. l'enunciato di Halphen è corretto (Gruson-Peskine 1982, [12]) ma la sua dimostrazione è decisamente sbagliata. Riguardo a 3. la formula di Halphen nel range C è corretta (Gruson-Peskine 1978, [11]), ma la sua dimostrazione è, per lo meno, incompleta. La formula nel range A è verosimilmente giusta (oggi dimostrata solo per "metà" dei casi, [2]); la dimostrazione di Halphen è...inesistente! Per quanto riguarda il range B, il range più difficile, nessuno ha mai capito niente al presunto algoritmo di Halphen. Oggi abbiamo una formula congetturale, $G_B(d, s)$ ([16]), sappiamo che $G(d, s) \geq G_B(d, s)$ ([17]) e che $G_B(d, s) = G(d, s)$ "ai bordi" del Range B ([16], [9], [8]). Quindi più di un secolo dopo il problema di Halphen di determinare $G(d, s)$ non è ancora completamente risolto.

Per quanto riguarda la classificazione delle *famiglie* di curve, oggi grazie ai risultati di Grothendieck, abbiamo una formulazione molto precisa del problema: si tratta di classificare le varie componenti irriducibili dello schema di Hilbert $H(d, g)$ che parametrizza le curve (lisce) di grado d , genere g . Sappiamo anche che questo problema è senza speranze perché il numero di queste componenti cresce più velocemente di una funzione polinomiale (se $n(d, g)$ è il numero di componenti irriducibili di $H(d, g)$, allora non esiste nessun polinomio $P(x, y)$ tale che $n(d, g) \leq P(d, g)$, per ogni d, g , [6]). E' vero però che la

conoscenza di $G(d, s)$ dà indicazioni importanti e si rivela utile in altri problemi (classificazione delle superfici di $\mathbb{P}^4$, esistenza di componenti non ridotte dello schema di Hilbert, studio delle strutture multiple sulle curve, sotto fibrati del fibrato normale ecc...).

In questi appunti cercheremo di dare, in parte, la dimostrazione del teorema di Gruson-Peskine relativo al valore di $G(d, s)$ nel Range C. Questo sarà anche (e soprattutto) l'occasione per introdurre e usare alcuni concetti fondamentali (fasce, coomologia, schemi). Una presa di conoscenza degli appunti ([5]) del Seminario Riemann-Roch dell'anno scorso è raccomandata.

Prefaschi e fasci.

Il problema ricorrente in geometria è di definire la classe delle *buone* funzioni sulle varietà (*buone* = continue, differenziabili, analitiche, algebriche...). L'essere continua, differenziabile, analitica è una proprietà *locale*. E' meno chiaro a priori che questo sia ancora vero per le "funzioni algebriche", anzi a priori non è affatto chiaro cosa debba essere una "funzione algebrica"!

2.1 Prefaschi, fasci di funzioni.

Sia quindi X uno spazio topologico e per ogni aperto $U \subset X$, indichiamo con $\mathcal{Fct}(U, k)$ l'insieme delle funzioni da U in un campo k ($k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$). Un elemento $f : U \rightarrow k$ di $\mathcal{Fct}(U, k)$ è solo un'applicazione dall'insieme U nell'insieme k .

Se $V \subset U$ e se $f \in \mathcal{Fct}(U, k)$, allora $f|_V \in \mathcal{Fct}(V, k)$. Questo definisce un'applicazione di restrizione: $r_{UV} : \mathcal{Fct}(U, k) \rightarrow \mathcal{Fct}(V, k)$. Chiaramente se $W \subset V \subset U$, abbiamo:

Condizione di restrizione:

- | |
|--|
| 1) $r_{VW} \circ r_{UV} = r_{UW}$
2) $r_{UU} = Id.$ |
|--|

Sia $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ un ricoprimento aperto di U . Allora, per definizione di funzione abbiamo:

Condizione di incollamento:

se $f_i \in \mathcal{Fct}(U_i, k)$ soddisfano $f_i (U_i \cap U_j) = f_j (U_i \cap U_j), \forall i, j \in I$ allora esiste una ed un'unica $f \in \mathcal{Fct}(U, k)$, tale che $f _{U_i} = f_i, \forall i \in I$

Adesso vogliamo ripetere queste considerazioni per certe classi di funzioni (continue, differenziabili, limitate, ecc...).

Alcune di queste proprietà richiedono che sia definita una topologia su k . Se $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ abbiamo varie topologie a disposizione, in generale abbiamo solo la topologia di Zariski a disposizione.

Sia quindi $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{Fct}(U)$ il sotto insieme delle funzioni $f : U \rightarrow k$ che soddisfano una certa proprietà (P).

In tutti i casi sensati ((P)= continua, differenziabile, limitata, ecc...), la *condizione di restrizione* è verificata. La *condizione di incollamento* invece non è sempre soddisfatta.

Il problema è il seguente: se $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, allora esiste una ed un'unica funzione $f \in \mathcal{Fct}(U, k)$ che incolla le f_i (perché $f_i \in \mathcal{Fct}(U_i, k)$), il problema è vedere se $f \in \mathcal{O}(U)$. Questo sarà il caso se la proprietà (P) che definisce $\mathcal{O}$ è *locale*. Una proprietà è locale se vera su X è vera su ogni aperto $U \subset X$ e se vera su ogni aperto di un ricoprimento aperto di X , è vera su X .

Quindi per esempio $U \rightarrow \mathcal{L}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata}\}$, soddisfa la condizione di restrizione ma non quella di incollamento.

Definizione 2.1. *Sia X uno spazio topologico. Un prefascio, $\mathcal{F}$, di funzioni (a valori in k) su X consiste per ogni aperto $U \subset X$, nell'assegnazione di $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{Fct}(U, k)$, di modo che la condizione di restrizione sia soddisfatta.*

Se inoltre la condizione di incollamento è pure soddisfatta, il prefascio $\mathcal{F}$ è un fascio.

Germi di funzioni, localizzazione.

Sia $\mathcal{O}$ un prefascio di funzioni su X . Sia $x \in X$, U un aperto contenente x e $f \in \mathcal{O}(U)$ una funzione. Prendendo la restrizione di f ad aperti sempre più piccoli contenenti x , ci viene da pensare che "al limite" arriveremo a $f|_x$ cioè al valore, $f(x)$, di f in x .

Questo ragionamento ci porta alla nozione di *germe* di funzione. Sia $\mathcal{U}_x$ l'insieme delle coppie (U, f) , U intorno aperto di x , $f \in \mathcal{O}(U)$. Su $\mathcal{U}_x$ sia $\sim$ la relazione: $(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V$ aperto contenente x , tale che: $f|_W = g|_W$. Si verifica che $\sim$ è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathcal{O}_x$ si chiama *l'insieme dei germi di funzioni in x* o anche *spiga* di $\mathcal{O}$ in x .

Sia $f_x \in \mathcal{O}_x$ un germe in x . Possiamo definire il valore di f_x in x , $f_x(x)$, nel modo seguente: sia (U, f) un rappresentante di f_x , allora: $f_x(x) = f(x)$. Chiaramente questo non dipende dalla scelta del rappresentante scelto.

Quindi ogni funzione f determina un germe f_x , cioè abbiamo $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}_x$. Il germe è l'espressione *locale in x* della funzione f : abbiamo localizzato f nel

punto x . La localizzazione di un anello secondo una parte moltiplicativa è il procedimento algebrico che permette di fare la stessa operazione in un contesto algebrico.

Nel caso di un fascio di funzioni a valori in un campo k , $\mathcal{O}(U)$ ha una naturale struttura di anello (anzi di k -algebra) data da $f + g : U \rightarrow k : x \rightarrow f(x) + g(x)$, $fg : U \rightarrow k : x \rightarrow f(x)g(x)$ e $\lambda f : U \rightarrow k : x \rightarrow \lambda f(x)$. Si verifica che anche $\mathcal{O}_x$ ha una struttura di anello. Supponiamo che la proprietà (P) che definisce $\mathcal{O}$ sia localmente invertibile cioè: se $f \in \mathcal{O}(U)$ verifica $f(x) \neq 0$, allora esiste $V_x \subset U$, aperto contenente x , tale che $1/f \in \mathcal{O}(V_x)$. Sia $\mathfrak{m}_x = \{f_x \in \mathcal{O}_x \mid f_x(x) = 0\}$. Chiaramente $\mathfrak{m}_x$ è un ideale di $\mathcal{O}_x$, inoltre f_x è invertibile se e solo se $f_x \notin \mathfrak{m}_x$. Questo implica che $\mathcal{O}_x$ è un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}_x$. Il campo quoziente $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ è isomorfo a (un sotto campo di) k tramite l'applicazione $\bar{f}_x \rightarrow f_x(x)$.

Questa è la situazione ideale alla quale miriamo: un fascio di funzioni le cui spighe siano anelli locali (si dirà che $(X, \mathcal{O})$ è uno spazio localmente anellato).

Per avere una teoria efficace bisogna considerare (pre)fasci $\mathcal{F}$ dove $\mathcal{F}(U)$ non è necessariamente un insieme di funzioni da U in k .

2.2 Prefasci e fasci: caso generale.

Adesso vogliamo ripetere quanto fatto prima non più con dei fasci di funzioni ma con dei fasci qualsiasi, cioè $\mathcal{F}(U)$ sarà un oggetto di una categoria $\mathcal{C}$ qualsiasi, anche se in realtà ci limiteremo a considerare i casi in cui $\mathcal{F}(U)$ è un gruppo abeliano, un anello o un modulo. Le definizioni rimangono tali quali solo che le operazioni di restrizione (che adesso sono frecce in $\mathcal{C}$, morfismi di gruppi, anelli, ecc...) sono date astrattamente, cioè fanno parte dei dati del fascio.

A questo punto può essere utile osservare una definizione alternativa di prefascio. Sia $Ap(X)$ la categoria i cui oggetti sono gli aperti di X . Le frecce sono date nel modo seguente:

$$Hom(U, V) = \begin{cases} i : U \hookrightarrow V & \text{se } U \subset V \\ \emptyset & \text{se } U \not\subset V \end{cases}$$

Definizione 2.2. *Un prefascio, $\mathcal{F}$, sullo spazio topologico X a valore nella categoria $\mathcal{C}$ è un funtore (covariante): $\mathcal{F} : Ap(X)^o \rightarrow \mathcal{C}$ ($Ap(X)^o$ è la categoria opposta di $Ap(X)$).*

Un fascio è un prefascio che verifica la condizione d'incollamento.

La condizione di incollamento può essere riformulata nel modo seguente (per $s \in \mathcal{F}(U)$, scriveremo $s|_V$ invece di $r_{UV}(s)$, ma bisogna ricordare che la restrizione è data in modo astratto). Sia $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ un ricoprimento aperto dell'aperto U , allora:

Condizioni di incollamento:

- 1) se $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, esiste al più un $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_i} = s_i, \forall i \in I$
- 2) se $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$, tale che $s|_{U_i} = s_i, \forall i \in I$

Ovviamente per 1) la s in 2) è unica.

Osservazione 2.3. La formulazione precedente non è soddisfacente in tutta generalità perché usa elementi in $\mathcal{F}(U)$, ma in tutta generalità $\mathcal{F}(U)$ è un oggetto di $\mathcal{C}$ e non è detto che sia un insieme! Si può ovviare a questo inconveniente con diagrammi (equalizzatori), purché ci siano prodotti in $\mathcal{C}$. Nel nostro caso $\mathcal{C} = Ab$, non c'è problema.

Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono le *sezioni* di $\mathcal{F}$ su U . Si nota anche $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$.

Nel seguito considereremo (pre)fasci di gruppi abeliani ($\mathcal{C} = Ab$) oppure una situazione un po' più generale: avremo un fascio $\mathcal{O}_X$ di anelli ($\mathcal{C} = Ann$, anelli commutativi con unità) e fasci $\mathcal{F}$ di $\mathcal{O}_X$ -moduli ($\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$ -modulo per ogni aperto U). Il problema adesso è di definire i morfismi di fasci e i relativi fasci Ker, Im, Coker.

Ci limiteremo a considerare (pre)fasci di gruppi abeliani lasciando al lettore le verifiche che tutto quanto si estende senza problemi al caso dei fasci di $\mathcal{O}_X$ -moduli. C'è anche l'annosa questione di associare qualcosa al vuoto: per tutti i (pre)fasci di gruppi abeliani $\mathcal{F}$ poniamo $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$. Finalmente indicheremo con $PFAb(X)$, $FAb(X)$ la categoria dei prefasci (risp. fasci) di gruppi abeliani sullo spazio topologico X : gli oggetti sono i prefasci e le frecce i morfismi che andiamo adesso a definire:

Definizione 2.4. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due prefasci di gruppi abeliani su X . Darsi un morfismo di prefasci $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ consiste nel darsi per ogni aperto U un morfismo di gruppi: $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$; inoltre i morfismi φ_U devono essere compatibili con le restrizioni.

Quindi se $V \subset U$, abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ r_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Un fascio è in particolare un prefascio, un morfismo di fasci è un morfismo di prefasci (quindi $F\text{Ab}(X)$ è una *sotto categoria piena* di $PF\text{Ab}(X)$).

Come nel caso dei fasci di funzioni la spiga $\mathcal{F}_x$ è l'insieme dei germi, s_x , di sezioni di $\mathcal{F}$, cioè s_x è rappresentato da (U, s) con $s \in \mathcal{F}(U)$ e $(U, s), (V, g)$ rappresentano lo stesso germe se esiste $W \subset U \cap V$ tale che $r_{UW}(f) = r_{VW}(g)$.

Un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce un morfismo tra le spighe: $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$. Infatti se $s_x \in \mathcal{F}_x$ è la classe di (U, s) , allora $\varphi_x(s_x)$ è la classe di $(U, \varphi_U(s))$. Si mostra che φ_x è ben definito ed è un morfismo di gruppi abeliani.

Dato un morfismo di fasci $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ vorremo definire dei fasci $\text{Ker}(\varphi)$, $\text{Im}(\varphi)$, $\text{Coker}(\varphi)$ e quindi parlare di morfismo iniettivo, suriettivo e poi di successioni esatte.

Per il Ker non ci sono problemi:

Lemma 2.5. *Sia $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci di gruppi abeliani. Allora il prefascio $U \rightarrow \text{Ker}(\varphi_U)$ è un fascio di gruppi abeliani.*

Dimostrazione. Esercizio 2. □

Per quanto riguarda invece Im e Coker le cose non vanno così bene: in generale $U \rightarrow \text{Im}(\varphi_U)$, $U \rightarrow \text{Coker}(\varphi_U)$ sono dei prefasci che non sono dei fasci. Per ovviare a questo inconveniente bisogna passare al fascio associato a un prefascio.

2.3 Il fascio associato a un prefascio, morfismi.

Abbiamo già visto un esempio di un prefascio che non era un fascio ($U \subset \mathbb{R}$, $U \rightarrow \mathcal{L}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata}\}$).

Un altro esempio tipico è il seguente: sia A un gruppo abeliano, X uno spazio topologico, per ogni aperto $\mathcal{A}(U) = A$. Le applicazioni di restrizione sono l'identità. Quindi $s \in \mathcal{A}(U)$ è un elemento di A , a . Possiamo vedere s come l'applicazione costante: $s : U \rightarrow A : x \rightarrow a$. Quindi $\mathcal{A}(U) = \{s : U \rightarrow A \mid s \text{ è costante}\}$. Il prefascio $\mathcal{A}$ in generale non è un fascio: se $X = U_1 \sqcup U_2$, $s_i \in \mathcal{A}(U_i)$, $s_i = a_i$ con $a_1 \neq a_2$, non esiste nessuna $s \in \mathcal{A}(X)$ tale che $s|_{U_i} = s_i$.

In entrambi i casi la condizione di incollamento fallisce perché i prefasci non sono definiti da proprietà locali. Per ovviare all'inconveniente bisogna *mettere del locale* nella definizione.

Definizione 2.6. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio di gruppi abeliani. Per un aperto U consideriamo le applicazioni $\sigma : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$. Allora $\mathcal{F}^+(U)$ è l'insieme di tali

applicazioni che verificano:

- a) $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x, \forall x \in U$
- b) per ogni $x \in U$ esiste un aperto $V_x, x \in V_x \subset U$ e $t \in \mathcal{F}(V_x)$, tale che $\sigma(y) = t_y, \forall y \in V_x$.

Allora $U \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ definisce un prefascio di gruppi abeliani, detto associato a $\mathcal{F}$.

Si verifica facilmente che $\mathcal{F}^+$ è un fascio. C'è un morfismo canonico $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}^+$. Infatti se $s \in \mathcal{F}(U)$, allora s definisce $\tilde{s} : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x : x \rightarrow s_x$ e $\tilde{s} \in \mathcal{F}^+(U)$. Questo morfismo non è necessariamente biiettivo (lo è se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio).

Nell'esempio precedente $\mathcal{A}^+(U) = \{s : U \rightarrow A \mid s \text{ è localmente costante}\}$. Quindi $\sigma : X \rightarrow A$ tale che $\sigma(x) = a_1$ se $x \in U_1$, $\sigma(x) = a_2$ se $x \in U_2$ è un elemento di $\mathcal{A}^+(X)$. Quindi $\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}^+(X)$ non è suriettivo.

Chiaramente $\mathcal{F}_x^+ = \mathcal{F}_x, \forall x \in X$ (ogni germe di sezione di $\mathcal{F}^+$ è un germe di sezione di $\mathcal{F}$ e viceversa). L'interesse per noi è:

Proposizione 2.7. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio di gruppi abeliani. Per ogni morfismo $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$, dove $\mathcal{G}$ è un fascio, esiste uno ed un unico morfismo $\mathcal{F}^+ \xrightarrow{g} \mathcal{G}$, tale che $f = g \circ \theta$.

La coppia $(\mathcal{F}^+, \theta)$ è l'unica coppia (modulo isomorfismo) con questa proprietà.

Definizione 2.8. Sia $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci di gruppi abeliani. I fasci $\text{Im}(\varphi)$, $\text{Coker}(\varphi)$ sono i fasci associati ai prefasci $\text{Im}(\varphi)$, $\text{Coker}(\varphi)$.

Definizione 2.9. Un morfismo di fasci di gruppi abeliani $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è iniettivo se e solo se $\text{Ker}(\varphi) = 0$
 suriettivo se e solo se i fasci $\text{Im}(\varphi)$ e $\mathcal{G}$ sono uguali, cioè se e solo se il fascio $\text{Coker}(\varphi) = 0$.

Con queste definizioni abbiamo:

Proposizione 2.10. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dei fasci di gruppi abeliani su X e sia $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo.

- 1. φ è iniettivo $\Leftrightarrow \varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è iniettivo, $\forall x \in X \Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = 0$
- 2. φ è suriettivo $\Leftrightarrow \varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è suriettivo, $\forall x \in X \Leftrightarrow \text{Coker}(\varphi) = 0$

3. Abbiamo due successioni esatte di fasci ('decomposizione canonica'):

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \text{Im}(\varphi) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\varphi) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{Coker}(\varphi) \rightarrow 0$$

Morale: Per maneggiare morfismi di fasci sempre ragionare sulle spighe (e non sugli aperti).

E cosa succede sugli aperti? Questo è tutta la questione:

Proposizione 2.11. *Sia*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani, allora per ogni aperto $U \subset X$ abbiamo una successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$$

ma l'ultimo morfismo non è necessariamente suriettivo.

Dimostrazione. Prendiamo come punto di partenza: la successione di fasci è esatta $\Leftrightarrow$ è esatta sulle spighe per ogni x .

Siano $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ i morfismi. Visto che la successione è esatta φ è iniettivo quindi φ_x è iniettivo per ogni x . Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varphi_U(s) = 0$. Allora $(\varphi_U(s))_x = 0$. Ma $(\varphi_U(s))_x = \varphi_x(s_x)$. Siccome φ_x è iniettivo, viene $s_x = 0, \forall x$, quindi $s = 0$. Questo mostra $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ esatta.

Mostriamo che $\psi_U \circ \varphi_U = 0$. Se $s \in \mathcal{F}(U)$, allora $\psi_U(\varphi_U(s))_x = \psi_x(\varphi_x(s_x)) = 0$ perché la successione delle spighe è esatta. Quindi $\psi_U(\varphi_U(s)) = 0$ e $\text{Im}(\varphi_U) \subset \text{Ker}(\psi_U)$.

Sia $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ tale che $\psi_U(\sigma) = 0$. Il germe σ_x è l'immagine di qualche germe a_x . Sia (U_i, a_i) un rappresentante del germe a_x ($U_i \subset U$). Allora il germe di $\varphi_{U_i}(a_i) - \sigma|_{U_i}$ è nullo in x . Prendendo un rappresentante vediamo che, restringendo semmai U_i , abbiamo $\varphi_{U_i}(a_i) = \sigma|_{U_i}$. Facendo variare $x \in U$ otteniamo un ricoprimento U_i con $a_i \in U_i$ tali che $\varphi_{U_i}(a_i) = \sigma|_{U_i}$. Abbiamo $\varphi_{ij}(a_i|_{U_{ij}} - a_j|_{U_{ij}}) = 0$. Per la prima parte questo implica $a_i|_{U_{ij}} = a_j|_{U_{ij}}$. Quindi le sezioni a_i si incollano in una sezione $a \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varphi_U(a) = \sigma$. Quindi $\text{Ker}(\psi_U) \subset \text{Im}(\varphi_U)$. $\square$

Vedere l'Esercizio 8 per un esempio in cui l'ultimo morfismo non è suriettivo. La coomologia serve proprio a "misurare", in qualche modo, il difetto di surietività dell'ultimo morfismo.

2.4 I funtori f_* , f^{-1} , f^* .

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici. Se $\mathcal{F}$ è un fascio su X , vogliamo associargli, tramite f , un fascio su Y .

Definizione 2.12. *Con le notazioni precedenti l'immagine diretta di $\mathcal{F}$ è il fascio $f_*\mathcal{F}$ definito da $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ per ogni aperto $V \subset Y$. Le applicazioni di restrizione sono quelle ovvie.*

La cosa ovvia, ma importante, da ricordare è che, per definizione, $\Gamma(Y, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Se $\mathcal{G}$ è un fascio su Y vogliamo associargli, tramite f , un fascio su X (il *pull back*, immagine inversa o anche "tirato su").

Definizione 2.13. *Con le notazioni precedenti, se $\mathcal{G}$ è un fascio su Y , $f^{-1}\mathcal{G}$ è il fascio associato (cf Esercizio 10) al prefascio definito da $U \rightarrow \lim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V)$, per ogni aperto $U \subset X$.*

Osserviamo che f_* è un funtore dalla categoria dei fasci su X nella categoria dei fasci su Y e f^{-1} è un funtore dalla categoria dei fasci su Y nella categoria dei fasci su X . Questi due funtori sono aggiunti cioè esiste una biiezione naturale:

$$\text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Si tratta di una biiezione tra insiemi.

Per dimostrare questo fatto si osserverà che c'è un morfismo naturale $f^{-1}(f_*\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$, per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X .

Infatti $f^{-1}(f_*\mathcal{F})$ è il fascio associato al prefascio $U \rightarrow \lim_{f(U) \subset V} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ e chiaramente $U \subset f^{-1}(V)$ per ogni V tale che $f(U) \subset V$.

C'è anche un morfismo naturale $\mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$ per ogni fascio $\mathcal{G}$ su Y . Infatti $f_*f^{-1}\mathcal{G}(V)'' = \lim_{V \subset W} \mathcal{G}(W)$, le virgolette per ricordare che $f^{-1}\mathcal{G}$ è il fascio associato al prefascio $U \rightarrow \lim_{f(U) \subset V} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Il lato buono di f^{-1} è che $f^{-1}\mathcal{G}_x \simeq \mathcal{G}_{f(x)}$.

Siano $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due varietà algebriche e sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo. Per definizione f trasforma funzioni regolari in funzioni regolari e quindi induce $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. In particolare $f_*\mathcal{O}_X$ diventa così un $\mathcal{O}_Y$ -modulo. Quindi se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo, $f_*\mathcal{F}$ è un $f_*\mathcal{O}_X$ -modulo e quindi un $\mathcal{O}_Y$ -modulo. In questo modo f_* è un funtore dalla categoria degli $\mathcal{O}_X$ -moduli nella categoria dei $\mathcal{O}_Y$ -moduli.

Per f^{-1} non c'è niente di simile ($f^{-1}\mathcal{O}_Y$ non è un $\mathcal{O}_X$ -modulo). Se $\mathcal{G}$ è un $\mathcal{O}_Y$ -modulo, allora $f^{-1}\mathcal{G}$ è un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -modulo. Abbiamo un morfismo naturale

$f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$: quello che corrisponde a $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ tramite l'aggiunzione $\text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$. Possiamo quindi considerare $\mathcal{O}_X$ come un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -modulo. Sia $f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X =: f^*\mathcal{G}$, allora $f^*\mathcal{G}$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo. Questo definisce un funtore f^* dalla categoria degli $\mathcal{O}_Y$ -moduli nella categoria degli $\mathcal{O}_X$ -moduli. I funtori f_* , f^* sono aggiunti ([15], II.5, p. 110).

 ..

Esercizi.

Esercizio 1 Si ricorda che uno spazio topologico X è T_0 se presi due punti $x \neq y \in X$ esiste un aperto contenente uno dei due punti ma non l'altro. Lo spazio X è T_1 se esiste un aperto U_x con $x \in U_x, y \notin U_x$ e se esiste un aperto U_y con $x \notin U_y, y \in U_y$. Finalmente X è T_2 se è di Hausdorff.

- 1) Quale T_i è equivalente al fatto che ogni punto di X sia chiuso?
- 2) Si assume che tutti i punti di X siano chiusi. Sia Z_x l'intersezione di tutti gli aperti che contengono x . Mostrare che $Z_x = \{x\}, \forall x \in X$. ("La collezione degli aperti permette di recuperare X ").
- 3) Se non tutti i punti sono chiusi è ancora vero che $Z_x = \{x\}$ a) per tutti i punti di X , b) per i punti chiusi di X ?

Esercizio 2 Sia $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci di gruppi abeliani. Mostrare che il prefascio $U \rightarrow \text{Ker}(\varphi_U)$ è un fascio di gruppi abeliani.

Esercizio 3 Sia su $X = \mathbb{R}$ (con la topologia euclidea) sia $\mathcal{L}$ il prefascio delle funzioni limitate da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ($\mathcal{L}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata}\}$). Mostrare che $\mathcal{L}$ non è un fascio.

Chi è $\mathcal{L}^+$, il fascio associato a $\mathcal{L}$? E' vero che $\mathcal{L}^+ = \mathcal{F}$, il fascio di tutte le funzioni? (cioè $\mathcal{F}(U) = \{g \mid g : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ è una funzione qualsiasi}\}$.)

Esercizio 4 Sia X uno spazio topologico. Si assumerà che ogni punto $x \in X$ possiede un intorno aperto $U_x \neq X$. Si pone $\mathcal{F}(X) = A$ (A un gruppo abeliano), $\mathcal{F}(U) = 0$, se $U \neq X$, U aperto. Inoltre si pone $r_{VU} = 0$ se $U \neq V$, $r_{UU} = \text{Id}$.

- (i) Mostrare che $\mathcal{F}$ è un prefascio di gruppi abeliani.
- (ii) Determinare $\mathcal{F}_x$ per ogni $x \in X$. E' $\mathcal{F}$ un fascio?
- (iii) Determinare $\mathcal{F}^+$. Concludere che in generale il morfismo di prefasci $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ può non essere suriettivo (risp. iniettivo) sugli aperti. In particolare esistono dei prefasci $\mathcal{G}$ con $s \in \mathcal{G}(X)$, $s \neq 0$, tale che $s_x = 0, \forall x$.

Esercizio 5 Sia $X = \mathbb{P}_k^1$ con la topologia di Zariski e sia A un gruppo abeliano. Per ogni aperto (non vuoto) si pone $\mathcal{F}(U) = \begin{cases} A & \text{se } x \notin U \\ 0 & \text{se } x \in U \end{cases}$. Si definiscono delle applicazioni di restrizione nel modo ovvio (quale?).

- (i) Mostrare che $\mathcal{F}$ è un prefascio.
- (ii) E' $\mathcal{F}$ un fascio?
- (iii) Determinare per ogni $y \in \mathbb{P}_k^1$ la spiga $\mathcal{F}_y^+$ del fascio associato a $\mathcal{F}$.

Esercizio 6 ([15], Ex. 1.14, p. 67)

Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X e sia $s \in \mathcal{F}(U)$, una sezione sull'aperto $U \subset X$. Il supporto di s è definito da: $\text{Supp}(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$ (qui

s_x è il germe di s elemento della spiga $\mathcal{F}_x$). Mostrare che $\text{Supp}(s)$ è chiuso in U .

Il supporto di $\mathcal{F}$ è definito da: $\text{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$. Mostrare che $\text{Supp}(\mathcal{F})$ non è necessariamente chiuso.

Esercizio 7 Sia $X = \{0, 1, 2\}$ e siano $U_1 = \{0, 1\}$, $U_2 = \{0, 2\}$, $U = \{0\}$.

- 1) Mostrare che $\emptyset, X, U_1, U_2, U$ sono gli aperti di una topologia su X .
- 2) Si definisce un prefascio $\mathcal{F}$ su X tramite: $\mathcal{F}(U_i) = \mathbb{Q}[T_i]$, $i = 1, 2$, $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Q}[T_1, T_2]$, $\mathcal{F}(X) = \mathbb{Q}$, $\mathcal{F}(\emptyset) = (0)$. Le applicazioni di restrizione $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W)$ sono le inclusioni (tranne se $W = \emptyset$, in tal caso è l'applicazione nulla). Mostrare che $\mathcal{F}$ è un fascio.
- 3) Si definisce il prefascio $\mathcal{G}$ su X tramite $\mathcal{G}(U_i) = \mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(X) = \mathbb{Q}[T_1]$, $\mathcal{G}(\emptyset) = (0)$. Le applicazioni di restrizione sono l'identità (tranne la restrizione all'insieme vuoto che è l'applicazione nulla). Mostrare che $\mathcal{G}$ è un fascio.
- 4) Sia $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ il morfismo ottenuto mandando T_i su T_1 . Verificare che φ è un morfismo di fasci. Mostrare che il prefascio $V \rightarrow \text{Im}(\varphi_V)$ non è un fascio.

Esercizio 8 (cf [15], Ex. 1.21, p. 68)

Sia X una varietà su un campo algebricamente chiuso k .

- (1) Sia $Y \subset X$ un chiuso. Per ogni aperto $U \subset X$ sia $\mathcal{I}_Y(U)$ l'ideale in $\mathcal{O}_X(U)$ delle funzioni regolari su U che si annullano su $Y \cap U$. Mostrare che $U \rightarrow \mathcal{I}_Y(U)$ è un fascio. Il fascio $\mathcal{I}_Y$ è il fascio d'ideali di Y .
- (2) Il fascio $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$ è isomorfo a $\mathcal{O}_Y$ (più precisamente a $i_*(\mathcal{O}_Y)$ dove $i : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione). Abbiamo quindi una successione esatta: $0 \rightarrow \mathcal{I}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$, chiamata successione di definizione di Y in X .
- (3) Sia $X = \mathbb{P}^1$ e $Y = \{p, q\}$, mostrare che abbiamo una successione esatta:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}_Y) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$$

dove l'ultimo morfismo non è suriettivo (qui $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \simeq \Gamma(X, i_*(\mathcal{O}_Y))$).

- (4) Osservare che se $Z \subset \mathbb{P}^1$ è un chiuso, allora $\Gamma(X, \mathcal{I}_Z) = 0$.

Esercizio 9 ([15], Ex. 1.17, p. 68)

Sia X uno spazio topologico e $p \in X$ un punto. Sia A un gruppo abeliano. Se U è un aperto di X si pone:

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} A & \text{se } p \in U \\ 0 & \text{se } p \notin U \end{cases}$$

mostrare che $\mathcal{F}$ (con le ovvie applicazioni di restrizione) è un fascio. Mostrare che:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} A & \text{se } x \in \overline{\{p\}} \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{\{p\}} \end{cases}$$

Il fascio $\mathcal{F}$ è il fascio gratta-cielo (skyscraper sheaf) in p .

Esercizio 10 *Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Sia $\mathcal{G}$ un fascio su Y . Mostrare che il prefascio su X definito da $U \rightarrow \lim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V)$ non è necessariamente un fascio.*

Una rapidissima introduzione agli schemi.

Scopo di questo capitolo è di introdurre il lettore al linguaggio degli schemi (ma questo non è un corso sugli schemi). Nel seguito lavoreremo nell'ambito delle varietà o meglio delle sotto varietà di $\mathbb{P}_k^n$, k algebricamente chiuso (con $ch(k) = 0$) ma vogliamo avere la libertà, quando ci farà comodo, di usare il linguaggio degli schemi.

3.1 Varietà algebriche reloaded.

Un insieme algebrico affine $X \subset \mathbb{A}_k^n =: k^n$ è il luogo degli zeri (o varietà) di un ideale $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$, cioè $X = \mathbb{V}(I) = \{x \in k^n \mid P(x) = 0, \forall P \in I\}$. Ideali diversi possono definire lo stesso insieme algebrico. Se vogliamo associare ad ogni insieme algebrico X un ideale, allora prendiamo il più grande ideale che definisce X : $\mathbb{I}(X) = \{P \mid P|_X = 0\}$. Quindi $\mathbb{I}(X)$ è l'ideale di tutti i polinomi che si annullano su X . Una varietà affine è un sotto insieme affine irriducibile (non si scrive come l'unione di due sotto insiemi algebrici propri, non vuoti). Si dimostra che X è irriducibile se e solo se $\mathbb{I}(X)$ è primo. Se k è algebricamente chiuso, per il teorema degli zeri di Hilbert, abbiamo una corrispondenza biunivoca:

$$\{\text{ideali primi di } k[x_1, \dots, x_n]\} \leftrightarrow \{\text{varietà affini di } \mathbb{A}_k^n\}$$

In questa corrispondenza i punti corrispondono agli ideali massimali:

$$\{\text{ideali massimali di } k[x_1, \dots, x_n]\} \leftrightarrow \{\text{punti di } \mathbb{A}_k^n\}$$

Se k non è algebricamente chiuso non c'è una corrispondenza biunivoca tra ideali massimali e punti di $\mathbb{A}_k^n$.

Fino alla fine di questa sezione k indica un campo algebricamente chiuso

Si possono svolgere considerazioni analoghe nel proiettivo e definire le sotto varietà proiettive $X \subset \mathbb{P}_k^n$. Ci sono alcune differenze:

- bisogna considerare polinomi omogenei (se P è un polinomio non omogeneo, non ha senso chiedersi se P si annulla o meno in un punto di $\mathbb{P}_k^n$)
- un polinomio omogeneo non definisce una funzione su $\mathbb{P}^n$, ma ha senso chiedersi se è zero o meno in un punto, quindi $\mathbb{V}(P)$ ha senso e quindi anche $\mathbb{V}(I)$ se I è un ideale omogeneo (i.e. generato da polinomi omogenei).
- per avere una funzione su $\mathbb{P}^n$ bisogna considerare P/Q omogenei, dello stesso grado. Ovviamente una tale funzione (*funzione razionale*) non è definita (*regolare*) se $Q(x) = 0$.

Questo ci fa pensare che le funzioni polinomiali (inesistenti, anche localmente, sul proiettivo) non sono le "buone" funzioni, ma che bisognerebbe invece considerare le funzioni razionali *regolari*...

In $\mathbb{A}_k^n$ (risp. $\mathbb{P}_k^n$) i sotto insiemi algebrici sono i chiusi della *topologia di Zariski*. Ogni sotto varietà $X \subset \mathbb{A}_k^n$, prende la topologia indotta.

Sia X una varietà algebrica (affine o proiettiva), ci rimane da dire chi sono le "buone funzioni" $U \rightarrow k$ per ogni aperto $U \subset X$. Fatto questo un morfismo (algebrico) tra due varietà $\varphi : X \rightarrow Y$ sarà un'applicazione continua che trasforma "buone funzioni" in "buone funzioni". Cioè se $\mathcal{O}_X(U)$ è l'insieme delle "buone" (diremo *regolari*) funzioni su $U \subset X$, allora per ogni $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$.

Come in geometria differenziabile, analitica vogliamo che la nozione di funzione regolare sia una nozione *locale*. Inoltre vogliamo che sia verificata la seguente proprietà: se f è regolare in x , con $f(x) \neq 0$, allora $1/f$ è regolare in x . Questo implica che l'anello dei germi di funzioni regolari in x è un anello locale (Esercizio 11).

E' chiaro che le funzioni polinomiali non fanno il lavoro: se $P(x) \neq 0$, $1/P$ non è una funzione polinomiale in un intorno di x , ma è una funzione razionale, regolare, in un intorno di x . Questo giustifica la seguente:

Definizione 3.1. Sia $X \subset k^n$ una varietà affine e sia $U \subset X$ un aperto. Una funzione $f : U \rightarrow k$ è regolare in $x \in U$ se esiste un intorno aperto di x , $V \subset U$ e una funzione razionale, P/Q , regolare su V (i.e. $Q(y) \neq 0, \forall y \in V$), tale che $f = P/Q$ su V . La funzione è regolare su U se è regolare in $x, \forall x \in U$.

Indicheremo con $\mathcal{O}_X(U)$ l'insieme delle funzioni regolari su U .

Nel caso proiettivo abbiamo una definizione analoga, tenendo conto che una funzionale razionale P/Q è il quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado.

L'assegnazione $U \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ definisce su X il fascio delle funzioni regolari.

Nel caso affine si dimostra (Esercizio 12) che se X è una varietà, allora:

$$\mathcal{O}_X(X) \simeq k[x_1, \dots, x_n]/\mathbb{I}(X) =: A(X).$$

Osserviamo che $A(X)$ è l'insieme delle restrizioni a X delle funzioni polinomiali. Alcuni testi prendono questo risultato come punto di partenza, ma è fuorviante.

Se $X \subset \mathbb{A}_k^n$ è una sotto varietà affine, l'anello quoziente

$$A(X) = k[x_1, \dots, x_n]/\mathbb{I}(X)$$

è una k -algebra finitamente generata, integra. Si dimostra che $X \subset \mathbb{A}_k^n$, $Y \subset \mathbb{A}_k^m$ sono due varietà affini isomorfe se e solo se $A(X) \simeq A(Y)$ come k -algebre. Abbiamo quindi un'equivalenza di categoria tra la categoria opposta delle varietà affini e la categoria delle k -algebre finitamente generate, integre. Più generalmente abbiamo un'equivalenza di categorie tra la categoria opposta degli insiemi algebrici e la categoria delle k -algebre finitamente generate, ridotte (senza elementi nilpotenti).

Nel caso proiettivo, l'anello delle coordinate $A(X)$ *dipende dall'immersione* $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$.

Nel seguito una varietà (affine o proiettiva) è un sotto insieme algebrico $X \subset \mathbb{A}_k^n$ (risp. $X \subset \mathbb{P}_k^n$) irriducibile (quindi $\mathbb{I}(X)$ primo) (dove k è algebricamente chiuso).

3.2 Schemi affini: definizione.

La restrizione $k = \bar{k}$ è molto forte per chi sogna di usare metodi geometrici in teoria dei numeri: bisognerebbe potere lavorare su un campo qualsiasi, vedi un anello qualsiasi. Dopo vari tentativi (Zariski, Weil, Nagata e altri) con classi di anelli più generali, Grothendieck si è accorto che la teoria più naturale si otteneva senza porre alcuna limitazione al tipo di anello considerato.

Si tratta quindi di associare ad ogni anello commutativo (con unità), A , un oggetto geometrico ("varietà"), X , con un fascio di funzioni ("le buone funzioni"), $\mathcal{O}_X$ che generalizza le varietà affini.

Esaminando il caso classico ($A = k[x_1, \dots, x_n]$) viene da pensare che i *punti* della nostra varietà dovrebbero "essere" gli ideali massimali di A . Questo però non va bene perché la contr'immagine di un ideale massimale, in generale, non è un ideale massimale. Infatti sia $i : A \hookrightarrow K$, dove A è un anello integro e dove K è il suo campo delle frazioni, allora (0) è massimale in K , ma $i^{-1}(0)$ è primo, non massimale in A . Invece la contr'immagine di un ideale primo è sempre un ideale primo. Poniamo quindi $X = \text{Spec}(A)$, l'insieme degli ideali primi di A .

Il trucco adesso è di pensare ad un elemento $f \in A$ come a una funzione polinomiale.

Se $\mathfrak{p} = x \in X = \text{Spec}(A)$, allora $f \in A$,
si annulla in x se e solo se $f \in \mathfrak{p}$.

Questo è consistente con il caso classico: un polinomio P si annulla nel punto $x \Leftrightarrow P \in \mathbb{I}(x) = \mathfrak{m}_x$.

Quindi $f \in A$ determina l'ipersuperficie $\mathbb{V}(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid f \in \mathfrak{p}\}$ (è esattamente l'analogo di $\{x \mid f(x) = 0\}$).

Più generalmente se $I \subset A$ è un ideale, il luogo degli zeri (la varietà) di I è $\mathbb{V}(I) = \{\mathfrak{p} \mid I \subset \mathfrak{p}\} = \{x = \mathfrak{p} \mid f(x) = 0, \forall f \in I\}$ (in completa analogia con la definizione "classica" di sotto insieme algebrico).

Come nel caso classico si verifica che i $\mathbb{V}(I)$ sono i chiusi di una topologia su $X = \text{Spec}(A)$. Il complementare dell'ipersuperficie $\mathbb{V}(f)$ è $D(f) = \{\mathfrak{p} \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Si verifica (Esercizio 13) che al variare di f in A , i $D(f)$ sono una base di aperti. Questa topologia è la *topologia di Zariski* su $\text{Spec}(A)$.

La topologia di Zariski su $\text{Spec}(A)$ è ancora più strana della topologia di Zariski nel caso classico. Intanto un punto $x = \mathfrak{p} \in X = \text{Spec}(A)$ è chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è un ideale massimale. Infatti abbiamo $\overline{\{x\}} = \mathbb{V}(\mathfrak{p})$ (Esercizio 14).

Per esempio se $A = \mathbb{Z}$, i punti di $X = \text{Spec}(A)$ sono gli ideali primi (e massimali) (p) (p un numero primo) e l'ideale (0) . Un punto x è chiuso se e solo se $x = (p)$ per un qualche numero primo p . Sia $\xi = (0)$. Abbiamo $\overline{\{\xi\}} = \mathbb{V}((0)) = \{\mathfrak{p} \mid (0) \subset \mathfrak{p}\} = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Abbiamo un punto la cui aderanza è tutto lo spazio! Si dice che ξ è il *punto generico* di X (Esercizio 14).

Finora abbiamo associato al nostro anello A uno spazio topologico $X = \text{Spec}(A)$, rimane da definire le "buone funzioni". L'idea è di ricalcare la situazione nel caso classico dove se U è un aperto di $\mathbb{A}_k^n$, si pone $\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow k \mid f \text{ è regolare su } U\}$. Si ricorda che f è regolare su U se f è localmente una *funzione razionale*, definita, regolare ($\forall x \in U, \exists V_x$ aperto, $x \in V_x \subset U$, tale che $f = P/Q$ su V_x , con $Q(y) \neq 0, \forall y \in V_x$).

Visto che abbiamo assimilato una funzione polinomiale a un elemento di A , una funzione razionale dovrebbe essere un quoziente f/g di elementi di A e la nostra funzione è definita in $x = \mathfrak{p}$ se $g(x) \neq 0$, cioè se $g \notin \mathfrak{p}$. In particolare l'anello dei germi in x dovrebbe essere $\mathcal{O}_x = \{f/g \mid f, g \in A, g \notin \mathfrak{p}\}$, con le solite identificazioni tra frazioni. Beh, è quasi così, ma c'è un piccolo particolare: se A non è integro, non c'è un campo dei quozienti! Ma noi non abbiamo bisogno del campo dei quozienti ("delle funzioni razionali"), ma solo di potere invertire, localmente in x , le funzioni polinomiali che non si annullano in x e questo lavoro lo fa benissimo, algebricamente, il *localizzato* di A in $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$. Infatti si ricorda che $A_{\mathfrak{p}} = \{f/g \mid f, g \in A, g \notin \mathfrak{p}\}$, dove $f/g = h/t \Leftrightarrow \exists s \notin \mathfrak{p}$ tale che $s(ft - gh) = 0$.

L'anello $A_{\mathfrak{p}}$ è un *anello locale*, cioè ha un unico ideale massimale (è $\mathfrak{m} = \{a/b \mid a \in \mathfrak{p}\}$). Abbiamo quindi $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m} \simeq k(\mathfrak{p})$, dove $k(\mathfrak{p})$ è un campo (*campo residuo* nel punto $\mathfrak{p}$). Il campo $k(\mathfrak{p})$ è il campo dei quozienti dell'anello integro $A/\mathfrak{p}$ (Esercizio 15).

C'è un morfismo canonico $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}} : a \rightarrow a/1$. Per composizione $A \rightarrow k(\mathfrak{p})$. Vediamo che $f \in A$ ha un'immagine nulla in $k(\mathfrak{p})$ se e solo se $f \in \mathfrak{p}$, questo giustifica quanto detto prima. Abbiamo indovinato che la spiga del fascio $\mathcal{O}_X$ nel punto $\mathfrak{p}$ è l'anello locale $A_{\mathfrak{p}}$, a questo punto possiamo ricalcare la definizione classica:

Definizione 3.2. Se $U \subset X$ è un aperto si pone $\mathcal{O}_X(U) = \{s \mid s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}, \text{ tali che } s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}} \text{ e tale che } s \text{ sia localmente il quoziente di due elementi di } A. \text{ Cioè per ogni } \mathfrak{p} \in U \text{ esiste un aperto } V \subset U \text{ contenente } \mathfrak{p} \text{ e degli elementi } a, b \in A, \text{ tali che per ogni } \mathfrak{q} \in V, b \notin \mathfrak{q} \text{ e } s(\mathfrak{q}) = a/b \text{ in } A_{\mathfrak{q}}.$

Con questa definizione è chiaro che $\mathcal{O}_X$ è un fascio. Questa definizione ricalca il caso classico: una funzione regolare è localmente una funzione razionale regolare (cioè definita). La spiga di $\mathcal{O}_X$ nel punto $x = \mathfrak{p}$ è $A_{\mathfrak{p}}$ ([15], II. Prop. 2.2).

Se $D(f)$ è un aperto elementare, allora ([15], II. Prop. 2.2): $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f = \{g/f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, con $g/f^n = h/f^m \Leftrightarrow \exists t$ tale che $f^t(gf^m - hf^n) = 0$. In particolare:

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(D(1)) = A$$

Per riassumere: ad ogni anello commutativo A abbiamo associato uno spazio topologico $X = \text{Spec}(A)$ e un fascio $\mathcal{O}_X$ le cui spighe sono anelli locali.

Definizione 3.3. Uno schema affine è uno spazio localmente annellato $(Y, \mathcal{O}_Y)$ isomorfo (in quanto spazio localmente annellato) a $(X = \text{Spec}(A), \mathcal{O}_X)$ per un qualche anello commutativo A .

Uno spazio localmente anellato è una coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ dove X è uno spazio topologico e dove $\mathcal{O}_X$ è un fascio di anelli le cui spighe sono anelli locali.

Un morfismo di spazi anellati $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è una coppia $(f, f^\#)$, dove $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione continua e dove $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ è un morfismo di fasci. Nel caso di spazi localmente anellati si richiede che $f^\#$ sia un *morfismo locale*. Se A, B sono anelli locali un morfismo $\varphi : A \rightarrow B$ è locale se $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$. Adesso $f^\#$ induce $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ($y = f(x)$) e si richiede che questo morfismo di anelli locali sia locale.

Un isomorfismo è un morfismo con un inverso (a destra e a sinistra), quindi $(f, f^\#)$ è un isomorfismo se f è un omeomorfismo e se $f^\#$ è un isomorfismo di fasci.

Siano A, B due anelli e $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo di anelli. Usando φ possiamo definire $f : X = \text{Spec}(B) \rightarrow Y = \text{Spec}(A)$, tramite $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Si verifica che f è continua (Esercizio 19).

Per definire $f^\#$, poniamo $x = \mathfrak{p}$ e $y = f(x) = \mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Basta dare il morfismo indotto $\mathcal{O}_{Y,y} = A_{\mathfrak{q}} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} = B_{\mathfrak{p}}$. Questo non è altro che il localizzato di φ : $A_{\mathfrak{q}} = \{a/c \mid c \notin \mathfrak{q}\} \rightarrow B_{\mathfrak{p}} = \{b/d \mid d \notin \mathfrak{p}\} : a/c \rightarrow \varphi(a)/\varphi(c)$.

Più precisamente se V è un aperto di $Y = \text{Spec}(A)$, abbiamo $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) : s \rightarrow s'$, dove $s' : f^{-1}(V) \rightarrow \sqcup_{\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)} B_{\mathfrak{q}}$ è definita nel modo seguente: se $\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)$, $f(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \in V$, cioè $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Abbiamo allora $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}} : a/c \rightarrow \varphi(a)/\varphi(c)$. Abbiamo $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ e si pone $s'(\mathfrak{q}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{p}))$.

Viceversa si dimostra (cf [15] II. prop. 2.3) che ogni morfismo di schema affine $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ proviene da un morfismo di anelli $A \rightarrow B$.

Abbiamo quindi la categoria degli schemi affini e vediamo che questa categoria è equivalente alla categoria opposta della categoria degli anelli commutativi (slurp! la geometria algebrica si è mangiata l'algebra commutativa!).

E' opportuno osservare che uno schema (affine) è una coppia composta da uno spazio topologico X e da un fascio $\mathcal{O}_X$ (detto *fascio strutturale*). Di solito si indica con X uno schema ($\mathcal{O}_X$ è sottinteso) e si intende uno spazio topologico (certe volte indicato con $sp(X)$ o $|X|$) con un fascio di funzioni.

Schemi diversi possono avere lo stesso spazio topologico. Per esempio tutti i campi k danno luogo allo stesso spazio topologico: $\{\star\}$, infatti l'unico ideale primo di un campo è (0) . Ma se $k \neq K$, gli schemi $X = \text{Spec}(k)$, $Y = \text{Spec}(K)$ non sono isomorfi (perché $\mathcal{O}_X(X) = k$, $\mathcal{O}_Y(Y) = K$).

3.3 Schemi: primi esempi.

Una varietà algebrica, X , è uno spazio localmente annellato tale che ogni punto $x \in X$ abbia un intorno aperto U tale che $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ sia isomorfo a una varietà affine. In modo analogo:

Definizione 3.4. *Uno schema è uno spazio localmente annellato $(X, \mathcal{O}_X)$ tale che per ogni punto $x \in X$ esista un aperto U contenente x tale che $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ sia isomorfo (come spazio localmente annellato) a uno schema affine.*

Quindi uno schema si ottiene "incollando" degli schemi affini (per incollare si usano i fasci, come nel caso delle varietà di Serre).

Iniziamo a fare alcuni esempi (in un primo tempo solo schemi affini) per mettere in evidenza alcune peculiarità degli schemi.

- Abbiamo assimilato elementi $f \in A$ a "funzioni" polinomiali su $X = \text{Spec}(A)$. Queste funzioni in un punto $x = \mathfrak{p}$ prendono i loro valori nel campo residuo $k(\mathfrak{p})$. Infatti nel caso "classico" $A = k[x_1, \dots, x_n]$, $x = (a_1, \dots, a_n)$, il campo residuo è $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}_x \simeq k$ ($\mathfrak{m}_x = ((x_1 - a_1), \dots, (x_n - a_n))$) e il valore in x di un polinomio è proprio $P(x) \in k$.

In generale la situazione è diversa. Sia, per esempio, $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Il campo residuo nel punto (chiuso) $x = (p)$ è $\mathbb{F}_p$. Quindi le nostre "funzioni" $f \in \mathbb{Z}$ prendono i loro valori in campi variabili (cioè f non è una funzione!). Quindi il valore di f in un punto non gioca un ruolo rilevante, quello che conta invece è dire se f si annulla o meno in $x = \mathfrak{p}$.

- Il piano affine. Sia $A = k[x, y]$, k algebricamente chiuso. Il piano affine su k è $\text{Spec}(A)$. Gli ideali primi di A sono di tre tipi:
 - (a) $\mathfrak{m}_x$, ideale massimale corrispondente al punto $x = (a_1, a_2)$
 - (b) $\mathfrak{p} = (F)$ ideale principale corrispondente a un polinomio irriducibile $F \in k[x, y]$ (F definisce una curva C_F irriducibile, ridotta)
 - (c) l'ideale nullo (0) .

Solo i punti $\mathfrak{m}_x$ sono chiusi. La chiusura di un punto $\mathfrak{p} = (F)$ è, oltre al punto stesso, i punti chiusi della curva C_F . Il punto $\eta = \mathfrak{p}$ è il *punto generico* della curva C_F .

Finalmente la chiusura del punto $\xi = (0)$ è tutto il piano, ξ è il punto generico. L'anello locale al punto generico $\mathcal{O}_\xi$ è $k(x, y)$, il campo delle funzioni razionali (ed è anche il campo residuo al punto generico).

- Più generalmente se A è un anello integro, $X = \text{Spec}(A)$ ha un punto generico (cioè un punto la cui chiusura è tutto X) $\xi = (0)$. L'anello locale $\mathcal{O}_\xi$ è il campo dei quozienti di A (ed è anche il campo residuo in ξ).

• Sia $A = k[x]/(x^2) =: k[\varepsilon]$ (ε è la classe di x). L'anello A ha un unico ideale primo (ε) che è quindi massimale, pertanto A è un anello locale. Lo spazio topologico $\text{Spec}(A)$ è ridotto a un punto ma l'anello "delle funzioni", A , ha un elemento nilpotente: $\varepsilon \neq 0$, con $\varepsilon^2 = 0$. L'introduzione di funzioni nilpotenti è una novità che ha fatto scalpore. Lo schema, non ridotto, $X = \text{Spec}(A)$ è molto utile: è un vettore tangente "libero".

• Un morfismo di schemi $f : Y \rightarrow X$ è un'immersione chiusa se f induce un omeomorfismo tra Y e un chiuso di X e se il morfismo $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ è suriettivo. Un sotto schema chiuso Y di X è una classe d'equivalenza di immersioni chiuse $f : Y \rightarrow X$ ($g : Y' \rightarrow X$ è equivalente a f se esiste un isomorfismo $Y \xrightarrow{j} Y'$ tale che $f = g \circ j$).

• Sia $X = \text{Spec}(A)$ e sia $I \subset A$ un ideale. L'inclusione $I \hookrightarrow A$ induce $A \twoheadrightarrow A/I$ e quindi un morfismo di schemi $Z = \text{Spec}(A/I) \xrightarrow{\varphi} X = \text{Spec}(A)$. Si verifica (Esercizio 20) che φ è un'immersione chiusa. Pertanto Z è un sotto schema chiuso di X . I punti di Z sono gli ideali primi di A/I cioè gli ideali primi di A che contengono I , cioè i punti di $\mathbb{V}(I)$. Quindi φ stabilisce un omeomorfismo tra Z e il chiuso $\mathbb{V}(I)$ di X (Esercizio 20). Quindi per ogni ideale $I \subset A$, il chiuso $\mathbb{V}(I)$ arriva con una struttura di sotto schema chiuso. Da notare che un chiuso $Z \subset X$ ha varie strutture di sotto schema chiuso, corrispondenti agli ideali I tali che $\mathbb{V}(I) = Z$.

Si dimostra ([15], II. Cor. 5.10) che ogni sotto schema chiuso di $\text{Spec}(A)$ è della forma $\text{Spec}(A/I)$ per un qualche ideale $I \subset A$.

Per esempio ($k = \bar{k}$) una curva piana affine $C \subset \mathbb{A}_k^2$ è un sotto schema chiuso corrispondente ad un ideale principale (F) dove $F \in k[x, y]$ è un polinomio. Per esempio le curve definite da x e x^2 sono diverse (come schemi). Nel primo caso la curva è $\text{Spec}(k[y]) \simeq \mathbb{A}_k^1$, nel secondo caso invece è $\text{Spec}(k[x, y]/(x^2))$, quindi $\mathcal{O}_C(C) = k[x, y]/(x^2)$ ha un elemento nilpotente (la classe di x): questa curva è una *retta doppia* nel piano affine (o il *primo intorno infinitesimale* della retta $x = 0$ nel piano). Dal punto di vista classico (cioè guardando solo ai punti chiusi e agli ideali radicali) $\mathbb{V}(x) = \mathbb{V}(x^2)$, l'ideale (x^2) viene ignorato (perché non radicale) e si considera solo l'ideale $(x) = \mathbb{I}(R)$, cioè si considera solo la retta "semplice" R di equazione $x = 0$.

Sia $L \subset \mathbb{A}_k^2$ la retta di equazione $y = 0$. Sia D la retta di equazione $x = 1$. Per ogni punto $P = (1, y)$ della retta D , con $y \neq 0$, denotiamo con D_P la retta passante per l'origine e per il punto P . Finalmente sia $X_P = L \cup D_P$ (fare un disegno). La curva X_P è l'unione di due rette distinte. Abbiamo così una famiglia, parametrizzata da $D \setminus \{(1, 0)\} \simeq k \setminus \{0\}$, la cui fibra sopra $y \in k^*$ è X_P con $P = (1, y)$. Qual'è il limite quando $y \rightarrow 0$? Ragionando nel modo "classico" viene da dire che il limite è la retta L di equazione $y = 0$. Ragionando

geometricamente, ci viene da dire che il limite è la retta L *contata due volte*. Infatti questa situazione ci sembra assolutamente analoga alla definizione della tangente a una curva regolare (non singolare) C in un punto x_0 . La tangente $T_{x_0}C$ è il limite quando $p \rightarrow x_0$ delle rette $\langle p, x_0 \rangle$. In particolare se C è non singolare $T_{x_0}C \cap C = 2x_0$, in un intorno di x_0 . Per esempio se $C \subset \mathbb{A}_k^2$ è la parabola di equazione $y = x^2$, la tangente nell'origine è la retta $y = 0$ e l'equazione $y = x^2$ per $y = 0$ si riduce a $x^2 = 0$, che ha una radice doppia (e non una radice semplice).

In conclusione il limite della nostra famiglia di rette dovrebbe essere "la retta L con molteplicità due". Nel caso "classico" (varietà di Serre) un tale limite non esiste. Esiste invece nell'ambito degli schemi (vedremo poi come rendere rigorosa questa affermazione con il concetto di *morfismo piatto*, *famiglie piatte*).

Il linguaggio degli schemi permette di dare risposte naturali a questioni altrettanto naturali (e fondamentali) poste nell'ambito classico.

Esercizi.

Esercizio 11 Sia A un anello e $I \subset A$, $I \neq (1)$, un ideale tale che ogni elemento di $A \setminus I$ sia invertibile. Allora A è un anello locale e I è l'unico ideale massimale di A .

Esercizio 12 1) Sia $X \subset \mathbb{A}_k^n$ una varietà affine (k algebricamente chiuso). Sia $\mathbb{I}(X)$ il suo ideale di definizione (quindi $\mathbb{I}(X)$ è primo).

Dimostrare che $\mathcal{O}_X(X) \simeq k[x_1, \dots, x_n]/\mathbb{I}(X) =: A(X)$. E' ancora vero questo risultato se k non è algebricamente chiuso?

2) Sia $X \subset \mathbb{A}_k^n$ un sotto insieme algebrico (non necessariamente irriducibile). Dimostrare che $\dim_k A(X) < \infty$ se e solo se X è un insieme di punti (in questo caso $\#(X) = \dim_k A(X)$).

Esercizio 13 1) Sia $X = \text{Spec}(A)$. Mostrare che i $D(f)$, al variare di f in A , formano una base della topologia di X .

3) Mostrare che X è quasi-compatto.

Esercizio 14 1) Sia $X = \text{Spec}(A)$ e $x = \mathfrak{p}$ un punto di X . Mostrare che $\overline{\{x\}} = \mathbb{V}(\mathfrak{p})$. Concludere che il punto x è chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è massimale.

2) Più generalmente sia $Y \subset X = \text{Spec}(A)$. Sia $I = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$. Mostrare che $\overline{Y} = \mathbb{V}(I)$.

3) Mostrare che X è T_0 (Esercizio 1).

4) Se A è integro mostrare che la chiusura del punto $\xi = (0)$ (ideale primo nullo) è tutto X . Si dice che ξ è il punto generico di X . In particolare $\mathcal{O}_\xi$ è il campo dei quozienti di A . Osservare che ξ appartiene ad ogni aperto non vuoto di X (quindi X non è T_1). Si suppone che A non è un campo. Dire se ξ può essere aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 15 Sia A un anello e $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo. Mostrare che il campo residuo dell'anello locale $A_\mathfrak{p}$ è il campo dei quozienti dell'anello integro $A/\mathfrak{p}$.

Descrivere i punti di $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ e i loro campi residui.

In generale per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, abbiamo dei morfismi canonici: $A \rightarrow A_\mathfrak{p} \rightarrow \kappa(\mathfrak{p})$ (qui $\kappa(\mathfrak{p})$ indica il campo residuo di $A_\mathfrak{p}$). L'immagine di $f \in A$ in $\kappa(\mathfrak{p})$ è il valore di f in $x = \mathfrak{p}$. Vediamo così che le nostre "funzioni polinomiali" $f \in A$ su $\text{Spec}(A)$ non sono vere funzioni (prendono i loro valori in spazi variabili, guardare l'esempio di $\text{Spec}(\mathbb{Z})$).

Esercizio 16 (cf [1], Es. 22, Cap. 1)

Si ricorda che un elemento e dell'anello A è idempotente se $e^2 = e$. Sia A un anello e $X = \text{Spec}(A)$. Mostrare che le condizioni seguenti sono equivalenti:

1) X è sconnesso

- 2) *Esiste un idempotente $e \neq 0, 1$*
- 3) *$A \simeq A_1 \times A_2$.*

Esercizio 17 ([1], Es. 12, Cap. 1)

Mostrare che un anello locale non contiene nessun elemento idempotente $e \neq 0, 1$. Concludere che se A è un anello locale, allora $\text{Spec}(A)$ è connesso.

3.4 $Proj(S)$, S anello graduato.

Veniamo adesso al primo esempio di uno schema non affine, che generalizza lo spazio proiettivo e quindi considerando i sotto schemi, le varietà proiettive.

Sia $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$, un anello graduato. Quindi S è un anello con una decomposizione in somma diretta di gruppi abeliani S_d , tale che $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$. La teoria si può svolgere per un anello graduato qualsiasi ma nel seguito ci limiteremo a considerare il caso base: $S = k[x_0, \dots, x_n]$, con $S_d = k[x_0, \dots, x_n]_d$, l'insieme dei polinomi omogenei di grado d (con lo zero). Quindi $S_0 = k$ e S è generato da i suoi elementi di grado uno.

Sia $S_+ = \bigoplus_{i > 0} S_i$, l'ideale massimale irrilevante. Come insieme $Proj(S) = \{\mathfrak{p} \subset S \mid \mathfrak{p} \text{ ideale primo omogeneo, } S_+ \not\subset \mathfrak{p}\}$.

Se $I \subset S$ è un ideale omogeneo si pone $V(I) = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$. Come nel caso classico i $V(I)$ sono i chiusi di una topologia su $Proj(S)$, la *topologia di Zariski*. Rimane da definire un fascio di funzioni.

Nel caso classico un polinomio $P \in S = k[x_0, \dots, x_n]$ non solo non definisce una funzione $\mathbb{P}^n \rightarrow k$ ma non ha neanche senso chiedersi se si annulla o meno in un punto p di $\mathbb{P}^n$. Un polinomio *omogeneo*, P , non definisce neanche lui una funzione ma ha senso chiedersi se è zero o meno, cioè $V(P)$ è definito. Per avere una funzione su $\mathbb{P}^n$ bisogna considerare P/Q dove P, Q sono due polinomi *omogenei, dello stesso grado*. Chiaramente questa funzione è definita (regolare) solo se $Q(x) \neq 0$. Quindi se $U \subset \mathbb{P}^n$ è un aperto, una funzione f è regolare su U se e solo se è *localmente* un quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado ($\forall x \in U, \exists V_x, x \in V_x \subset U, V_x$ aperto tale che $f = P/Q$ su V_x , con $Q(y) \neq 0, \forall y \in V_x$). Dopo questo piccolo ripasso, cerchiamo di fare esattamente la stessa cosa su $Proj(S)$.

Sia $\mathfrak{p} \in Proj(S)$ e sia T l'insieme degli elementi *omogenei* che non appartengono a $\mathfrak{p}$. L'insieme T è una parte moltiplicativa. Possiamo quindi localizzare rispetto a T . Finalmente sia $S_{(\mathfrak{p})}$ l'insieme degli elementi di grado zero nel localizzato $T^{-1}S$. Quindi $S_{(\mathfrak{p})} = \{m/n \mid n \in T; m, n \text{ omogenei, dello stesso grado}\}$.

Sia $U \subset Proj(S)$ un aperto, allora $\mathcal{O}(U)$ è l'insieme delle funzioni $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})}$, tali che $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$ e tale che s sia localmente una funzione razionale regolare, cioè: $\forall \mathfrak{p} \in U, \exists V$, intorno aperto di $\mathfrak{p}$, contenuto in U , $m, n \in S$ elementi omogenei dello stesso grado, $n \notin \mathfrak{q}, \forall \mathfrak{q} \in V$, e con $s(\mathfrak{q}) = m/n \in S_{(\mathfrak{q})}$. Questo definisce un fascio $\mathcal{O}$ su $Proj(S)$.

Definizione 3.5. *Nel seguito si indicherà con $Proj(S)$ lo spazio annellato $(Proj(S), \mathcal{O})$ costruito qui sopra.*

Rimane da vedere che $Proj(S)$ è uno schema, cioè che ogni punto ha un intorno aperto che è uno schema affine. Si tratta quindi di "tradurre" l'operazione ben nota di considerare le carte affini del proiettivo.

Proposizione 3.6. *Con le notazioni precedenti:*

- (a) La spiga $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ è isomorfa all'anello locale $S_{(\mathfrak{p})}$
- (b) Per ogni elemento omogeneo $f \in S_+$, sia $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Allora $D_+(f)$ è aperto in $Proj(S)$ e

$$(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \simeq Spec(S_{(f)})$$

dove $S_{(f)}$ è l'insieme degli elementi di grado zero di S_f . Inoltre gli aperti $D_+(f)$ ricoprono $Proj(S)$

- (c) $Proj(S)$ è uno schema.

Dimostrazione. Il punto (a) è simile al caso affine. Chiaramente $D_+(f)$ è il complementare dell'ipersuperficie $V(f) = \{\mathfrak{p} \mid f \in \mathfrak{p}\}$, quindi $D_+(f)$ è aperto. Se $\mathfrak{p} \in Proj(S)$, siccome $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$, esiste $f \in S_+$, tale che $f \notin \mathfrak{p}$, quindi $\mathfrak{p} \in D_+(f)$.

Abbiamo la mappa naturale $S \rightarrow S_f$, se $I \subset S$ è un ideale omogeneo possiamo considerare $IS_f \cap S_{(f)}$ (gli elementi di grado zero in IS_f). Questo definisce $\varphi : D_+(f) \rightarrow Spec(S_{(f)})$. Si mostra che φ è un omeomorfismo e che induce tra i fasci un isomorfismo $\varphi^\#$. Vedere [15], II. Prop. 2.5.

Il punto (c) segue da (a) e (b). □

Osservazione 3.7. Questa costruzione può essere svolta per ogni anello graduato S (ma se S non è generato da i suoi elementi di grado uno, il risultato potrebbe essere diverso da quanto uno si aspetta). In particolare se A è un anello qualsiasi si può considerare $S = A[x_0, \dots, x_n]$. In questo caso $Proj(S)$ si indica con $\mathbb{P}_A^n$, l' n -spazio proiettivo su A . Se $A = k$ è un campo l'insieme dei punti chiusi di $Proj(S)$ è omeomorfo alla varietà $\mathbb{P}_k^n$.

Esercizi.

Esercizio 18 1) Sia $X = \text{Spec}(A)$. Se $I \subset A$ è un ideale, mostrare che $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\sqrt{I})$ (attenzione: è una questione puramente topologica, i sotto schemi associati a I e $\sqrt{I}$ sono diversi in generale).

2) Sia $\Phi : A \rightarrow B$ un morfismo di anelli e sia $\varphi : Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$, l'applicazione indotta ($f(\mathfrak{q}) = \Phi^{-1}(\mathfrak{q})$). Mostrare che se $\mathfrak{b} \subset B$ è un ideale, allora $\overline{\varphi(\mathbb{V}(\mathfrak{b}))} = \mathbb{V}(\Phi^{-1}(\mathfrak{b}))$.

Esercizio 19 Sia $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo di anelli e sia $\psi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ il morfismo corrispondente. Mostrare che ψ è un'applicazione continua.

Esercizio 20 Sia $\Phi : A \twoheadrightarrow B$ un morfismo suriettivo di anelli. Sia $\varphi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ il morfismo indotto. Mostrare che φ induce un omeomorfismo da $\text{Spec}(A/I)$ su $\mathbb{V}(I)$, dove $I = \text{Ker}(\Phi)$.

In particolare se $I \subset A$ è un ideale, abbiamo $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$, che induce $\text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec}(A)$, il quale induce un omeomorfismo tra $\text{Spec}(A/I)$ e $\mathbb{V}(I)$. Adesso $Z = \text{Spec}(A/I) \simeq \mathbb{V}(I)$ ha il suo fascio strutturale $\mathcal{O}_Z$. Il morfismo $A \twoheadrightarrow A/I$ induce $A_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow (A/I)_{\mathfrak{p}}$, cioè un morfismo suriettivo $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Z$ (più precisamente $\mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Z)$, dove $i : Z \simeq \mathbb{V}(I) \hookrightarrow X$ è l'inclusione). In conclusione l'ideale I definisce una struttura di sotto schema chiuso sul chiuso $\mathbb{V}(I)$. Se $I \neq J$ sono due ideali tali che $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(J) = Z$, le strutture definite da I e J su Z sono diverse.

Esercizio 21 Sia $S := k[x, y]$ (k algebricamente chiuso).

- 1) Siano $I_n = (x, y^n)$, $J_0 = (x^2, y^2, xy)$, $J_1 = (xy, y - x^2)$. Si definisce $\alpha_n = \text{Spec}(S/I_n)$, $\xi = \text{Spec}(S/J_0)$, $\eta = \text{Spec}(S/J_1)$; sono tutti sotto schemi chiusi di $\mathbb{A}^2 = \text{Spec}(S)$ (Esercizio 20). Determinare lo spazio topologico sotto giacente di ognuno di questi schemi. Determinare $\dim_k(S/I_n)$, $\dim_k(S/J_i)$. Confrontare con l'Esercizio 12). Dare una descrizione geometrica di α_n, ξ, η .
- 2) Se $I \subset J$ sono due ideali di S e se $X = \text{Spec} S/I$, $Y = \text{Spec} S/J$, convincersi che $Y \subset X \subset \mathbb{A}^2$ (come schemi, cioè Y è un sotto schema chiuso di X).
- 3) Tra gli schemi α_n, ξ, η , dire chi è contenuto in chi.
- 4) Sia $F(x, y) \in S$ un polinomio e sia C la curva piana di equazione $F = 0$ (cioè $C = \text{Spec}(S/(F))$). Mostrare che C è singolare nell'origine $\Leftrightarrow \xi \subset C$ (come schemi).

Esercizio 22 (cf [15], II. Ex. 2.1)

Sia $X = \text{Spec}(A)$ e $f \in A$. Mostrare che $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ è isomorfo a $\text{Spec}(A_f)$.

3.5 Prime proprietà degli schemi.

In questa sezione indichiamo rapidamente alcune tra le prime definizioni e proprietà degli schemi. Per complementi il lettore può consultare [15], II.3.

Definizione 3.8. *Uno schema X è connesso (risp. irriducibile) se lo spazio topologico $|X|$ è connesso (risp. irriducibile).*

Definizione 3.9. *Uno schema X è ridotto se per ogni $x \in X$, l'anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ non ha elementi nilpotenti. (Questo è equivalente a chiedere che per ogni aperto U $\mathcal{O}_X(U)$ non abbia elementi nilpotenti, cf Esercizio 24).*

Uno schema X è integro se X è ridotto e irriducibile (questo è equivalente a richiedere che per ogni aperto U , l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ sia integro, [15], II Prop. 3.1).

Definizione 3.10. *Uno schema X è localmente noetheriano se può essere ricoperto da schemi affini $\text{Spec}(A_i)$ dove ogni A_i è un anello noetheriano.*

Lo schema X è noetheriano se può essere ricoperto da un numero finito di schemi affini $\text{Spec}(A_i)$, con A_i anelli noetheriani.

Se X è uno schema noetheriano, allora $|X|$ è uno spazio topologico noetheriano (cioè se $\dots Y_r \subset Y_{r-1} \subset \dots \subset Y_2 \subset Y_1$, Y_i chiusi, allora esiste m tale che $Y_i = Y_m$ per $i \geq m$).

Definizione 3.11. *La dimensione di uno schema X è la sua dimensione come spazio topologico, cioè $\dim(X) = \sup\{n \mid Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n, \text{ dove i } Z_i \text{ sono chiusi irriducibili distinti}\}$.*

Se $X = \text{Spec}(A)$, allora $\dim(X)$ è la dimensione di Krull dell'anello A .

Definizione 3.12. *Uno schema X è regolare se $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello regolare per ogni $x \in X$.*

Lo spazio tangente di Zariski a X in x è il duale del $k(x)$ -spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Si ricorda che un anello locale $(A, \mathfrak{m}, k)$, noetheriano, è regolare se $\dim A = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. In particolare se X è lo schema associato a una varietà $\tilde{X}$ su k algebricamente chiuso, allora X è regolare $\Leftrightarrow \tilde{X}$ è liscia.

Nel suo studio degli schemi, Grothendieck segue alcuni principi generali. Tra le linee guide abbiamo:

- sono più importanti i morfismi degli oggetti
- le costruzioni devono essere relative e funtoriali.

Quindi Grothendieck studia gli schemi su S (S uno schema non meglio specificato): $\downarrow f$, il morfismo f è il morfismo strutturale. Osservare che ogni schema è un $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ schema (perché per ogni anello A c'è un (unico) morfismo $\mathbb{Z} \rightarrow A : n \rightarrow n.1_A$).

3.5.1 Prodotto.

Per prima cosa Grothendieck mostra che esiste un prodotto nella categoria Sch/S degli schemi su S (o S -schemi). Per questo si inizia col caso affine: sia $S = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$. Il morfismo strutturale $X \rightarrow S$ corrisponde a un morfismo $A \xrightarrow{\varphi} B$ e quindi B è una A -algebra ($A \times B \rightarrow B : (a, b) \rightarrow b.\varphi(a)$). Sia $Y = \text{Spec}(C)$ un altro S -schema affine, allora $X \times_S Y = \text{Spec}(B \otimes_A C)$.

Nel caso generale, con un bel po' di pazienza e un bel tubo di colla, si ricopre X, Y, S con aperti affini, si fanno i prodotti parziali e si rincolla tutto, funziona (cf [15], II.3, Thm. 3.3).

Il prodotto è un prodotto nel senso delle categorie ($\text{Hom}_S(T, X \times_S Y) = \text{Hom}_S(T, X) \times \text{Hom}_S(T, Y)$, per ogni S -schema T).

Se ci fossimo limitati alla categoria degli schemi su un campo non ci sarebbe nessun prodotto ($K \otimes_k K'$, in generale non è un campo).

L'insieme sotto giacente a $X \times_S Y$ non è in generale il prodotto (fibrato) degli insiemi sotto giacenti a X, Y (Esercizio 28).

3.5.2 Cambiamento di base.

Sia

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S' \rightarrow S \end{array}$$

Vogliamo fare corrispondere al S -schema X un S' -schema: si prende $X \times_S S'$ (X e S' sono entrambi degli S -schemi). Abbiamo

$$\begin{array}{ccc} X' & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \rightarrow & S \end{array}$$

Si dice che X' è ottenuto da X tramite cambiamento di base. Otteniamo così un funtore $\text{Sch}/S \rightarrow \text{Sch}/S'$. Si capisce adesso il senso del termine

schema: partendo da uno schema X (su $\mathbb{Z}$) è possibile ottenere, per cambiamenti di base, vari enti geometrici, il nostro X iniziale è lo schema (schemino), scheletro, di tutte queste varietà.

Due esempi di cambiamento di base:

1. *Estensioni degli scalari.*

Sia $k \subset k'$ un'estensione di campi (per esempio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$). Abbiamo quindi $\text{Spec}(k') \rightarrow \text{Spec}(k)$: ad ogni k -schema possiamo associare un k' -schema. E' chiaro che da un punto di vista aritmetico, questa nozione è fondamentale.

2. *Fibre di un morfismo.*

Sia $f : X \rightarrow S$ e $s \in S$. Ricordiamo che $k(s)$ indica il campo residuo dell'anello locale $\mathcal{O}_{S,s}$. C'è un morfismo iniettivo canonico $S' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \hookrightarrow S$. Inoltre da $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow k(s)$ si ottiene $\text{Spec}(k(s)) \rightarrow S'$.

In definitiva $\text{Spec}(k(s)) \rightarrow S$. Si dimostra (cf [15], p. 89) che esiste un isomorfismo tra lo spazio topologico $X \times_S \text{Spec}(k(s))$ e la fibra $f^{-1}(s) \subset X$ (con la topologia indotta da quella di X). Questo permette di considerare la fibra, in modo canonico, come un $k(s)$ -schema (quindi uno schema su un campo). Questo è molto importante, specie in geometria "classica", perché ci permetterà di avere una buona nozione di *famiglia di varietà algebriche* e una buona teoria delle deformazioni.

Uno dei temi ricorrenti è lo studio delle proprietà conservate per cambiamento di base.

Un altro tema, in qualche modo opposto, sono i problemi di *discesa*. Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X' & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \rightarrow & S \end{array}$$

Se $X' \rightarrow S'$ ha una certa proprietà, questa proprietà è ancora vera per $X \rightarrow S$? I problemi di discesa sono in generale molto più difficili.

3.5.3 Piattezza.

In geometria la nozione di *famiglia* di varietà algebriche è fondamentale. La prima idea che viene in mente è di chiamare famiglia l'insieme delle fibre di un morfismo $f : X \rightarrow Y$ (famiglia di sotto varietà di X parametrizzata da Y). Ovviamente senza chiedere niente al morfismo f , questa definizione non rende dei buoni servizi (si vorrebbe almeno che in una "famiglia" la dimensione

delle fibre fosse costante). Quale condizione chiedere a f per avere una buona nozione di famiglia?

La risposta data da Grothendieck è di chiedere che il morfismo sia *piatto*. Si ricorda che un A -modulo M è piatto se il funtore $- \otimes_A M$ è esatto (il prodotto tensoriale è sempre esatto a destra, ma non sempre a sinistra).

Definizione 3.13. *Un morfismo di schemi $f : X \rightarrow Y$ è piatto nel punto $x \in X$ se $\mathcal{O}_{X,x}$ è un $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modulo piatto, dove $y = f(x)$ e dove la struttura di $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modulo è data dal morfismo $f^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$.*

Il morfismo è piatto se è piatto in ogni $x \in X$.

Questa condizione è poco intuitiva ma è proprio quella giusta! Per esempio:

-Sia Y regolare, intero di dimensione uno e sia $p \in Y$ un punto chiuso. Sia $X \subset \mathbb{P}^n \times (Y \setminus p)$, sotto schema chiuso e piatto su $Y \setminus p$, allora esiste un unico sotto schema chiuso $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n \times Y$, piatto su Y che prolunga X . (*si può passare al limite*, [15], III Prop. 9.8).

La nozione di piatezza è fondamentale per l'esistenza dello schema di Hilbert che parametrizza le curve di genere g , grado d in $\mathbb{P}^n$ e per la teoria delle deformazioni.

3.6 Schemi e varietà.

Una varietà non è esattamente uno schema ma è possibile associare ad ogni varietà su un campo k algebricamente chiuso uno schema su k . Più precisamente esiste un funtore $t : \text{Var}(k) \rightarrow \text{Sch}/k$ che associa ad ogni varietà X uno schema $t(X)$. Inoltre l'insieme dei punti chiusi di $|t(X)|$ è omeomorfo a X e $\mathcal{O}_X$ è la restrizione all'insieme dei punti chiusi di $\mathcal{O}_{t(X)}$.

Essenzialmente basta vederlo del caso di una varietà affine X . Se $A = A(X)$ è l'anello delle coordinate di X , allora lo schema associato è $\text{Spec} A$ (i punti di X corrispondono ai punti di $\text{Spec} A$ del tipo $\mathfrak{m}_x$, dove $\mathfrak{m}_x \subset A$ è l'ideale delle funzioni che si annullano in $x \in X$) ([15], II prop. 2.6).

Il funtore t è pienamente fedele cioè la mappa naturale $\text{Hom}_{\text{Var}(k)}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Sch}/k}(t(X), t(Y))$ è biettiva. (Vedere [15], II. Prop. 2.6). L'immagine delle varietà proiettive è l'insieme degli schemi proiettivi, interi ([15], II. Prop. 4.10).

Nel seguito lavoreremo nell'ambito delle varietà (su $k = \overline{k}$), ma, se necessario, non esiteremo a considerare gli schemi associati. In realtà questo non comporta grandi cambiamenti visto che esiste una corrispondenza biunivoca tra sotto schemi chiusi di $\mathbb{P}^n$ e ideali omogenei *saturi*, $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ (Sez. 4.5).

Esercizi.

Esercizio 23 Siano $f, g \in A$. Dimostrare:

- 1) $D(f) = \emptyset \Leftrightarrow f$ è nilpotente.
- 2) $D(f) = \text{Spec}(A) \Leftrightarrow f$ è invertibile.
- 3) $D(f) \cap D(g) = D(fg)$
- 4) Cosa potete dire di $D(f) \cup D(g)$, è un aperto fondamentale (cioè della forma $D(h)$)?
- 5) $D(f) = D(g) \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.

Esercizio 24 (cf [1], Es. 17, Cap. 1)

L'anello A è ridotto se non ha elementi nilpotenti ($\sqrt{(0)} = 0$). Sia $X = \text{Spec}(A)$. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- 1) A è ridotto
- 2) $A_{\mathfrak{p}}$ è ridotto per ogni $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$
- 3) $A_{\mathfrak{m}}$ è ridotto per ogni ideale massimale di A
- 4) $\mathcal{O}_X(U)$ è ridotto per ogni aperto $U \subset X$.

Se le condizioni 1), ..., 4) sono soddisfatte si dice che X è uno schema affine ridotto.

Esercizio 25 ([1], Es. 19, Cap. 1)

Uno spazio topologico X è irriducibile se è non vuoto e se ogni coppia di aperti non vuoti si incontrano, o in modo equivalente, se ogni aperto non vuoto è denso in X . Provare che $X = \text{Spec}(A)$ è irriducibile se e solo se il nilradicale ($\sqrt{(0)}$) di A è un ideale primo.

In particolare se A è integro $\text{Spec}(A)$ è irriducibile. Mostrare che se A è ridotto (Esercizio 24), allora $\text{Spec}(A)$ è irriducibile se e solo se A è integro.

Esercizio 26 Sia $X = \text{Spec}(A)$. Sia $B = A/\sqrt{(0)}$. Si pone $X_{\text{red}} = \text{Spec}(B)$.

- 1) Mostrare che X_{red} è ridotto (cf Esercizio 24)
- 2) Mostrare che X è irriducibile se e solo se X_{red} è irriducibile.

Esercizio 27 Sia X uno schema su k (cioè con un morfismo $X \rightarrow \text{Spec } k$).

Mostrare che $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ è un k -spazio vettoriale.

Si assume k algebricamente chiuso. Se X è integro e se $\dim_k(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) < \infty$, allora $\dim_k(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) = 1$.

Esercizio 28 Sia $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $Y = \text{Spec}(\mathbb{Q})$ e $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Determinare $X \times_S Y$.

Fasci coerenti e moduli graduati.

L'algebra lineare è particolarmente efficace e limpida quando si lavora con spazi vettoriali di dimensione finita; è naturale cercare condizioni analoghe di finitezza in algebra commutativa (A -moduli). La prima nozione è quella di modulo di tipo finito (o finitamente generato). Purtroppo un sotto modulo di un modulo finitamente generato non è necessariamente finitamente generato. Una nozione più forte è quella di anello e modulo noetheriano: se A è noetheriano e se M è un A -modulo di tipo finito, allora M è noetheriano e ogni sotto modulo di M è di tipo finito. In particolare se $f : A^n \rightarrow M$ è suriettivo, allora $\text{Ker}(f)$ è finitamente generato. Le ipotesi noetheriane formano il quadro naturale della geometria algebrica (cf teorema della base di Hilbert, decomposizione in componenti irriducibili, ecc...). In conclusione, è naturale cercare delle condizioni analoghe di finitezza per gli $\mathcal{O}_X$ -moduli. In quest'ottica le nozioni utili sono quelle di fascio di tipo finito e di fascio coerente.

In questo capitolo vogliamo mostrare due cose:

- 1) esiste una corrispondenza tra certi S -moduli graduati ($S = k[x_0, \dots, x_n]$) e i gli $\mathcal{O}_X$ -moduli coerenti ($X = \mathbb{P}_k^n$). Questa corrispondenza non è perfetta ma permette di tradurre questioni sui fasci in questioni di algebra commutativa.
- 2) esiste una corrispondenza perfetta tra sotto schemi chiusi di $\mathbb{P}_k^n$ e ideali saturi $I \subset S$. Quindi da un punto di vista algebrico un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}_k^n$ è un oggetto facilmente comprensibile.

Il lettore osserverà che nel seguito lavoreremo esclusivamente con fasci coerenti.

4.1 Fasci (quasi)coerenti su $\text{Spec}(A)$.

Sia $X = \text{Spec}(A)$ uno schema affine e sia M un A -modulo. Vogliamo associare a M un fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli (notato nel seguito $M^\sim$).

Se $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, definiamo $(M^\sim)_{\mathfrak{p}}$ come il localizzato di M in $\mathfrak{p}$. Se $U \subset \text{Spec}(A)$ è un aperto, definiamo $M^\sim(U)$ come l'insieme delle funzioni $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$, tali che $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$ e che sono localmente una frazione ("definita, regolare") m/f , $m \in M, f \in A$. Più precisamente si richiede che per ogni $\mathfrak{p} \in U$, esista un intorno aperto, V , di $\mathfrak{p}$ in U e elementi $m \in M, f \in A$, tali che per ogni $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ e $s(\mathfrak{q}) = m/f$ in $M_{\mathfrak{q}}$. Con le mappe di restrizione evidenti questo definisce il fascio $M^\sim$ su $X = \text{Spec}(A)$.

Si verifica che $M^\sim$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo, che la spiga di $M^\sim$ nel punto $x = \mathfrak{p}$ è $M_{\mathfrak{p}}$ e che $\Gamma(X, M^\sim) = M$ (cf [15], II. Prop. 5.1).

Non tutti i fasci di $\mathcal{O}_X$ -moduli su $X = \text{Spec}(A)$ sono del tipo $M^\sim$ per un qualche A -modulo M . Tuttavia abbiamo:

Definizione 4.1. *Sia X uno schema. Un fascio, $\mathcal{F}$, di $\mathcal{O}_X$ moduli è quasi coerente se X può essere ricoperto da aperti affini $U_i = \text{Spec}(A_i)$, tali che per ogni i esista un A_i -modulo M_i , tale che $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq M_i^\sim$. Si dice che $\mathcal{F}$ è coerente se ogni M_i è un A_i -modulo di tipo finito (finitamente generato).*

La nozione di fascio coerente non si comporta bene se X non è uno schema noetheriano. Siccome invece noi siamo interessati a lavorare in un ambiente noetheriano ($X = \mathbb{A}_k^n, \mathbb{P}_k^n$, k campo algebricamente chiuso) e vogliamo condizioni di finitezza, la nozione di fascio coerente è quella di maggior interesse per noi.

Se X è uno schema qualsiasi $\mathcal{O}_X$ è coerente (Esercizio 29).

Se $X = \text{Spec}(A)$, abbiamo un funtore $M \rightarrow M^\sim$, dalla categoria degli A -moduli nella categoria degli $\mathcal{O}_X$ -moduli quasi-coerenti. Questo funtore stabilisce un'equivalenza di categoria. Il suo inverso è: $\mathcal{F} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$, cioè $\Gamma(X, \mathcal{F})^\sim = \mathcal{F}$.

Se A è noetheriano questo funtore stabilisce un'equivalenza tra la categoria degli A -moduli finitamente generati e la categoria degli $\mathcal{O}_X$ -moduli coerenti (cf [15], II. Corollary 5.5).

Quindi se A è noetheriano, darsi un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente ($X = \text{Spec}(A)$) è la stessa cosa che darsi un A -modulo finitamente generato.

Vediamo adesso cosa succede nell'ambito proiettivo ($X = \text{Proj}(S)$, $S = k[x_0, \dots, x_n]$).

4.2 Il funtore $M \rightarrow M^\sim$, i fasci $\mathcal{O}(a)$.

Prima di tutto ad ogni $S = k[x_0, \dots, x_n]$ -modulo graduato M si associa un fascio $M^\sim$. La costruzione è simile a quella del caso affine, con le dovute modifiche.

Sia $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$ e sia T la parte moltiplicativa degli elementi omogenei non contenuti in $\mathfrak{p}$. Finalmente sia $M_{\mathfrak{p}}$ l'insieme degli elementi di grado zero in $T^{-1}M$. Per ogni U aperto di $\text{Proj}(S)$, $M^\sim(U)$ è l'insieme delle applicazioni $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$ che sono localmente delle frazioni. Cioè per ogni $\mathfrak{p} \in U$, esiste un intorno aperto V di $\mathfrak{p}$ e degli elementi omogenei dello stesso grado $m \in M, f \in S$ tali che $f(\mathfrak{q}) \neq 0$ per ogni $\mathfrak{q} \in V$ e $s(\mathfrak{q}) = m/f$ in $M_{(\mathfrak{q})}, \forall \mathfrak{q} \in V$.

Con le mappe di restrizione ovvie, $M^\sim$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli ($X = \text{Proj}(S) = \mathbb{P}_k^n$).

Abbiamo:

Proposizione 4.2. *Con le notazioni precedenti:*

- 1) $(M^\sim)_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}$
- 2) Per ogni $f \in S_+$ omogeneo, $M^\sim|_{D_+(f)} \simeq (M_{(f)})^\sim$ (via l'isomorfismo di $D_+(f)$ con $\text{Spec } S_{(f)}$, dove $M_{(f)}$ è il gruppo degli elementi di grado zero in M_f)
- 3) $M^\sim$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo quasi coerente, se M è finitamente generato, $M^\sim$ è coerente ($S = k[x_0, \dots, x_n]$).

Dimostrazione. [15], II, Prop. 5.11. □

I fasci $\mathcal{O}_X(a)$.

Questo permette di definire i fasci $\mathcal{O}(a)$. Il modulo graduato $S(a)$ è il modulo S traslato di a , cioè $S(a)_m = S_{a+m}$.

Definizione 4.3. *Sia $S = k[x_0, \dots, x_n]$ e $\mathbb{P}_k^n = \text{Proj}(S)$. Per ogni $a \in \mathbb{Z}$ si pone $S(a)^\sim = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(a)$.*

Osservazione 4.4. Tutte le costruzioni precedenti possono essere svolte per un anello graduato qualsiasi S . Per ottenere dei risultati "naturali" è opportuno assumere che S sia generata da S_1 come S_0 -algebra (cf [15], II Prop. 5.12, Prop. 5.13, 5.13.1).

Osservazione 4.5. I fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(a)$ definiti qui sopra non sono altri che i fasci associati ai divisori aH , H un iperpiano (cf [5]); in particolare sono localmente liberi di rango uno ([15], II Prop. 5.12).

Il funtore $-\sim$ non si comporta molto bene:

Proposizione 4.6. *Sia M un S -modulo graduato tale che esista $a \in \mathbb{Z}$ con $M_n = 0$ se $n > a$. Allora $M^\sim = 0$.*

Dimostrazione. La spiga di $M^\sim$ nel punto $x = \mathfrak{p}$ è $M_{(\mathfrak{p})}$. Cioè si considera T la parte moltiplicativa degli elementi omogenei di S che non appartengono a $\mathfrak{p}$. Sia $T^{-1}M = \{m/s \mid m \in M, s \in T\}$, con $m/s = m'/s' \Leftrightarrow \exists t \in T$ tale che

$t(ms' - m's) = 0$, il localizzato rispetto a T . Finalmente $M_{(\mathfrak{p})}$ è l'insieme degli elementi di grado zero: $M_{(\mathfrak{p})} = \{m/s \in T^{-1}M \mid \deg m = \deg s\}$. Se $m/s \in M_{(\mathfrak{p})}$, allora $m/s = 0/1 \Leftrightarrow \exists t \in T$ tale che $tm = 0$. Ma questo è sicuramente verificato se t è un elemento omogeneo non in $\mathfrak{p}$ di grado abbastanza grande (basta $\deg m + \deg t > a$). Quindi tutte le spighe di $M^\sim$ sono nulle e $M^\sim = 0$. $\square$

Un caso particolarmente importante è quello dei moduli di lunghezza finita:

Definizione 4.7. *Sia $S = k[x_0, \dots, x_n]$. Un S -modulo graduato finitamente generato M è di lunghezza finita se $\{a \mid M_a \neq 0\}$ è un insieme finito.*

Quindi per ogni modulo di lunghezza finita M , $M^\sim = 0$.

Un complemento alla Proposizione 4.6:

Proposizione 4.8. *Sia M un S -modulo graduato finitamente generato. Se $M^\sim = 0$, allora $M_d = 0$ se $d \gg 0$.*

Dimostrazione. Se $m \in M$ indichiamo con $J[m] = \{P \in S \mid Pm = 0\}$, è un ideale omogeneo. Siccome $M_{(\mathfrak{p})} = 0$, $\forall x = \mathfrak{p}$ esiste $P \notin \mathfrak{p}$ (cioè con $P(x) \neq 0$) tale che $P \in J[m]$. Quindi $\mathbb{V}(J[m]) = \emptyset$ e per il teorema degli zeri esiste $d(m)$ tale che $\mathfrak{m}^{d(m)} \subset J[m]$, cioè ogni polinomio omogeneo di grado $\geq d(m)$ appartiene a $J[m]$. Siano $m_1, \dots, m_r$ dei generatori di M . Se $d \geq \max \{d(m_i)\}$, allora ogni polinomio P di grado $\geq d$, verifica $Pm = 0, \forall m \in M$. Sia $a \geq 2d$. Un elemento $m \in M_a$ si scrive $m = \sum P_i m_i$, con $\deg P_i = a - \deg m_i \geq d$. Quindi $P_i m_i = 0$ e $m = 0$. Segue che $M_a = 0$ se $a \geq 2d$. $\square$

Questa era la cattiva notizia, la buona notizia è che, sostanzialmente, il fenomeno descritto nella Proposizione 4.6 è l'unico ostacolo a una buona corrispondenza tra i nostri funtori. Intanto abbiamo:

Proposizione 4.9. *Con le notazioni precedenti l'operazione $-\sim$ è un funtore esatto, additivo, covariante dalla categoria degli S -moduli graduati nella categoria degli $\mathcal{O}$ -moduli.*

Dimostrazione. Il funtore è esatto perché se $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ è una successione esatta di S -moduli graduati, allora $M'_{(\mathfrak{p})} \rightarrow M_{(\mathfrak{p})} \rightarrow M''_{(\mathfrak{p})}$ è esatta per le proprietà della localizzazione (cf [1], Cap. III). Quindi la successione di fasci $M'^\sim \rightarrow M^\sim \rightarrow M''^\sim$ è esatta (perché lo è sulle spighe). L'additività segue dalle proprietà della localizzazione. $\square$

Definizione 4.10. *Sia $\mathcal{C} = \{M \mid M \text{ è un } S\text{-modulo graduato tale che } M_n = 0 \text{ se } n \gg 0\}$.*

Un morfismo di S -moduli graduati $\varphi : M \rightarrow N$ è detto $\mathcal{C}$ -iniettivo (risp. $\mathcal{C}$ -suriiettivo) se $\text{Ker}(\varphi) \in \mathcal{C}$ (risp. $\text{Coker}(\varphi) \in \mathcal{C}$). Il morfismo è $\mathcal{C}$ -biiettivo se è $\mathcal{C}$ -iniettivo e $\mathcal{C}$ -suriiettivo.

Osservazione 4.11. Segue dal 4.6 che un morfismo $\mathcal{C}$ -*iettivo di moduli dà luogo a un morfismo *iettivo di fasci. In particolare sia $M_{\geq n} := \bigoplus_{p \geq n} M_p$; $M_{\geq n}$ è un sotto modulo di M e il quoziente $M/M_{\geq n}$ appartiene a $\mathcal{C}$, pertanto $M^\sim = (M_{\geq n})^\sim$; ci sono quindi tanti moduli che definiscono lo stesso fascio.

Rimane da vedere quando il fascio $M^\sim$ è coerente.

Definizione 4.12. *Un modulo graduato M è di tipo TF se esiste n tale che il sottomodulo $M_{\geq n}$ sia di tipo finito.*

Proposizione 4.13. *Se M è di tipo TF allora $M^\sim$ è coerente. Inoltre, se M è di tipo TF, $M^\sim = 0$ se e solo se $M \in \mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Se M è di tipo TF, allora esiste d tale che $M_{\geq d}$ sia finitamente generato. Abbiamo $M^\sim = (M_{\geq d})^\sim$, quindi (Proposizione 4.2) $M^\sim$ è coerente.

Sia $M^\sim = 0$. Possiamo assumere M finitamente generato (perché M è di tipo TF). Si conclude con la Proposizione 4.8. $\square$

Corollario 4.14. *Siano M, N due S -moduli graduati di tipo TF e sia $\varphi : M \rightarrow N$ un morfismo. Il morfismo $\varphi^\sim : M^\sim \rightarrow N^\sim$ è *-iettivo se e solo se φ è $\mathcal{C}$ -*iettivo.*

Dimostrazione. Esercizio 30. $\square$

Ad ogni modulo graduato, M , di tipo TF abbiamo associato un fascio coerente $M^\sim = \mathcal{F}$, è naturale chiedersi se si ottengono così tutti i fasci coerenti. Per rispondere a questa domanda cercheremo di tornare indietro associando un modulo ad ogni fascio.

Esercizi.

Esercizio 29 Sia X uno schema. Mostrare che $\mathcal{O}_X$ è coerente.

Esercizio 30 Dimostrare il Corollario 4.14

Esercizio 31 Sia X uno schema noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -modulo. Allora $\mathcal{F}$ è coerente se e solo se $\mathcal{F}$ è localmente il coker di un morfismo di fasci liberi di rango finito. Cioè se $\forall x$, esiste un intorno aperto U di x e una successione esatta:

$$\mathcal{O}_U^n \rightarrow \mathcal{O}_U^m \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

(In realtà questa era la definizione iniziale di fascio coerente, vedere [20]).

Esercizio 32 Sia $X = \text{Spec } A$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X . Quindi $\mathcal{F} = M^\sim$, con M un A -modulo finitamente generato. Abbiamo $\Gamma(X, \mathcal{F}) \simeq M$. Mostrare che se $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ corrisponde a $m \in M$, allora il supporto di s (vedi Esercizio 6) è $\mathbb{V}(\text{Ann}(m))$. Concludere che il supporto di $\mathcal{F}$, $\text{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$ è chiuso in X .

Più generalmente il supporto di un fascio coerente su uno schema noetheriano è chiuso.

Esercizio 33 Sia $S = k[x_0, x_1]$ ($k = \bar{k}$) e sia M l' S -modulo graduato k in grado zero (cioè $M_0 = k$, $M_n = 0$ se $n \neq 0$). Mostrare che la risoluzione libera minimale di M è data da:

$$0 \rightarrow S(-2) \xrightarrow{\psi} 2S(-1) \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow M \rightarrow 0$$

Qui ψ è data da $\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$ e $\varphi = (x_0, x_1)$.

Dedurre l'esistenza su $\mathbb{P}^1$ di una successione esatta (successione di Eulero):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow 2\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$$

Dare una costruzione "geometrica" di questa successione.

Esercizio 34 Siano $C, X \subset \mathbb{P}_k^2$ ($k = \bar{k}$) due curve senza componenti comuni, di equazioni F, G . Sia $I \subset k[x_0, x_1, x_2]$, l'ideale $I = (F, G)$. Mostrare che la risoluzione libera minimale di I è della forma:

$$0 \rightarrow S(-f-g) \rightarrow S(-f) \oplus S(-g) \rightarrow I \rightarrow 0$$

($f = \deg F, g = \deg G$) (Hint: guardare l'Esercizio 33). Concludere che esiste una successione esatta su $\mathbb{P}^2$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-f-g) \rightarrow \mathcal{O}(-f) \oplus \mathcal{O}(-g) \rightarrow I^\sim \rightarrow 0$$

4.3 Il funtore $\mathcal{F} \rightarrow H_*^0(\mathcal{F})$.

Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$ -modulo ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$). Si pone $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m)$. Sia $\Gamma_*(\mathcal{F})$ (in seguito denotato anche con $H_*^0(\mathcal{F})$) la somma diretta $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathcal{F}(m))$. Allora $H_*^0(\mathcal{F})$ è un S -modulo graduato. Infatti se $f \in S_a$ e $s \in \Gamma(\mathcal{F}(m))$, allora $fs \in \Gamma(\mathcal{F}(a+m))$ è definito nel modo seguente: l'elemento $f \in S_a$ è una sezione globale $f \in \Gamma(\mathcal{O}(a))$ (osservare che $a \geq 0$), quindi corrisponde a un morfismo (iniettivo) $\mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{O}(a)$. Tensorizzando con $\mathcal{F}(m)$, abbiamo $\mathcal{F}(m) \rightarrow \mathcal{F}(a+m)$ e quindi $\Gamma(\mathcal{F}(m)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}(a+m))$. L'immagine di s in questo morfismo è $fs \in \Gamma(\mathcal{F}(a+m))$.

Abbiamo quindi associato ad ogni $\mathcal{O}$ -modulo $\mathcal{F}$ un S -modulo graduato $\Gamma_*(\mathcal{F})$. Adesso possiamo applicare il funtore $-\sim$ a questo modulo e la domanda è: chi è $\Gamma_*(\mathcal{F})^\sim$? Viceversa partendo da un S -modulo graduato, M , abbiamo un $\mathcal{O}$ -modulo $M^\sim$ e poi un S -modulo graduato $\Gamma_*(M^\sim)$. E' ancora M ?

Possiamo limitarci a considerare (come è lecito visto le nostre ipotesi noetheriane: $S = k[x_0, \dots, x_n]$, k un campo) fasci coerenti e moduli finitamente generati, o meglio moduli di tipo TF. Ma anche sotto queste ipotesi i funtori $-\sim$ e H_*^0 non sono aggiunti (ma quasi). Intanto abbiamo:

Proposizione 4.15. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su $\mathbb{P}^n$, allora esiste un S -modulo graduato, M , di tipo TF, tale che $M^\sim = \mathcal{F}$.*

Il modo più veloce per dimostrare questa Proposizione è di usare il Teorema A di Serre:

Teorema 4.16. (Teorema A)

Sia X uno schema proiettivo, noetheriano e sia $\mathcal{O}(1)$ un fascio invertibile molto ampio. Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente. Allora esiste un intero n_0 tale che se $n \geq n_0$, $\mathcal{F}(n)$ è generato da un numero finito di sezioni globali (cioè esiste un morfismo suriettivo $a \cdot \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}(n) \rightarrow 0$).

Dimostrazione. Vedere [15], II.5, Theorem 5.17 o [20]. □

Quindi se $\mathcal{F}$ è un fascio coerente su $\mathbb{P}_k^n$, per m abbastanza grande abbiamo $a \cdot \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}(m) \rightarrow 0$ e quindi $a \cdot \mathcal{O}(-m) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ (qui indichiamo con $a \cdot \mathcal{O}$ la somma diretta di a esemplari di $\mathcal{O}$). Abbiamo quindi $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow a \cdot \mathcal{O}(-m) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$. Anche il fascio $\mathcal{K}$ è coerente. Questo segue dal

Lemma 4.17. *Sia X uno schema noetheriano. Il $\ker$, coker e l'immagine di un morfismo di fasci coerenti è coerente.*

Dimostrazione. La questione è locale quindi possiamo assumere X affine. Il morfismo $f : \mathcal{F} = M^\sim \rightarrow \mathcal{G} = N^\sim$ corrisponde, visto l'equivalenza di categoria tra moduli finitamente generati e fasci coerenti, a un morfismo $\varphi : M \rightarrow N$, dove M, N sono A -moduli finitamente generati ($X = \text{Spec } A$). Quindi anche $\text{Ker}(\varphi), \text{Im}(\varphi), \text{Coker}(\varphi)$ lo sono (A noetheriano). $\square$

Più generalmente se

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$$

è una successione esatta di $\mathcal{O}$ -modulo e se due dei fasci $\mathcal{F}_i$ sono coerenti, allora anche il terzo è coerente (vedere [20]).

Possiamo ripetere il processo con $\mathcal{K}$ e otteniamo:

Lemma 4.18. *Un $\mathcal{O}$ -modulo $\mathcal{F}$ ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$) è coerente se e solo se esiste una successione esatta:*

$$\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

dove $\mathcal{L}_i$ è una somma diretta (finita) di fasci $\mathcal{O}(a)$ ($\mathcal{L}_i = \bigoplus_{j=1}^{r_i} \mathcal{O}(a_j^{(i)})$).

Adesso possiamo dimostrare la Proposizione 4.15:

Dimostrazione. della Proposizione 4.15

Per il Lemma 4.18 abbiamo $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$. Applicando il funtore H_*^0 viene $H_*^0(\mathcal{L}_2) \rightarrow H_*^0(\mathcal{L}_1)$. Sia M il coker di questa mappa. Siccome il funtore $-\sim$ è esatto e siccome $(H_*^0(\mathcal{O}(a)))^\sim = \mathcal{O}(a)$, otteniamo:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}_2 & \rightarrow & \mathcal{L}_1 & \rightarrow & M^\sim & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \mathcal{L}_2 & \rightarrow & \mathcal{L}_1 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Siccome le frecce verticali sono degli isomorfismi, risulta che $\mathcal{F} \simeq M^\sim$ e siccome M è di tipo TF, la Proposizione è dimostrata. $\square$

In conclusione partendo dai moduli di tipo TF otteniamo, con il funtore $-\sim$, *tutti* i fasci coerenti.

4.4 Confronto tra H_*^0 e $-\sim$.

Vediamo adesso (con poche dimostrazioni) di confrontare i nostri due funtori.

Lavoriamo sempre $\mathbb{P}_k^n$. Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$ -modulo. Definiamo una mappa: $\beta_{\mathcal{F}} : (H_*^0(\mathcal{F}))^\sim \rightarrow \mathcal{F}$, nel modo seguente. Per costruzione $(H_*^0(\mathcal{F}))^\sim_x$ è $H_*^0(\mathcal{F})_{(\mathfrak{p})}$ ($x = \mathfrak{p}$). Quindi un elemento della spiga è della forma s/Q , dove $s \in H^0(\mathcal{F}(d))$ e dove Q è omogeneo di grado d , $Q \notin \mathfrak{p}$ (cioè $Q(x) \neq 0$). Possiamo vedere

$1/Q$ come un elemento della spiga $\mathcal{O}(-d)_x$. Il germe di s fornisce $s_x \in \mathcal{F}(d)_x$. Quindi $1/Q \otimes s_x \in \mathcal{F}_x = \beta_{\mathcal{F},x}(s/Q)$. (La definizione di $\beta_{\mathcal{F},U}$ su un aperto U è analoga.)

Abbiamo ([15], II Prop. 5.15):

Proposizione 4.19. *Se $\mathcal{F}$ è coerente $\beta_{\mathcal{F}} : (H_*^0(\mathcal{F}))^\sim \rightarrow \mathcal{F}$ è un isomorfismo.*

Adesso se M è un S -modulo graduato definiamo $\alpha_M : M \rightarrow H_*^0(M^\sim)$ nel modo seguente. Sia $m \in M_d$ un elemento di grado d . Possiamo vedere m come un elemento di grado zero in $M(d)$. Se $x = \mathfrak{p}$, $m/1 \in M(d)_{(\mathfrak{p})}$, quindi $m/1$ definisce un elemento in $M(d)_x^\sim$ per ogni x , ossia una sezione di $M^\sim(d)$. Questa sezione è $\alpha_M(m)$. Abbiamo ([15], II Ex. 5.9, Theorem 5.19):

Proposizione 4.20. *Sia M un S -modulo graduato. Per ogni d abbastanza grande $\alpha_M(d) : M_d \rightarrow \Gamma(M^\sim(d))$ è un isomorfismo, ma in generale α_M non è un isomorfismo.*

Per quanto riguarda l'ultima asserzione, abbiamo già visto che se $M \in \mathcal{C}$, allora $M^\sim = 0$, quindi $H_*^0(M^\sim) = 0$.

Definizione 4.21. *Due S -moduli graduati, M, N sono quasi-isomorfi se esiste un intero d tale che $M_{\geq d}$ e $N_{\geq d}$ siano isomorfi.*

Quindi M, N sono quasi-isomorfi se esiste un morfismo $f : M \rightarrow N$, con $\text{Ker}(f) \in \mathcal{C}$ e $\text{Coker}(f) \in \mathcal{C}$. L'essere quasi isomorfi è una relazione d'equivalenza. Un modulo di tipo TF è quasi isomorfo a un modulo finitamente generato.

Da quanto detto prima otteniamo:

Proposizione 4.22. *I funtori $-\sim$ e H_*^0 stabiliscono un'equivalenza di categoria tra i moduli di tipo TF modulo la relazione di quasi-isomorfismo e gli $\mathcal{O}$ -moduli coerenti su $\mathbb{P}_k^n$.*

4.5 Sotto schemi chiusi di $\mathbb{P}_k^n$ e ideali omogenei.

Ricordiamo (cf Sezione 3.3) la seguente definizione:

Definizione 4.23. *Un sotto schema chiuso X di $\mathbb{P}_k^n$ è (modulo isomorfismo) uno schema $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ tale che $|X| \subset \mathbb{P}_k^n$ sia un chiuso di $\mathbb{P}_k^n$ e tale che ci sia un morfismo suriettivo $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$ in tutto questa sezione).*

Spesso si nota $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_k^n$ il morfismo di inclusione (è un'immersione chiusa) del sotto schema chiuso $X \subset \mathbb{P}_k^n$ e si nota $i_*(\mathcal{O}_X)$ il fascio $\mathcal{O}_X$, visto come $\mathcal{O}$ -modulo. Noi noteremo semplicemente $\mathcal{O}_X$.

Se $X \subset \mathbb{P}_k^n$ è un sotto schema chiuso il ker del morfismo $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ è un fascio di ideali di $\mathcal{O}$, indicato con $\mathcal{I}_X$ (per ogni aperto U , $\mathcal{I}_X(U)$ è un ideale di $\mathcal{O}(U)$).

Un fascio d'ideali è coerente. Infatti siccome $\mathbb{P}_k^n$ è noetheriano se $U = \text{Spec}(A)$ è un aperto affine, A è noetheriano e l'ideale $\Gamma(U, \mathcal{I}_X|_U) = I \subset A$ è finitamente generato. Abbiamo una successione esatta di fasci coerenti:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

Infatti siccome $\mathcal{I}_X, \mathcal{O}$ sono coerenti, anche $\mathcal{O}_X$ lo è.

Definizione 4.24. *Con le notazioni precedenti la successione (4.1) è la successione di definizione del sotto schema chiuso X .*

Vediamo adesso come associare un sotto schema chiuso ad ogni ideale omogeneo $I \subset S = k[x_0, \dots, x_n]$.

Se $I \subset S = k[x_0, \dots, x_n]$ è un ideale omogeneo, allora $\mathbb{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ è un chiuso, $|X|$, di $\text{Proj}(S) = \mathbb{P}_k^n$. Siccome $I \subset S$, abbiamo $I^\sim \subset \mathcal{O} = S^\sim$. In altre parole se applichiamo il funtore $-\sim$ alla successione di S -moduli graduati:

$$0 \rightarrow I \rightarrow S \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

otteniamo:

$$0 \rightarrow I^\sim \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow (S/I)^\sim \rightarrow 0$$

Il fascio $(S/I)^\sim$ ha supporto su $|X|$ (cioè se $x \notin |X|$, $(S/I)_x^\sim = 0$) e definisce una struttura di spazio localmente anellato su $|X|$. Poniamo $(S/I)^\sim =: \mathcal{O}_X$. Abbiamo quindi uno spazio localmente anellato $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ e X è un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}_k^n$. Si ha $I^\sim = \mathcal{I}_X$.

In altri termini il morfismo suriettivo $S \rightarrow S/I$ induce un'immersione chiusa $\text{Proj}(S/I) \hookrightarrow \text{Proj}(S)$ e $\text{Proj}(S/I)$ è (isomorfo) a $(|X|, \mathcal{O}_X)$.

Definizione 4.25. *Il sotto schema chiuso $X \subset \mathbb{P}_k^n$ è definito da l'ideale $I \subset S$ se $\mathcal{I}_X = I^\sim$.*

Attenzione:

- 1) Uno sotto insieme chiuso $|X| \subset \mathbb{P}_k^n$ può avere varie strutture di sotto schema chiuso. Ma, contrariamente a quanto succede nell'affine:
- 2) **Una stessa struttura di sotto schema chiuso può essere definita da diversi ideali $I \subset S$.**

Esempio 4.26. In $\mathbb{P}_k^1$ consideriamo il sotto insieme chiuso $|X| = \mathbb{V}(x_0) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid x_0 \in \mathfrak{p}\}$. Gli ideali primi non banali (non necessariamente omogenei) di $k[x_0, x_1]$ sono gli ideali massimali $(x_0 - a, x_1 - b)$ e gli ideali principali $(F(x_0, x_1))$, F irriducibile. Supponiamo $k = \bar{k}$. Se F è un polinomio omogeneo di grado d , allora F si scrive come un prodotto di forme lineari: $F(x_0, x_1) = \prod L_i(x_0, x_1)^{a_i}$, $\sum a_i = d$, $L_i(x_0, x_1) = \alpha_i x_0 + \beta_i x_1$. Questo per dire che $\text{Proj}(S)$ consiste nell'ideale (0) (punto generico) e negli ideali $\mathfrak{p} = (L(x_0, x_1))$, L forma lineare (punti chiusi). Quindi $|X|$ si riduce a un punto ($|X| = \{p\}, p = (0 : 1)$).

- Se $I = (x_0)$, il fascio $\mathcal{O}_X = (S/I)^\sim$ ha supporto sul punto p e la sua spiga in p è l'anello locale k (fascio *grattacielo* in p). Infatti $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_p / \mathcal{I}_{X,p}$, cioè stiamo facendo il quoziente dei germi in p con l'ideale dei germi che si annullano in p , cioè con l'ideale massimale di $\mathcal{O}_p$. Il quoziente è il campo residuo. (Osservare che $I_{((x_0))} = \{P/Q \mid P(p) = 0, Q(p) \neq 0, \deg P = \deg Q\}$, modulo le solite identificazioni).

- Se $I_1 = (x_0^2)$, allora $\mathbb{V}(I_1) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid (x_0)^2 \in \mathfrak{p}\}$ è ancora $|X|$, cioè il nostro punto p . Il fascio $(S/I_1)^\sim =: \mathcal{O}_{X_1}$ ha sempre supporto in p , ma la sua spiga in p è $\mathcal{O}_p / \mathfrak{m}_p^2$, dove $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ è l'ideale massimale. Questo anello locale ha un elemento nilpotente corrispondente alla classe di x_0 . Quindi i due schemi $(p, \mathcal{O}_X)$ e $(p, \mathcal{O}_{X_1})$ non sono isomorfi.

- Sia $J = (x_0^2, x_0 x_1)$. Allora $\mathbb{V}(J)$ è ancora il nostro punto p . Infatti $J \subset \mathfrak{p} = (L)$, implica che la forma lineare L divide x_0^2 , quindi $L = x_0$. Chi è il fascio $(S/J)^\sim = \mathcal{O}_Y$? Osserviamo che $I_d = J_d$ se $d \geq 2$. Quindi $I^\sim = J^\sim$. Pertanto i due schemi $(p, \mathcal{O}_X)$ e $(p, \mathcal{O}_Y)$ sono uguali.

Per riassumere abbiamo tre sotto schemi di $\mathbb{P}_k^1$, X , X_1 e Y , tutti con lo stesso spazio topologico sotto giacente (il punto p), definiti da tre ideali diversi, inoltre $X = Y$, mentre $X \neq X_1$. Lo schema X_1 è il punto p *doppiato* in $\mathbb{P}^1$ (o *primo intorno infinitesimale* di p in $\mathbb{P}_k^1$). Guardando l'ideale J , vediamo che Y è l'intersezione di $Z = \{p, q\}$ con X_1 , quindi $Y = p$ (come schema). Infatti per due sotto schemi chiusi X, Y lo schema intersezione è definito da $\mathcal{I}_{X \cap Y} = \mathcal{I}_X + \mathcal{I}_Y$.

La situazione è quindi un po' confusa e ci rimane da capire quando due ideali definiscono lo stesso schema.

Prima di tutto mostriamo che ogni sotto schema chiuso di $\mathbb{P}_k^n$ può essere definito da un ideale omogeneo.

Proposizione 4.27. *Ogni sotto schema chiuso, X , di $\mathbb{P}_k^n$ può essere definito da un ideale omogeneo (per esempio $H_*^0(\mathcal{I}_X)$).*

Inoltre $H_^0(\mathcal{I}_X)$ è il più grande ideale che definisce lo schema X .*

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{I}_X$ è coerente, $(H_*^0(\mathcal{I}_X))^\sim \simeq \mathcal{I}_X$ (Proposizione 4.19). Quindi l'ideale $I = H_*^0(\mathcal{I}_X)$, definisce X .

Sia I un ideale che definisce X . Abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{i} & S \\ \alpha_I \downarrow & & \alpha_S \downarrow \\ H_*^0(I^\sim) & \rightarrow & H_*^0(S^\sim) \end{array}$$

Siccome α_S è un isomorfismo e i è iniettiva abbiamo che $\alpha_I : I \rightarrow H_*^0(\mathcal{I}_X)$ è iniettiva ($I^\sim = \mathcal{I}_X$, perché I definisce X). $\square$

Vale la pena soffermarsi un attimo sull'ultima affermazione. Sia I che definisce X e sia $P \in I_d$. Allora $P \in H^0(\mathcal{O}(d))$ e la sua immagine in $H^0(\mathcal{O}_X(d))$ è zero. Più precisamente se applichiamo il funtore $-\sim$ alla successione

$$0 \rightarrow I \rightarrow S \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

e prendiamo la coomologia otteniamo:

$$0 \rightarrow H_*^0(\mathcal{I}_X) \rightarrow H_*^0(\mathcal{O}) \rightarrow H_*^0(\mathcal{O}_X)$$

In grado d :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_X(d)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(d)) \xrightarrow{r_d} H^0(\mathcal{O}_X(d))$$

La mappa r_d non è necessariamente suriettiva (lo è se e solo se $H^1(\mathcal{I}_X(d)) = 0$). L'immagine di r_d è $(S_d/\mathbb{I}_d)$, dove $\mathbb{I} := H_*^0(\mathcal{I}_X)$. Il polinomio $P \in I_d \subset S_d = H^0(\mathcal{O}(d))$ ha un'immagine nulla in $H^0(\mathcal{O}_X(d))$, quindi $P \in \mathbb{I}_d$. L'applicazione r_d può essere interpretata come la *restrizione* a X dei polinomi omogenei di grado d ; P si annulla *sullo schema* X (cioè anche come sezione del fascio $\mathcal{O}_X(d)$) se e solo se $r_d(P) = 0$.

Quindi se I definisce X , $I \subset \mathbb{I}$ fornisce $S/I \rightarrow S/\mathbb{I} \rightarrow 0$ e l'immagine di $S_d = H^0(\mathcal{O}(d))$ in $H^0(\mathcal{O}_X(d))$ è isomorfa a $S_d/\mathbb{I}_d$.

Ci sono sempre tanti ideali che definiscono lo stesso sotto schema chiuso X . Infatti se $\mathbb{I} = H_*^0(\mathcal{I}_X)$, allora ogni ideale $\mathbb{I}_{\geq d}$ definisce X . Cerchiamo di capire quando due ideali definiscono lo stesso X .

Definizione 4.28. *Sia I un ideale omogeneo, il saturato di I è $I^{sat} := \bigcup_{k \geq 1} (I : \mathfrak{m}^k) = \{P \in S \mid \forall i, \exists n \text{ t.c. } x_i^n P \in I\}$. L'ideale I si dice saturo se $I = I^{sat}$.*

Osservazione 4.29. (i) Osserviamo che I^{sat} è un ideale omogeneo. Infatti $I \subset (I : \mathfrak{m}) \subset \dots \subset (I : \mathfrak{m}^k) \subset \dots$, visto che S è noetheriano, esiste k tale che $I^{sat} = (I : \mathfrak{m}^k)$, quindi I^{sat} è un ideale. Inoltre se I, J sono ideali omogenei allora $(I : J)$ è omogeneo (perché se $P \in S$, $(I : P) = \{Q \in S \mid QP \in I\}$ è omogeneo e $(I : J) = \bigcap (I : P_i)$ dove $J = (P_1, \dots, P_r)$).

Lemma 4.30. *Sia $I \subset S$ un ideale omogeneo. Allora $I \subset I^{sat}$ e $I_d = I_d^{sat}$ se $d \gg 0$.*

Dimostrazione. Siccome $I^{sat} = (I : \mathfrak{m}^k)$ per un qualche k , è chiaro che $I \subset I^{sat}$. L'ideale I^{sat} è finitamente generato. Sia $\{G_j\}$ un sistema di generatori. Sia $m = \max \{\deg G_j\}$. Se $P \in I_d^{sat}$, allora $P = \sum P_j G_j$, $\deg P_j = d - \deg G_j \geq d - m$. Abbiamo $P_j = \sum a_I x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$, con $i_0 + \dots + i_n = \deg P_j \geq d - m$. Se $\deg P_j \geq (n+1)k$, allora esiste $i_t \geq k$ e $x_t^{i_t} G_j \in I$. Quindi per $d \geq (n+1)k + m$, abbiamo $I_d = I_d^{sat}$. $\square$

Corollario 4.31. (1) *Se $X \subset \mathbb{P}_k^n$ è un sotto schema chiuso, l'ideale $H_*^0(\mathcal{I}_X)$ è saturo.*

(2) *Due ideali omogenei, I, J , definiscono lo stesso sotto schema chiuso se e solo se $I^{sat} = J^{sat}$.*

Dimostrazione. (1) Sia $\mathbb{I} := H_*^0(\mathcal{I}_X)$. Per il Lemma 4.30, $\mathbb{I}^\sim = (\mathbb{I}^{sat})^\sim$. Quindi $\mathbb{I}^{sat}$ definisce X . Siccome $\mathbb{I}$ è il più grande ideale che definisce X , $\mathbb{I}^{sat} \subset \mathbb{I}$. Quindi $\mathbb{I}^{sat} = \mathbb{I}$.

(2) Se I definisce X , allora $I^\sim = \mathcal{I}_X$ e per il Lemma 4.30, anche I^{sat} definisce X . Segue che $I^{sat} \subset \mathbb{I}$. D'altra parte visto che $I^\sim = \mathbb{I}^\sim$, $I_d = \mathbb{I}_d$ se $d \gg 0$ (sono quasi isomorfi). Sia $P \in \mathbb{I}_t$. Per $m \gg 0$, $x_t^m P \in \mathbb{I}_{m+t} = I_{m+t}$, quindi $P \in I^{sat}$. Pertanto $I^{sat} = \mathbb{I}$. $\square$

Possiamo finalmente raccogliere il frutto del nostro lavoro:

Corollario 4.32. *Esiste una corrispondenza perfetta:*

$$\{ \text{ideali omogenei saturi} \} \leftrightarrow \{ \text{sotto schemi chiusi di } \mathbb{P}^n \}$$

(Naturalmente il vuoto corrisponde all'ideale massimale irrilevante $\mathfrak{m}$). Quindi tutto sommato un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}_k^n$ non è una cosa così terribile!

Definizione 4.33. *Uno schema X è proiettivo su $\text{Spec } k$ se è isomorfo a un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}_k^n$ per un qualche n .*

Da quanto abbiamo fatto risulta che X su $\text{Spec } k$ è proiettivo se e solo se $X = \text{Proj}(A)$ per un qualche anello graduato A , con $A_0 = k$ e con A generato da A_1 come k -algebra.

Infatti se X è un sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n$ e se $I = H_*^0(\mathcal{I}_X)$, abbiamo $X = \text{Proj}(S/I)$ ($S = k[x_0, \dots, x_n]$).

Viceversa se A è un anello graduato con $A_0 = k$, generato da A_1 come k -algebra, allora A è un quoziente di un qualche anello di polinomi $S = k[x_0, \dots, x_n]$. Se I è il ker di $S \rightarrow A \rightarrow 0$, allora X è isomorfo al sotto schema di $\mathbb{P}^n$ definito da I .

Esercizi.

Esercizio 35 ([15] II. Ex. 5.7)

Sia X uno schema noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente. Si dice che $\mathcal{F}$ è localmente libero se esiste un ricoprimento aperto di X , $\cup U_i$, tale che $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq r \cdot \mathcal{O}_{U_i}$ (r può dipendere da U_i).

- 1) Mostrare che se $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_x$ -modulo libero di rango r , allora esiste un intorno aperto di x , U , tale che $\mathcal{F}|_U \simeq r \cdot \mathcal{O}_U$.
- 2) Concludere che $\mathcal{F}$ è localmente libero $\Leftrightarrow \mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_x$ -modulo libero per ogni $x \in X$.

Esercizio 36 ([15] II. Ex. 5.8)

Sia X uno schema noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente. Si pone $\varphi(x) = \dim \mathcal{F}(x)$, dove $\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$ è la fibra ridotta (o vettoriale) di $\mathcal{F}$ in x .

Mostrare che φ è semi-continua superiormente, cioè se $\dim \mathcal{F}(x) = r$, esiste un intorno aperto U di x tale che $\dim \mathcal{F}(y) \leq r, \forall y \in U$.

Esercizio 37 Sia A un anello integro e sia M un A -modulo finitamente generato. Un $m \in M$ è di torsione se $\text{Ann}(m) \neq 0$ (cioè esiste $a \neq 0, a \in A$ tale che $am = 0$). Sia $T(M)$ l'insieme degli elementi di M di torsione.

- 1) Mostrare che $T(M)$ è un sotto modulo di M . Se $T(M) = 0$, si dice che M è senza torsione.
- 2) Mostrare che $M/T(M)$ è senza torsione.
- 3) Mostrare che $T(M)$ è il nucleo dell'applicazione $\psi : M \rightarrow M \otimes_A K$, dove K è il campo dei quozienti di A e dove ψ è ottenuta tensorizzando con M l'inclusione $A \hookrightarrow K$.
- 4) Se N è un A -modulo finitamente generato, senza torsione, allora N è un sotto modulo di un modulo libero di tipo finito.
- 5) Sia $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$. Mostrare che $T(M)$ è il nucleo dell'applicazione naturale $\mu : M \rightarrow M^{**}$.
- 6) Un A -modulo M è di torsione se ogni elemento $m \in M$ è di torsione (cioè $T(M) = M$), invece M ha torsione se $T(M) \neq 0$. Il modulo M è riflessivo se $\mu : M \rightarrow M^{**}$ è biettiva. Dare degli esempi di moduli di torsione, con torsione ma non di torsione, riflessivi.

Esercizio 38 Sia X uno schema integro, noetheriano e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente. Si definisce un prefascio $T(\mathcal{F})$ nel modo seguente: per ogni aperto U , $T(\mathcal{F})(U)$ è il sotto modulo di torsione di $\mathcal{F}(U)$. Mostrare che $T(\mathcal{F})$ è un fascio coerente e che si ha una successione esatta: $0 \rightarrow T(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/T(\mathcal{F}) \rightarrow 0$, dove $\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ è coerente, senza torsione.

Esercizio 39 ([15] II. Ex. 5.8)

Si riprendono le notazioni dell'Esercizio 36. Mostrare che se X è ridotto e se $\varphi(x)$ è costante allora $\mathcal{F}$ è localmente libero.

In particolare se $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ è una successione esatta di $\mathcal{O}_X$ -moduli coerenti, dove $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono localmente liberi, allora anche $\mathcal{F}$ è localmente libero.

Coomologia, Riemann-Roch.

Questo capitolo è una ripresa veloce degli appunti [5] ai quali rimandiamo per maggior dettagli. Beninteso la referenza principale rimane [15].

D'ora in poi k indicherà un campo algebricamente chiuso, di caratteristica zero e $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_k^n$. Tutti gli schemi sono schemi su $\text{Spec } k$.

5.1 Coomologia

Ci sono essenzialmente due modi di vedere la coomologia in geometria algebrica: la coomologia di Čech e la coomologia come funtore derivato (à la Grothendieck). La coomologia di Čech ha il vantaggio che, certe volte, si possono "fare i conti". Il punto di vista di Grothendieck, più funtoriale è in generale preferibile. Per la coomologia di Čech rimandiamo a [15], III.4, per i funtori derivati a [5] e [15].

Qui ci limiteremo ad usare la coomologia come una macchina (automobile, lavatrice, computer ecc...). Nessuno o pochi sanno veramente cosa succede all'interno di una macchina ma c'è un'interfaccia semplice (pulsanti, pedali, icone ecc...) che ci permette di dare dei comandi e dopodiché avviene il risultato desiderato.

Nel nostro caso la cosa è molto semplice: ad ogni successione esatta di fasci di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$$

la coomologia associa una *successione lunga di coomologia*

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}_1) \rightarrow H^0(\mathcal{F}_2) \rightarrow H^0(\mathcal{F}_3) \rightarrow H^1(\mathcal{F}_1) \rightarrow \dots$$

$$\dots H^i(\mathcal{F}_1) \rightarrow H^i(\mathcal{F}_2) \rightarrow H^i(\mathcal{F}_3) \rightarrow \dots$$

Questa associazione è funtoriale e la coomologia è un funtore additivo cioè $H^i(\bigoplus \mathcal{F}_j) = \bigoplus H^i(\mathcal{F}_j)$.

Questa successione termina (almeno nel nostro caso) in virtù del:

Teorema 5.1. (Grothendieck)

Sia X uno spazio topologico noetheriano di dimensione n . Per ogni fascio di gruppi abeliani su X , $H^i(\mathcal{F}) = 0$, se $i > n$.

Un'altra cosa da tenere presente: se X è una varietà algebrica (o uno schema) e se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo, allora i gruppi $H^i(X, \mathcal{F})$ sono degli $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -moduli. Se X è una varietà algebrica (affine o proiettiva) è chiaro che $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ è un k -spazio vettoriale. Se X è uno schema su k , cioè con un morfismo $X \rightarrow \text{Spec } k$, allora abbiamo un morfismo $k \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X)$ e quindi $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ è ancora un k -spazio vettoriale. Se X è una varietà affine di dimensione > 0 , allora $\dim_k(H^0(X, \mathcal{O}_X)) = \infty$ (Esercizio 12). Nel caso proiettivo, non solo $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$, ma se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$ modulo coerente, $H^i(X, \mathcal{F})$ è un k -spazio vettoriale di dimensione finita per ogni i . Per vederlo useremo il seguente risultato che si dimostra con calcoli espliciti in coomologia di Čech ([15], III Thm. 5.1)

Teorema 5.2. *Sia $S = k[x_0, \dots, x_n]$ e sia $\mathcal{O}(a)$ il fascio $S(a)^\sim$ su $\mathbb{P}^n$.*

- i) Per $a \geq 0$, $H^0(\mathcal{O}(a)) = S_a$ (il k -spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado a). Se $a < 0$, $H^0(\mathcal{O}(a)) = 0$.*
- ii) $H^i(\mathcal{O}(a)) = 0$, se $0 < i < n$, $\forall a \in \mathbb{Z}$*
- iii) $H^0(\mathcal{O}(a)) \simeq H^0(\mathcal{O}(-a - n - 1))^*$*

Con questo abbiamo:

Proposizione 5.3. *Sia X una varietà proiettiva (o uno schema proiettivo) su k . Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente, allora per ogni $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ è un k -spazio vettoriale di dimensione finita.*

Dimostrazione. Per definizione abbiamo un'immersione chiusa $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Se $\mathcal{F}$ è coerente su X , allora $i_*\mathcal{F}$ è coerente su $\mathbb{P}^n$ e la coomologia è la stessa. Possiamo quindi limitarci al caso $X = \mathbb{P}^n$.

Abbiamo una successione esatta: $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$, dove $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}(a_i)$ (Lemma 4.18). Prendendo la coomologia:

$$\dots \rightarrow H^i(\mathcal{E}) \rightarrow H^i(\mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{R})$$

Adesso ragioniamo per induzione discendente. Se $i > n$, tutti i gruppi sono nulli (Teorema 5.1). Se $i = n$, $H^n(\mathcal{E})$ ha dimensione finita per il Teorema 5.2,

$H^{n+1}(\mathcal{R}) = 0$ e quindi $H^n(\mathcal{F})$ ha dimensione finita. Sia $i < n$, allora $H^i(\mathcal{E})$ ha dimensione finita per il Teorema 5.2, $H^{i+1}(\mathcal{R})$ ha dimensione finita per ipotesi di induzione, pertanto $H^i(\mathcal{F})$ ha dimensione finita. $\square$

Corollario 5.4. *Sia X una varietà proiettiva (o uno schema proiettivo integro) allora $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq k$.*

Dimostrazione. Esercizio 27. $\square$

Si osserverà che esistono degli schemi proiettivi irriducibili X (di dimensione > 0) con $\dim_k(H^0(X, \mathcal{O}_X)) > 1$ (Esercizio 42).

Esercizi.

Esercizio 40 Sia X uno schema integro, noetheriano, di tipo finito su k ($k = \bar{k}$). Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente, il rango di $\mathcal{F}$ è $\dim_{k(\xi)} \mathcal{F}_\xi$, dove ξ è il punto generico di X .

1) Mostrare che il rango di un modulo coerente è finito. Se $\mathcal{F}$ ha rango r esiste un aperto non vuoto $U \subset X$ tale che $\mathcal{F}|_U$ sia localmente libero di rango r .

2) Il modulo coerente $\mathcal{F}$ è detto di torsione se $\text{Supp}(\mathcal{F}) \neq X$. Mostrare che: $\mathcal{F}$ è di torsione $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ ha rango zero.

3) Mostrare che $\mathcal{F}$ è di torsione se e solo se $\mathcal{F} = T(\mathcal{F})$.

Esercizio 41 Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su $\mathbb{P}^n$. Mostrare che esiste n_0 (dipendente da $\mathcal{F}$) tale che $H^i(\mathcal{F}(n)) = 0$ se $n \geq n_0$ e $i > 0$.

Esercizio 42 Sia $I \subset S = k[x, y, u, v]$, $I = (x^2, y^2, xy, xu - yv)$. Sia $X \subset \mathbb{P}^3$ il sotto schema chiuso definito da I .

1) Determinare $|X|$, lo spazio topologico sotto giacente. Concludere che X è irriducibile, di dimensione uno (X è una curva).

2) Mostrare che X non è ridotto.

3) Sia H il piano $v = 0$, determinare $X \cap H$ (X è una curva di grado due)

4) Mostrare che $h^0(X, \mathcal{O}_X) > 1$ (hint: In S/I , $xu = yv$. Se $u, v \notin \mathfrak{p}$, allora $x/v = y/u$ in $(S/I)_{(\mathfrak{p})}$. Se $u \in \mathfrak{p}$, ma $v \notin \mathfrak{p}$, allora $x/v \in (S/I)_{(\mathfrak{p})}$. Idem se $v \in \mathfrak{p}$, ma $u \notin \mathfrak{p}$. Se $u, v \in \mathfrak{p} \dots$ Concludere che $x/v = y/u \in H^0(\mathcal{O}_X)$).

Esercizio 43 Sia $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}_k^3$, con k algebricamente chiuso. Una superficie quadrica $Q \subset \mathbb{P}^3$ è il sotto schema definito da $I = (F)$, dove F è un polinomio omogeneo di grado due.

1) Giustificare la seguente affermazione: ogni quadrica Q è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti quadriche:

-un piano doppio ($F = x_0^2$)

-due piani distinti ($F = x_0x_1$)

-un cono quadratico ($F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$)

-una quadrica liscia ($F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$).

2) Sia $\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3 : ((x : y), (u : v)) \rightarrow (xu : xv : yu : yv)$. Mostrare che $\text{Im}(\varphi)$ è la quadrica liscia di equazione $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ (φ è l'immersione di Segre di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). Concludere che ogni quadrica liscia è isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

3) Fissando il punto $(x : y)$ nel primo fattore si ottiene $\varphi_{(x:y)} : \mathbb{P}^1 \rightarrow Q = \text{Im}(\varphi)$. Mostrare che l'immagine di questa applicazione è una retta, notata nel seguito $L_{(x:y)}$. Se $(x : y) \neq (x' : y')$ sono due punti distinti del primo fattore, $L_{(x:y)} \cap L_{(x':y')} = \emptyset$.

4) In modo analogo, fissando un punto $(u : v)$ nel secondo fattore si ottiene

una retta $R_{(u:v)}$. Le rette di questa famiglia sono due a due disgiunte.

5) La superficie Q è ricoperta dalle due famiglie ∞^1 di rette $(L_{(x:y)})$ e $(R_{(u:v)})$ (Q è doppiamente rigata). Determinare $L_{(x:y)} \cap R_{(u:v)}$.

6) Sia $p \in Q$, determinare il piano tangente $T_p Q$ e $T_p Q \cap Q$.

7) Descrivere "geometricamente" la curva X dell'Esercizio 42.

5.2 Divisori su una curva proiettiva liscia, irriducibile.

Prima di tutto cos'è una curva proiettiva liscia, irriducibile?

Dal punto di vista "classico" C è una curva proiettiva liscia, irriducibile se $C \subset \mathbb{P}^n$, per un qualche n , è un insieme algebrico irriducibile, di dimensione uno, non singolare. Quindi se $\mathbb{I}(C)$ indica l'ideale di tutti i polinomi omogenei che si annullano su C , $\mathbb{I}(C)$ è un ideale primo. Inoltre se $S(C) = S/\mathbb{I}(C)$ è l'anello delle coordinate di C , il campo delle funzioni razionali di C è $K(C) = S(C)_{((0))}$. Dire che C ha dimensione uno significa che $k(C)$ è un'estensione algebrica finita di $k(X)$, il campo delle funzioni razionali in una variabile, oppure che $\dim S(C) = 2$ (dimensione di Krull). Finalmente C è non singolare se è verificato il criterio jacobiano: se $(F_1, \dots, F_r)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{I}(C)$, allora la matrice jacobiana $(\partial F_i / \partial x_j)$ ha rango $n - 1$ ad ogni punto di C ([15], I. Ex. 5.8). Un'altra definizione più intrinseca: C è non singolare se per ogni $x \in C$, $\mathcal{O}_{C,x}$ è un anello locale regolare di dimensione uno (cioè $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$).

Queste proprietà sembrano dipendere dall'immersione $C \subset \mathbb{P}^n$, ma non lo sono. Il fatto di essere irriducibile, di dimensione uno è una questione topologica. Il fatto di essere non singolare dipende solo dal fascio $\mathcal{O}_C$, il quale non dipende dall'immersione $C \subset \mathbb{P}^n$.

Dal punto di vista delle varietà di Serre la nostra curva C è lo spazio annellato $(C, \mathcal{O}_C)$.

Dal punto di vista degli schemi C è il sotto schema chiuso di $\mathbb{P}^n = \text{Proj}(S)$ definito da $\mathbb{I}(C)$ (quindi $\mathbb{I}(C)^\sim = \mathcal{I}_C$). Questo definisce uno schema $(C, \mathcal{O}_C)$, proiettivo, integro, separato, noetheriano su k . E' l'immagine tramite il funtore t della varietà C .

Finalmente c'è un altro modo di costruire delle curve che risale a Dedekind-Weber. Sia K un'estensione finita di $k(X)$ (K è un *function field of dimension one*). Si cerca di costruire, in modo algebrico, una curva proiettiva liscia, C_K , con campo delle funzioni razionali isomorfo a K . Per questo si considerano tutte le valutazioni *discrete* di K/k , cioè le $\nu : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ tali che $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$; $\nu(x+y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ e $\nu(\lambda) = 0, \forall \lambda \in k^*$.

Per una tale valutazione $\{x \mid \nu(x) \geq 0\}$ è un anello locale di ideale massimale $\{x \mid \nu(x) > 0\}$. Sia C_K l'insieme degli anelli di valutazione discreta di K/k , allora si può definire su C_K una struttura di curva proiettiva tale che $k(C_K) \simeq K$ (vedere [15], I.6).

Fino alla fine di questa sezione:

curva = curva proiettiva, non singolare, irriducibile.

5.2.1 L'anello locale in un punto di una curva.

Sia C una curva liscia non singolare e sia $x \in C$. L'anello locale $\mathcal{O}_{C,x} =: \mathcal{O}_x$ è un anello locale, noetheriano, regolare di dimensione uno ($\dim_k \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 = 1$). Se $f_x \in \mathcal{O}_x$ è tale che $\bar{f}_x$ sia una base del k spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$, allora $\mathfrak{m}_x = (f_x)$. Ogni elemento $a \in \mathcal{O}_x$ si scrive, in modo unico, $a = u f_x^n$, dove u è invertibile e $n \in \mathbb{N}$. Si pone $\nu_x(a) = n$. Si dice che f_x è un *parametro locale*. In particolare $\mathcal{O}_x$ è un P.I.D. (Esercizio 44).

Il campo dei quozienti dell'anello integro $\mathcal{O}_x$ è $k(f_x) \simeq k(C)$, dove $k(C)$ è il campo delle funzioni razionali su C . Se $h \in k(C)$, allora $h \in \mathcal{O}_x$ o $1/h \in \mathcal{O}_x$. Quindi h si scrive in modo unico $h = f_x^k \cdot g_x$, dove g_x è invertibile e dove $k \in \mathbb{Z}$. Si pone $\nu_x(h) = k$. Abbiamo quindi $\nu_x : k(C)^* \rightarrow \mathbb{Z} : h \rightarrow \nu_x(h)$. Se $\nu_x(h) = n$, allora se $n > 0$, h ha uno zero di ordine n in x ; se $n < 0$, h ha un polo di ordine $-n$ (se $n = 0$, h è regolare e non si annulla in x).

Osserviamo che ν_x è una valutazione discreta di $k(C)/k$ e si recupera l'anello locale $\mathcal{O}_x$ come $\{h \mid \nu_x(h) \geq 0\}$ (l'ideale massimale è $\{h \mid \nu_x(h) > 0\}$). Questo giustifica la definizione di C_K data sopra.

5.2.2 Morfismi tra curve non singolari, morfismi finiti.

Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo non costante tra due curve proiettive irriducibili, non singolari. Siccome $f(X)$ è un chiuso irriducibile, il morfismo è suriettivo e induce $k(Y) \subset k(X)$ (per composizione con f). Questa estensione è finita, diciamo di grado d . Se $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ è un chiuso proprio di X . Quindi $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$. Vogliamo mostrare che per y generico $r = d$, meglio se contati con molteplicità i punti nella fibra $f^{-1}(y)$ sono sempre d , $\forall y \in Y$ ("f è un rivestimento finito di grado d , ramificato").

Bisogna prima contare i punti di $f^{-1}(y)$ con molteplicità. Sia $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_{Y,y}$. Abbiamo $\mathcal{O}_y \subset k(Y) \subset k(X)$. Inoltre $\mathcal{O}_y$ è contenuto in $\tilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O}_{x_1} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{x_r}$. Infatti il morfismo f induce $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ e quindi per ogni i : $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{x_i}$ ("f trasforma funzioni regolari in funzioni regolari"). La struttura di $\tilde{\mathcal{O}}$ è data dal seguente teorema, molto plausibile e che non dimostreremo:

Teorema 5.5. *L'anello $\tilde{\mathcal{O}}$ è un P.I.D. con un numero finito di ideali primi. Se t_i è un parametro locale in x_i , allora ogni $u \in \tilde{\mathcal{O}}$, $u \neq 0$, si scrive in modo unico: $u = t_1^{m_1} \dots t_r^{m_r} \cdot v$, v invertibile, $m_i = \nu_{x_i}(u)$.*

Se $t \in \mathcal{O}_y$ è un parametro locale in y (cioè un'equazione locale del punto y in Y), allora $t \in \mathcal{O}_y \subset \tilde{\mathcal{O}}$ e quindi $t = t_1^{m_1} \dots t_r^{m_r} \cdot v$. L'intero m_i è la molteplicità

con la quale il punto x_i compare nella fibra $f^{-1}(y)$. Poniamo $f^*(y) = \sum m_i x_i$ (come divisore su X). Allora $\deg(f^*(y)) = \sum m_i$.

Conviene adesso introdurre una classe importante di morfismi:

Definizione 5.6. *Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ è finito se esiste un ricoprimento V_i di Y con aperti affini tale che $U_i = f^{-1}(V_i)$ sia affine e tale che $\mathcal{O}(U_i)$ sia un $\mathcal{O}(V_i)$ -modulo finitamente generato.*

Vedere [15], II, p. 84. Questa definizione è valida sia nell'ambito delle varietà che in quello degli schemi.

Abbiamo:

Proposizione 5.7. *Un morfismo non costante $f : X \rightarrow Y$ tra due curve proiettive, non sinogolari, irriducibili è un morfismo finito.*

Più precisamente:

Teorema 5.8. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo non costante tra due curve proiettive, non singolari, irriducibili. Il morfismo f induce $k(Y) \subset k(X)$, estensione finita. Sia $d = [k(X) : k(Y)]$. Sia $y \in Y$ e sia $f^*(y) = \sum m_i x_i$ il divisore associato. Allora $\sum m_i = d$ (cioè ogni fibra di f consta di d punti, contati con molteplicità).*

Dimostrazione. Vedere l'Appendice 10. □

L'intero d si chiama il *grado* del morfismo f . Le ipotesi di non singolarità sono essenziali.

5.2.3 Divisori.

Un divisore di Weil sulla curva C è una somma (finita) $D = \sum_i n_i P_i$, dove $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in C$. Il grado del divisore è $\deg(D) := \sum_i n_i$. Vogliamo associare un divisore a una funzione razionale su C .

Come già detto se h è una funzione razionale su C e $x \in C$, allora $h \in \mathcal{O}_x$ o $1/h \in \mathcal{O}_x$ e quindi possiamo scrivere $h = f_x^k g_x$, $k \in \mathbb{Z}$, dove f_x è un parametro locale in x e dove g_x è invertibile. Si pone $\nu_x(h) = k$. Il divisore della funzione razionale h è $(h) = \sum_{x \in C} \nu_x(h).x$. Se $h \neq 0$, questa somma è finita. Possiamo scrivere $(h) = (h)_0 - (h)_\infty$, dove $(h)_0, (h)_\infty$ sono effettivi (il divisore degli zeri meno quello dei poli).

La funzione razionale h definisce un morfismo $\tilde{h} : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ (si mandano i poli sull'infinito). Siccome l'immagine è un chiuso irriducibile e siccome il

morfismo non è costante, il morfismo è suriettivo, si tratta quindi di un morfismo finito, di grado $d = [k(C) : k(\mathbb{P}^1)]$. Segue che per ogni punto $y \in \mathbb{P}^1$, $\#(\tilde{h}^{-1}(y)) = d$ (contati con molteplicità). Quindi $\deg(h)_0 = \#(\tilde{h}^{-1}(0)) = \deg(h)_\infty = \#(\tilde{h}^{-1}(\infty))$. In conclusione:

Lemma 5.9. *Il divisore di una funzione razionale ha grado zero.*

Definizione 5.10. *Due divisori D, D' sono linearmente equivalenti se la loro differenza è il divisore di una funzione razionale: $D - D' = (h)$.*

Due divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado.

Definizione 5.11. *Il gruppo delle classi, $Cl(X)$, è il gruppo dei divisori modulo equivalenza lineare (cioè $Div(X)$ modulo i divisori principali).*

Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla curva proiettiva liscia X . Sia $g_1 \in \mathfrak{m}_{P_1} \subset \mathcal{O}_{X, P_1}$ un'equazione locale del punto P_1 . Prendiamo un rappresentante del germe di g_1 : (U_1, g_1) . Quindi U_1 è un aperto contenente P_1 e g_1 è una funzione razionale definita su U_1 ($g_1 \in \mathcal{O}(U_1)$), che si annulla in P_1 . In particolare g_1 è una funzione razionale su X . Inoltre $\text{div}(g_1^{n_1})$ è un divisore della forma $n_1 P_1 + \sum m_j Q_j$, $Q_j \neq P_1$. Quindi D e $\text{div}(g_1^{n_1})$ differiscono al più nei punti $P_i, i > 1, Q_j$ e quindi coincidono sull'aperto complementare al chiuso costituito dall'unione finita dei $P_i, i > 2, Q_j$.

Questo mostra che $\forall x \in X$, esiste un aperto U_x contenente x e una funzione razionale (non nulla), g_x , tale che $\text{div}(g_x) = D$ su U_x . Siccome X è quasi compatto (per la topologia di Zariski) si può ottenere un ricoprimento finito $X = \cup U_i$ e delle funzioni razionali f_i tali che: $\text{div}(f_i) = D$ su U_i . Su $U_i \cap U_j$ abbiamo $\text{div}(f_i/f_j) = \text{div}(f_i) - \text{div}(f_j) = D| - D| = 0$. Quindi f_i/f_j è regolare su U_{ij} (niente poli) e non si annulla (niente zeri). Cioè $f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ ($\mathcal{O}^*(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f \text{ non si annulla su } U\}$).

Definizione 5.12. *Un divisore di Cartier su C consiste nei seguenti dati: un ricoprimento aperto di C , $\cup U_i$ e per ogni aperto U_i , una funzione razionale non identicamente nulla su U_i , tale che $f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$.*

Quindi ad ogni divisore di Weil possiamo associare un divisore di Cartier. Un divisore di Cartier è principale se è il divisore di una funzione razionale ($f_i = f, \forall i$); due divisori di Cartier sono linearmente equivalenti se la loro differenza è un divisore principale. Il gruppo delle classi dei divisori di Cartier è $CaCl(C)$. Si mostra poi che $Cl(C) \simeq CaCl(C)$.

5.2.4 Il fascio invertibile associato a un divisore.

Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla nostra curva X . A D corrisponde un divisore di Cartier (U_i, f_i) . Adesso a questo divisore di Cartier associamo un fascio $\mathcal{O}_X(D)$ (o più semplicemente $\mathcal{O}(D)$) nel modo seguente:

$$\mathcal{O}(D)(U_i) = \{h/f_i \mid h \in \mathcal{O}(U_i)\} \subset K(U_i)$$

A priori questo definisce $\mathcal{O}(D)$ solo sugli aperti U_i , ma (U_i) è un ricoprimento, quindi se V è un aperto qualsiasi, $\mathcal{O}(D)(V) = \{f \in K(V) \mid f|V \cap U_i = h_i/f_i, h_i \in \mathcal{O}(V \cap U_i)\}$. In altri termini $\mathcal{O}(D)$ è il sotto $\mathcal{O}_X$ -modulo di $\mathcal{K}$ generato da f_i^{-1} su U_i ($\mathcal{K}$ il fascio delle funzioni razionali). Osservare che, essendo X irriducibile, $\mathcal{K}$ è il fascio costante K : $\mathcal{K}(U) = K(U) = K$. Anche qui si verifica che divisori di Cartier equivalenti definiscono fasci isomorfi.

Definizione 5.13. Con le notazioni precedenti $\mathcal{O}(D)$ è il fascio associato al divisore D .

Abbiamo:

Lemma 5.14. Per ogni divisore D su X abbiamo un isomorfismo di k -spazi vettoriali: $H^0(\mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$.

Dimostrazione. Si ricorda che $\mathcal{L}(D) = \{f \in K(X)^* \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$. Sia (U_i, f_i) il divisore di Cartier associato a D . Una sezione globale di $\mathcal{O}(D)$ (se esiste) è sostanzialmente una funzione razionale g tale $g|U_i = h_i/f_i, h_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Quindi $\text{div}(g|U_i) = \text{div}(h_i) - \text{div}(f_i)$. Per definizione $\text{div}(f_i) = D|U_i$. Quindi $\text{div}(g|U_i) + D|U_i = \text{div}(h_i) \geq 0$, perché $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Siccome questo è vero per ogni i , $\text{div}(g) + D \geq 0$ e $g \in \mathcal{L}(D)$.

Vice versa se $f \in \mathcal{L}(D)$ non nulla, allora, se $h_i = f|U_i f_i$, abbiamo $\text{div}(h_i) = \text{div}(f|U_i) + \text{div}(f_i) = (\text{div}(f) + D)|U_i \geq 0$. Quindi $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$ e $f|U_i = h_i/f_i$, cioè $f \in H^0(\mathcal{O}(D))$. $\square$

Lemma 5.15. Sia $D = \sum n_i P_i$ un divisore sulla curva X .

1. Il fascio $\mathcal{O}(D)$ è invertibile
2. $\mathcal{O}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)^*$.
In particolare $\mathcal{O}(-D) \simeq \mathcal{O}(D)^* = \mathcal{H}om(\mathcal{O}(D), \mathcal{O})$.
3. $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}(D_1) \simeq \mathcal{O}(D_2)$.

Dimostrazione. (1) Il fascio $\mathcal{O}|U_i$ è generato da 1, quindi $\mathcal{O}|U_i \rightarrow \mathcal{O}(D)|U_i : 1 \rightarrow 1/f_i$ è un isomorfismo. (Se preferite per ogni aperto $V \subset U_i$, $\mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(D)(V) : g \rightarrow g/f_i$ definisce l'isomorfismo di cui sopra). Quindi $\mathcal{O}(D)$ è localmente libero di rango uno.

(2) Se D_i è localmente definito da f_i su U_i , allora $\mathcal{O}(D_1 - D_2)|_{U_i}$ è generato da f_2/f_1 . Cioè $\mathcal{O}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}(D_1) \cdot \mathcal{O}(D_2)^{-1}$ come sotto fascio di $\mathcal{K}$; ma questo prodotto è isomorfo a $\mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)^*$ (guardare i cocicli).

Oppure: $\mathcal{O}(D_1)(U_i) \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} \mathcal{O}(-D_2)(U_i) \simeq \{h/f_1 \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} g f_2\} \simeq \{hg/f_1 \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} f_2\}$ e l'isomorfismo è dato da $h/f_1 \otimes f_2 \rightarrow h f_2/f_1$. Per l'ultima affermazione prendere $D_1 = 0$.

(3) Mostriamo: $D \sim 0 \Leftrightarrow \mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$. Se $D \sim 0$ allora $D = \text{div}(f)$ e $\mathcal{O}(D)$ è globalmente definito da $1/f$, l'isomorfismo cercato è dato da $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(D) : 1 \rightarrow 1/f$. Viceversa se $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$, allora $\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D)(X)$. Sia $s = \varphi(1)$, allora s è una sezione globale di $\mathcal{O}(D)$ che non si annulla mai. Nell'isomorfismo $\mathcal{O}(D)(X) \simeq \mathcal{L}(D)$ (Lemma 5.14), s corrisponde a una funzione razionale f tale che $\text{div}(f) + D = 0$ (in generale il divisore effettivo $\text{div}(f) + D$ è il luogo degli zeri di s). Cioè $\text{div}(f) = -D$. Quindi $\text{div}(1/f) = D$ e D è principale.

Finalmente visto che $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow D_1 - D_2 \sim 0$, si conclude con (2). $\square$

Finalmente abbiamo:

Proposizione 5.16. *Su una curva proiettiva liscia, X , l'applicazione: $Cl(X) \rightarrow Pic(X) : D \rightarrow \mathcal{O}(D)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Usando l'isomorfismo $CaCl(X) \simeq Cl(X)$, il Lemma 5.15 mostra che l'applicazione è ben definita ($D \sim D' \Rightarrow \mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}(D')$), è un morfismo di gruppi ($\mathcal{O}(D + D') = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D')$) ed è iniettiva ($\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O} \Rightarrow D \sim 0$). Per concludere basta mostrare che ogni fascio invertibile $\mathcal{L}$ è isomorfo a un sotto fascio del fascio $\mathcal{K}$. Infatti in questo caso essendo $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}$ -modulo di rango uno sarà localmente generato da un elemento e si avrà: $\mathcal{L}(U_i) = f_i \cdot \mathcal{O}(U_i) \subset K$ ($f_i \in K$) e se D è il divisore di Cartier ($1/f_i, U_i$), allora $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{L}$.

Osserviamo che $\mathcal{K}$ è il fascio costante K dove K è il campo delle funzioni razionali di X (questo segue dal fatto che X è irriducibile, quindi due aperti non vuoti hanno un'intersezione non vuota). Se U è un aperto tale che $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}|_U$, allora $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{K})|_U \simeq \mathcal{K}|_U$, quindi $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$ è un fascio costante su U . Siccome gli aperti U ricoprono X e siccome X è irriducibile, questo implica $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$. L'applicazione naturale $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$ esprime $\mathcal{L}$ come sotto fascio di $\mathcal{K}$. $\square$

Possiamo definire il grado di un fascio invertibile:

Definizione 5.17. *Per il Lemma 5.16 ogni fibrato in rette (fascio invertibile) L su X è della forma $\mathcal{O}(D)$. Il grado di L è $\deg(L) := \deg(D)$ (è ben definito per il Lemma 5.15).*

Con il linguaggio degli schemi un altro approccio è possibile per descrivere il fascio invertibile associato a un divisore. Ogni divisore di Weil si scrive

come la differenza di due divisori effettivi (un divisore $\sum_i n_i P_i$ è effettivo se $n_i \geq 0, \forall i$), un divisore effettivo è una somma di divisori del tipo $n.P$, $n \geq 0$.

Ad ogni $n.P$ effettivo associamo un sotto schema chiuso di C nel modo seguente: se $U = \text{Spec}(A)$ è un aperto affine contenente P allora P corrispondente ad un ideale massimale $\mathfrak{m}$ (P è un punto chiuso), sia $I = \mathfrak{m}^n$, l'ideale I definisce un sotto schema chiuso, Z , di $\text{Spec}(A) = U$. Osserviamo che $|Z| = \{P\}$. Adesso definiamo un sotto schema chiuso, sempre notato Z , di C tramite $U \hookrightarrow C$. Sia $\mathcal{I}_Z$ il fascio d'ideali di Z , abbiamo:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$$

Il fascio $\mathcal{I}_Z$ è definito da $\mathcal{I}_Z(V) = \mathcal{O}_C(V)$ se $P \notin V$, $\mathcal{I}_Z(V) = \{f \in \mathcal{O}_C(V) \mid \nu_P(f) \geq n\}$ se $P \in V$. Lo schema Z è il punto P "n-uplato sulla curva C ". Siccome $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_C$, $\mathcal{I}_Z$ è senza torsione. Siccome $\mathcal{O}_Z$ è di torsione (ha supporto sul punto P), $\mathcal{I}_Z$ ha rango uno. Quindi $\mathcal{I}_Z$ è localmente libero di rango uno. Poniamo $\mathcal{I}_Z = \mathcal{O}(-nP)$ e $\mathcal{O}(nP) := \mathcal{I}_Z^*$. Tensorizzando la successione qui sopra con il fascio invertibile $\mathcal{I}_Z^*$ otteniamo:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}(nP) \rightarrow \mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{I}_Z^* \rightarrow 0$$

Siccome $\mathcal{O}_Z$ ha supporto su P e siccome $\mathcal{I}_Z^*$ è localmente libero di rango uno, $\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{I}_Z^* \simeq \mathcal{O}_Z$. Vediamo quindi che $\mathcal{O}(nP)$ ha una sezione che si annulla lungo Z , ma Z (moralmente) è nP .

Se $D = \sum_i n_i P_i$ è effettivo, il fascio associato a D è il prodotto tensoriale dei vari $\mathcal{O}(n_i P_i)$. Se $D = D_1 - D_2$, D_i effettivi, il fascio associato a D è $\mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(-D_2)$.

Il lettore si convincerà che questo approccio è equivalente a quanto fatto prima. Si convincerà anche che tutti i sotto schemi chiusi di C sono della forma $\sum_i n_i P_i$, $n_i > 0$, fatte le dovute identificazioni, come sopra ($Z = n.P$).

Quindi il passaggio agli schemi per una curva proiettiva, irriducibile, non singolare aggiunge il punto generico e permette di vedere i divisori effettivi come sotto schemi chiusi di C , e viceversa.

Esercizi.

Esercizio 44 Sia $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anello locale, noetheriano, regolare di dimensione uno; cioè $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ ($\dim A$ è la dimensione di Krull).

- 1) Mostrare che $\mathfrak{m}$ è principale: $\mathfrak{m} = (f)$.
- 2) Mostrare che ogni elemento $a \in A$ si scrive $a = uf^n$, dove $n \in \mathbb{N}$ e dove u è invertibile.
- 3) Mostrare che f non è nilpotente. Concludere che A è integro e che la scrittura $a = uf^n$ di 2) è unica.
- 4) Concludere che A è un P.I.D.

Per il teorema di struttura dei moduli su un P.I.D., ogni A -modulo M finitamente generato è della forma $M = A^n \oplus T$ dove T è il sotto modulo di torsione di M . In particolare M è libero $\Leftrightarrow M$ è senza torsione.

Esercizio 45 1) Sia C una curva proiettiva, liscia, irriducibile su k . Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_C$ -modulo coerente. Mostrare che $\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus T(\mathcal{F})$, dove $\mathcal{E}$ è localmente libero e dove $T(\mathcal{F})$ è il sotto fascio di torsione di $\mathcal{F}$. In particolare $\mathcal{F}$ è localmente libero $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ è senza torsione.

2) Dare un esempio di un fascio senza torsione su $\mathbb{P}^2$ che non sia localmente libero.

Esercizio 46 Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ ($k = \bar{k}$) una curva liscia di grado d .

- 1) Mostrare che C è irriducibile.
- 2) Mostrare che esiste una successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

Concludere che $g(C) = (d-1)(d-2)/2$. Si osserverà che non tutti i generi possibili sono realizzati (non esiste nessuna curva piana liscia di genere 2).

3) Sia $Z \subset \mathbb{P}^2$ un sotto schema chiuso di dimensione zero. Il grado di Z è, per definizione, $\deg Z := h^0(\mathcal{O}_Z)$ (se Z è ridotto, è il numero di punti di Z).

Siano $C, X \subset \mathbb{P}^2$ due curve di gradi d, e , senza componenti comuni. Mostrare che $\deg(C \cap X) = de$ (usare l'Esercizio 34). Questa forma "globale" del teorema di Bezout è mediamente soddisfacente perché non spiega come sono calcolate, localmente, le molteplicità d'intersezione.

5.3 Il teorema di Riemann-Roch e conseguenze.

Se C è una curva proiettiva, liscia, irriducibile, su k , per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ su C abbiamo solo due gruppi di coomologia da considerare $H^0(\mathcal{F})$ e $H^1(\mathcal{F})$; entrambi sono k -spazi vettoriali di dimensione finita (Proposizione 5.3). Inoltre $H^0(C, \mathcal{O}_C) \simeq k$ (Corollario 5.4).

Quindi per la nostra curva C , $h^0(\mathcal{O}) = 1$ (se non c'è rischio di confusione scriviamo $\mathcal{O}$ invece di $\mathcal{O}_C$, $H^i(\mathcal{F})$ invece di $H^i(C, \mathcal{F})$). Finalmente $h^i(\mathcal{F}) := \dim_k(H^i(\mathcal{F}))$.

Definizione 5.18. Il genere della curva C è $g(C) := h^1(\mathcal{O})$.

Se $k = \mathbb{C}$, C può essere vista come una superficie di Riemann compatta e quindi come una superficie reale, compatta, orientabile. Si dimostra che C è omeomorfa a un toro con $g(C)$ buchi. In questo caso, quindi il genere è un invariante topologico. Per un campo qualsiasi non c'è niente di simile. In realtà la definizione più naturale del genere sarebbe: $g(C) = h^0(T_C^*)$, dove $T_C^* = \omega_C$ è il fibrato cotangente. Per la dualità di Serre $h^0(\omega_C) = h^1(\mathcal{O})$.

Definizione 5.19. Sia C una curva proiettiva liscia, irriducibile e sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_C$ -modulo, la caratteristica di Eulero-Poincaré di $\mathcal{F}$ è: $\chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F})$.

Lemma 5.20. Sia $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow 0$ una successione esatta di $\mathcal{O}_C$ -moduli coerenti sulla curva C . Allora: $\chi(\mathcal{F}_0) = \chi(\mathcal{F}_1) + \chi(\mathcal{F}_2)$ (la caratteristica di Eulero-Poincaré è additiva: è vero in qualsiasi dimensione).

Dimostrazione. Spezzettare la successione esatta lunga di coomologia in tante successioni esatte corte: esercizio. $\square$

Una prima versione del teorema di Riemann-Roch:

Teorema 5.21. (Riemann-Roch)

Sia C una curva proiettiva liscia, irriducibile, di genere g e sia $D \in \text{Div}(C)$ un divisore qualsiasi. Allora:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = \deg(D) - g + 1$$

Dimostrazione. Il teorema è vero se $D = 0$: $h^0(\mathcal{O}) - h^1(\mathcal{O}) = 0 - g + 1$, infatti $h^0(\mathcal{O}) = 1$ perché C è proiettiva e $h^1(\mathcal{O}) = g$ per definizione. Siccome ogni divisore si riconduce al divisore nullo per un numero finito di operazioni di addizione o differenza di un punto, basta mostrare che la formula è vera per D se e solo se è vera per $D - P$, $P \in X$ un punto qualsiasi.

Abbiamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-P) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

(qui $\mathcal{O}(-P) = \mathcal{I}_P$). Tensorizzando per $\mathcal{O}(D)$ viene:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D - P) \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

Infatti $\mathcal{O}(D)$ è localmente libero quindi piatto, inoltre siccome localmente $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$ e siccome $\mathcal{O}_P$ ha supporto su P , $\mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}_P \simeq \mathcal{O}_P$.

Per il Lemma 5.20): $\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}(D - P)) + \chi(\mathcal{O}_P)$. Visto che $\chi(\mathcal{O}_P) = h^0(\mathcal{O}_P) - h^1(\mathcal{O}_P) = 1$, abbiamo: $\chi(\mathcal{O}(D)) = 1 + \chi(\mathcal{O}(D - P))$. Quindi la formula è vera per $\mathcal{O}(D)$ se e solo se è vera per $\mathcal{O}(D - P)$. Il teorema è dimostrato. $\square$

Ad ogni varietà (differenziabile, analitica, algebrica) viene associato un oggetto naturale: il suo fibrato tangente.

Definizione 5.22. *Sia X una curva algebrica proiettiva liscia. Il fibrato canonico di X , ω_X , è: $\omega_X = T_X^* = \text{Hom}(T_X, \mathcal{O}_X)$.*

Da un punto di vista algebrico il fascio canonico è l'oggetto più naturale. Lo si può definire come il fascio dei differenziali regolari.

Definizione 5.23. *Un divisore canonico, K , è un divisore tale che $\mathcal{O}(K) \simeq \omega_X$.*

La definizione ha senso perché sappiamo che ogni fibrato in rette L è della forma $L = \mathcal{O}(D)$ per un qualche divisore.

La dualità di Serre (che non dimostreremo) permette, sostanzialmente, di esprimere un h^1 come un h^0 ; si tratta di un teorema molto generale, il caso particolare che ci interessa è:

Teorema 5.24. (Dualità di Serre)

Sia X una curva proiettiva liscia, irriducibile e sia $D \in \text{Div}(X)$ un divisore qualsiasi, allora:

$$H^1(\mathcal{O}(D)) \simeq H^0(\omega_X \otimes \mathcal{O}(-D))^*$$

In particolare $h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(K - D))$.

Usando la dualità di Serre abbiamo un'altra formulazione del teorema di Riemann-Roch:

Teorema 5.25. (Riemann-Roch)

Sia C una curva proiettiva liscia, irriducibile di genere g . Sia $D \in \text{Div}(X)$ un divisore qualsiasi, allora:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^0(\mathcal{O}(K - D)) = \deg(D) - g + 1$$

Visto che $h^0(\mathcal{O}(D)) = l(D)$, ritroviamo la formulazione classica: $l(D) - l(K - D) = \deg(D) - g + 1$.

Lemma 5.26. *Se K è un divisore canonico, allora $\deg(K) = 2g - 2$.*

Dimostrazione. Abbiamo $\chi(\mathcal{O}(K)) = \chi(\omega_C) = h^0(\omega_C) - h^1(\omega_C) = h^1(\mathcal{O}) - h^0(\mathcal{O})$ (dualità di Serre). Quindi $\chi(\mathcal{O}(K)) = g - 1$. Ma per Riemann-Roch: $\chi(\mathcal{O}(K)) = \deg(K) - g + 1$. Segue che $\deg(K) = 2g - 2$. $\square$

Esercizi.

Esercizio 47 (Classificazione dei fibrati su $\mathbb{P}^1$)

Scopo dell'esercizio è mostrare che ogni fascio localmente libero di rango r , $\mathcal{F}$, su $\mathbb{P}^1$, è isomorfo a una somma diretta $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$, con gli a_i univocamente determinati da $\mathcal{F}$.

1) Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su $\mathbb{P}^1$, mostrare che $h^1(\mathcal{F}(n)) = 0$ se $n \gg 0$. Se $\mathcal{E}$ è localmente libero di rango r , la dualità di Serre ci dice che $h^1(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}^* \otimes \omega_{\mathbb{P}^1})$. Concludere che se $\mathcal{E}$ è localmente libero, allora $h^0(\mathcal{E}(-n)) = 0$, se $n \gg 0$. E' ancora vero questo se $\mathcal{E}$ non è localmente libero?

2) Sia $\mathcal{E}$ localmente libero di rango r . Se $\mathcal{O} \xrightarrow{s} \mathcal{E}$ è una sezione di $\mathcal{E}$, dualizzando si ottiene $\mathcal{E}^* \xrightarrow{s^*} \mathcal{O}$, la cui immagine è della forma $\mathcal{I}_Z$, per un qualche sotto schema chiuso $Z \subset \mathbb{P}^1$. Abbiamo $Z = (s)_0$, il divisore degli zeri di s .

Sia $m = \min\{n \mid h^0(\mathcal{E}(n)) \neq 0\}$ (m è ben definito in virtù del punto 1). Se $s \in H^0(\mathcal{E}(m))$, mostrare che $(s)_0 = \emptyset$. Concludere che abbiamo:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} \mathcal{E}(m) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

dove $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango $r - 1$.

3) Si tratta di dimostrare che ogni fascio localmente libero, $\mathcal{F}$, di rango r su $\mathbb{P}^1$ è isomorfo a $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$. Per questo si ragiona per induzione su r . Se $r = 1$ l'asserto è vero. Consideriamo il passo di induzione e quindi l'asserto vero per $r - 1$. Sia $\mathcal{E}$ di rango r . Per il punto 2) esiste una successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}(m) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

dove $m = \min\{t \mid h^0(\mathcal{E}(t)) \neq 0\}$ e dove $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango $r - 1$. Per ipotesi di induzione $\mathcal{F} = \bigoplus_{j=1}^{r-1} \mathcal{O}(b_j)$. Mostrare che $b_j \leq 0$, $\forall j$. Concludere che $h^1(\mathcal{F}^*) = 0$.

4) Sia $0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ (*) una successione esatta di $\mathcal{O}_X$ -moduli coerenti sulla varietà X . Si assume $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ localmente liberi. Mostrare che $\mathcal{E}$ è localmente libero. Applicando il funtore $\text{Hom}(\mathcal{F}, -)$ si ottiene:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

L'applicazione δ manda $\text{Id}_{\mathcal{F}}$ su un elemento $e \in \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{H})$. L'elemento e è la classe dell'estensione (*) (cf [15], III, Exercise 6.1). La successione esatta (*) spezza se e solo se $e = 0$. Si dimostra inoltre che $\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{H}) = H^1(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{H})$ ([15] III Prop. 6.7, Prop. 6.3). Tornando al punto precedente 3), concludere che $\mathcal{E}(m) \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{F} \simeq \mathcal{O} \oplus \bigoplus_{j=1}^{r-1} \mathcal{O}(b_j)$.

5) Mostrare che se $\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i) \simeq \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}(b_j)$, allora (dopo riordino degli indici) $a_i = b_i, \forall i$ (considerare $h^0(\mathcal{F}(t))$ per vari t opportuni). Concludere che se $\mathcal{F}$ è un fascio localmente libero di rango r su $\mathbb{P}^1$, allora $\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$, con gli a_i univocamente determinati.

Questo risultato viene spesso attribuito a Grothendieck in realtà era già noto (non in questa forma) prima.

Esercizio 48 Sia D un divisore di grado zero sulla curva C . Mostrare che $h^0(\mathcal{O}(D)) > 0 \Leftrightarrow D \sim 0$.

Esercizio 49 1) Mostrare che due punti di $\mathbb{P}^1$ sono sempre linearmente equivalenti.

2) Sia C una curva di genere $g > 0$. Mostrare che due punti di C non sono mai linearmente equivalenti.

Esercizio 50 Mostrare che $\omega_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Sia C una curva di genere uno, mostrare che $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C$.

Esercizio 51 Sia C una curva di genere g e L un fibrato in rette di grado d . Il fibrato L è non speciale $\Leftrightarrow h^1(L) = 0$.

1) Mostrare che se $d > 2g - 2$, allora L è non speciale.

2) Se $d = 2g - 2$ e $h^1(L) \neq 0$, allora $L \simeq \omega_C$ (quindi il fibrato canonico è l'unico fibrato speciale di grado $2g - 2$).

5.4 Sistemi lineari senza punti base, morfismi nello spazio proiettivo.

Ad ogni divisore D abbiamo associato un fibrato in rette (fascio localmente libero di rango uno) $\mathcal{O}(D)$ tale che $H^0(\mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$.

Il divisore degli zeri di una sezione globale di $\mathcal{O}(D)$:

Se $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$, visto che $\mathcal{O}(D)$ è localmente isomorfo a $\mathcal{O}$ possiamo vedere (localmente) s come una sezione di $\mathcal{O}$ cioè come una funzione regolare su un aperto, U , contenente x : $s|_U : U \rightarrow k$, il divisore degli zeri $(s)_0$ su U è $s|_U^*(0)$. Se $s(x) \neq 0$, allora $x \notin (s)_0$, se x compare con molteplicità m in $s|_U^*(0)$ (cioè s si annulla con molteplicità m in x) allora $(s)_0 = mx + \sum n_i P_i$, $P_i \neq x$.

Detto diversamente: una sezione globale $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$ corrisponde ad un morfismo $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(D)$ definito da $1_x \rightarrow s_x$. Il morfismo (di fasci) è iniettivo. Dualizzando si ottiene $\mathcal{O}(-D) \rightarrow \mathcal{O}$. Sia $\mathcal{J}$ l'immagine, quindi $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ è un fascio d'ideali. Se $\mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_x$, s_x non genera $\mathcal{O}_x$ (quindi $s_x \in \mathfrak{m}_x$, cioè $s(x) = 0$). Adesso $\mathcal{J}$ definisce un sotto schema, cioè, visto che siamo su una curva, un divisore di X che non è altro che $(s)_0$. Ovviamente il divisore $(s)_0$ è effettivo.

Lemma 5.27. *Sia D un divisore sulla curva proiettiva liscia X . Sia $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$. Nell'isomorfismo $H^0(\mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{L}(D)$, sia f l'immagine di s . Abbiamo $\text{div}(f) + D = D_0 \geq 0$. Allora $(s)_0 = D_0$.*

In particolare $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(D)))$ si identifica con l'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a D .

Dimostrazione. Sia (U_i, f_i) il divisore di Cartier corrispondente a D . Quindi f_i definisce D su U_i e $\mathcal{O}(D)(U_i) = \{h/f_i \mid h \in \mathcal{O}(U_i)\}$. La sezione globale $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$ corrisponde ad una funzione razionale f tale che $f|_{U_i} = h_i/f_i$. Abbiamo $s(x) = 0$ ($x \in U_i$) $\Leftrightarrow s_x$ non è un generatore di $\mathcal{O}(D)_x$. Questo è equivalente a dire che $h_i(x) = 0$ (pensare all'isomorfismo $\mathcal{O}(D)|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}|_{U_i} : 1/f_i \rightarrow 1$). Più precisamente $s_x \in \mathfrak{m}_x^t \setminus \mathfrak{m}_x^{t+1}$ se e solo se h_i si annulla con molteplicità t in x . Abbiamo $\text{div}(f|_{U_i}) = \text{div}(h_i) - \text{div}(f_i) = \text{div}(h_i) - D|_{U_i}$. Pertanto $D_0|_{U_i} = \text{div}(h_i)$ contiene x (con molteplicità t) se e solo se $s(x) = 0$ (con molteplicità t).

Chiaramente se $s = \lambda s'$, allora $(s)_0 = (s')_0$. Viceversa se $(s)_0 = (t)_0$, allora $\text{div}(f) = \text{div}(g)$ (dove f corrisponde a s , g a s'). Pertanto $\text{div}(f/g) = 0$, cioè f/g è regolare su tutto X e quindi $f/g = \lambda$. $\square$

Definizione 5.28. *Un sistema lineare completo è l'insieme (eventualmente vuoto) dei divisori effettivi linearmente equivalenti a un dato divisore D_0 . Lo si nota $|D_0|$.*

Per il Lemma 5.27, $|D_0| \simeq \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(D_0)))$, quindi $|D_0|$ ha una struttura naturale di spazio proiettivo.

Definizione 5.29. *Un sistema lineare δ è un sotto spazio lineare di un sistema lineare completo. La dimensione di δ è la sua dimensione in quanto spazio proiettivo.*

Se $\delta \subset |D_0|$, allora $\delta = \mathbb{P}(V)$ dove V è un sotto spazio vettoriale di $H^0(\mathcal{O}(D_0))$. Se $\dim \delta = r$ (nella terminologia classica si usa dire che δ è ∞^r), allora $\dim_k V = r + 1$ è la dimensione "vettoriale" del sistema lineare.

Un sistema lineare ha anche un grado: se $\delta \subset |D_0|$ e se $d = \deg D_0$, si dice che δ ha grado d . Nella terminologia classica un g_d^r è un sistema ∞^r , di grado d ("una famiglia lineare ∞^r di divisori di grado d ").

Definizione 5.30. *Un sistema lineare δ è senza punti base se per ogni punto $x \in X$ esiste un divisore $D \in \delta$ tale che $x \notin D$.*

Quindi δ è senza punti base se non tutti i divisori di δ passano per uno stesso punto di X .

Sia $\delta = \mathbb{P}(V)$ un sistema lineare, ∞^n , senza punti base e sia $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ una base di $V \subset H^0(\mathcal{O}(D_0))$. Possiamo definire un morfismo $X \rightarrow \mathbb{P}^n$ tramite $x \rightarrow (s_0(x) : s_1(x) : \dots : s_n(x))$ (qui $s_i(x) \in \mathcal{O}(D_0)(x) = \mathcal{O}(D_0)_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{O}(D_0)_x \simeq k$). Siccome non tutti gli s_i si annullano in x , abbiamo un punto di $\mathbb{P}^n$ ben definito.

Detto in un altro modo, sia X_i l'aperto di X dove $(s_i)_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{O}(D_0)_x$. Definiamo un'applicazione da X_i nell'aperto standard di $\mathbb{P}^n$, $U_i = \{x_i \neq 0\}$ nel modo seguente: abbiamo $U_i = \text{Spec } k[y_1, \dots, y_n]$ ($y_j = x_j/x_i$), allora il morfismo di anelli $k[y_1, \dots, y_n] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) : y_j \rightarrow s_j/s_i$, fornisce $X_i \rightarrow U_i$ ([15], II Ex. 2.4). Siccome gli X_i ricoprono X (δ senza punti base) e siccome tutti questi morfismi si incollano, otteniamo un morfismo $X \rightarrow \mathbb{P}^n$.

Una descrizione "geometrica" più intrinseca è la seguente. Sia $\varphi : X \rightarrow \delta^* = \mathbb{P}(V)^*$, tale che se $x \in X$, $\varphi(x)$ è l'iperpiano, h , dei divisori di δ che contengono x . L'iperpiano h corrisponde ad un punto nello spazio duale δ^* .

Viceversa se $C \subset \mathbb{P}^n$ è una curva non degenera (i.e. non contenuta in nessun iperpiano), allora, se H è un iperpiano, $C \cap H$ è un insieme finito di punti, cioè un divisore. Se H' è un altro iperpiano, il divisore $C \cap H'$ è linearmente equivalente al divisore $C \cap H$ (considerare la funzione razionale H/H'). In particolare (se contati con molteplicità) $\deg(C \cap H) = \deg(C \cap H')$. Considerando tutti gli iperpiani otteniamo un sistema lineare, δ , ∞^n , senza punti base, di grado $d = \deg(C \cap H)$.

Definizione 5.31. *Con le notazioni precedenti, il fascio invertibile $\mathcal{O}_C(1)$ è il fascio $\mathcal{O}_C(D)$ dove D è un divisore iperpiano ($D = C \cap H$ per un qualche iperpiano H). Il grado di $\mathcal{O}_C(1)$ è il grado di $C \subset \mathbb{P}^n$.*

Osservazione 5.32. Un'altra descrizione del fascio $\mathcal{O}_C(1)$ è la seguente: $\mathcal{O}_C(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} \mathcal{O}_C$, cioè $\mathcal{O}_C(1)$ è la *restrizione* a C di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Attenzione che si tratta della restrizione *algebrica* (l'unica che abbia un senso).

Vediamo quindi che esiste una corrispondenza tra sistemi lineari senza punti base su C e morfismi da C nello spazio proiettivo (questo spiega l'importanza della nozione di sistema lineare).

Abbiamo un criterio coomologico per decidere se un sistema lineare *completo* è senza punti base.

Definizione 5.33. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente sulla varietà X . Il fascio $\mathcal{F}$ è generato dalle sezioni globali se l'applicazione di valutazione:*
 $v : H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ *è suriettiva.*

Abbiamo $H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \simeq t \cdot \mathcal{O}_X$, dove $t = h^0(\mathcal{F})$ (a priori può anche essere $t = 0$). La mappa v è data nel punto x da: $v_x : H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{F}_x : s \otimes 1_x \rightarrow s_x$. Passando alle fibre ridotte ("vettoriali") viene: $H^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}(x) : s \rightarrow s(x)$.

Lemma 5.34. *Sia D_0 un divisore sulla curva C . Sono equivalenti:*

- 1) *Il sistema lineare completo $|D_0|$ è senza punti base*
- 2) *Il fascio invertibile $\mathcal{O}_C(D_0)$ è generato dalle sezioni globali.*

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Sia $x \in C$. Siccome $|D_0|$ è senza punti base, esiste $D \in |D_0|$ che non contiene x . Per il Lemma 5.27 D corrisponde a una sezione $s \in H^0(\mathcal{O}_C(D_0))$ il cui divisore degli zeri $(s)_0$ è D . In particolare $s(x) \neq 0$. Quindi s genera $\mathcal{O}_C(D_0)_x$.

2) $\Rightarrow$ 1). Sia $x \in C$. Siccome $\mathcal{O}_C(D_0)$ è generato dalle sezioni globali, esiste $s \in H^0(\mathcal{O}_C(D_0))$ tale che $s(x) \neq 0$. Per il Lemma 5.27, s corrisponde a un divisore $D \in |D_0|$ tale che $(s)_0 = D$, quindi $x \notin D$. $\square$

Lemma 5.35. *Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile sulla curva C . Allora $\mathcal{L}$ è generato dalle sezioni globali se e solo se: $h^0(\mathcal{L}(-x)) = h^0(\mathcal{L}) - 1, \forall x \in C$.*

Qui $\mathcal{L}(-x) := \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-x)$.

Dimostrazione. Sia $x \in C$, abbiamo una successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-x) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow k(x) \rightarrow 0$$

Qui $k(x)$ indica il fascio grattacielo di spiga $\mathcal{O}_{\{x\}} \simeq k$, cioè il fascio che ha supporto nel punto x e la cui spiga è k . Tensorizzando con $\mathcal{L}$ otteniamo:

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(-x) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}(x) \rightarrow 0$$

Infatti siccome $\mathcal{L}$ è localmente libero la successione rimane esatta a sinistra. Inoltre $\mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) = \mathcal{L}(x)$.

Prendendo la coomologia abbiamo:

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{L}(-x)) \rightarrow H^0(\mathcal{L}) \xrightarrow{f_x} k \simeq \mathcal{L}(x) \rightarrow \dots$$

L'applicazione f_x non è altro che $v_x : s \rightarrow s(x)$. Adesso $\mathcal{L}$ è generato dalle sezioni globali se e solo se v_x è suriettiva $\forall x \in C$ e questo è equivalente a: $h^0(\mathcal{L}(-x)) = h^0(\mathcal{L}) - 1, \forall x \in C$. $\square$

Questo Lemma ha una conseguenza importante:

Corollario 5.36. *Sia D un divisore sulla curva C . Se $\deg D \geq 2g$, allora $|D|$ è senza punti base.*

Dimostrazione. Per il teorema di Riemann-Roch abbiamo: $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D - g + 1 + h^1(\mathcal{O}(D))$. Per dualità di Serre: $h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\omega_C(-D))$. Abbiamo $\deg(\omega_C(-D)) = 2g - 2 - \deg D < 0$. Quindi $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D - g + 1$.

Nello stesso modo calcoliamo $h^0(\mathcal{O}(D - x))$. Siccome $\deg(\omega_C(-D + x)) = 2g - 2 - \deg D + 1 < 0$, concludiamo che $h^0(\mathcal{O}(D - x)) = \deg D - 1 - g + 1 = h^0(\mathcal{O}(D)) - 1$. Si conclude con il Lemma 5.35. $\square$

Un sistema lineare, δ , senza punti base fornisce un morfismo $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^n$, rimane da capire quand'è che φ è un'immersione chiusa (in questo caso l'immagine sarà una curva liscia di $\mathbb{P}^n$).

Una condizione necessaria è che φ sia iniettiva. Dal punto di vista dei divisori questo si traduce nel modo seguente: siano $x \neq y$ due punti distinti di C . Abbiamo $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ se esiste un divisore $D \in \delta$ tale che $x \in D, y \notin D$ ("δ separa i punti"). Infatti il divisore D corrisponde a un iperpiano che contiene $\varphi(x)$, ma non contiene $\varphi(y)$.

Se φ è iniettiva, è biiettiva sull'immagine. L'applicazione φ è continua e, trattandosi di un morfismo tra varietà proiettive, è chiusa. Quindi se φ è iniettiva, $C \rightarrow \varphi(C)$ è un omeomorfismo. Per vedere che φ è un isomorfismo basta vedere che $X = \varphi(C)$ è liscia. Infatti in questo caso φ è un morfismo di grado uno tra due curve lisce, quindi un isomorfismo. Adesso $X \subset \mathbb{P}^n$ è liscia nel punto $P \in X$ se e solo se esiste un iperpiano H che interseca X in P con molteplicità uno. Se $P = \varphi(x)$, questo equivale a dire che esiste $D \in \delta$ che contiene x ma non $2x$ ("δ separa i vettori tangenti").

Definizione 5.37. *Un sistema lineare δ sulla curva C è molto ampio se:*

1. "separa i punti": Per ogni $x, y \in C, x \neq y$, $\dim(\delta - x - y) = \dim(\delta) - 2$ (cioè y non è un punto base di $\delta - x$)

2. "separa i vettori tangenti": Per ogni $x \in C$, $\dim(\delta - 2x) = \dim(\delta) - 2$ (x non è un punto base di $\delta - x$).

Un sistema molto ampio è chiaramente senza punti base. Abbiamo visto:

Proposizione 5.38. *Se δ è un sistema lineare molto ampio sulla curva C allora il morfismo corrispondente $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^n$ è un'immersione chiusa. Quindi $X = \varphi(C)$ è una curva liscia isomorfa a C .*

Nel caso dei sistemi lineari *completi* abbiamo ancora un criterio coomologico:

Lemma 5.39. *Il sistema lineare completo $|D|$ è molto ampio se e solo se: $\forall x, y \in C$ (x e y non necessariamente distinti):*

$$h^0(\mathcal{O}(D - x - y)) = h^0(\mathcal{O}(D)) - 2.$$

Dimostrazione. Analoga a quella del Lemma 5.35. □

Anche questa volta abbiamo un corollario importante:

Corollario 5.40. *Sia D un divisore su C . Se $\deg D \geq 2g+1$, allora il sistema lineare completo $|D|$ è molto ampio.*

Dimostrazione. Analoga a quella del Corollario 5.36. □

Si osserverà che non c'è nessun criterio "numerico" (sul grado) per i sistemi non completi.

Il risultato che segue mostra che $\mathbb{P}^3$ è l'ambiente naturale per studiare le curve:

Teorema 5.41. *Ogni curva proiettiva liscia può essere immersa in $\mathbb{P}^3$.*

Dimostrazione. Sia C una curva proiettiva liscia di genere g . Sia D un divisore di grado $d > 2g$. Per il Corollario 5.40, il sistema lineare $|D|$ è molto ampio e immerge C in $\mathbb{P}^n$, con $n = d - g$. Sia $\varphi(C) = X \subset \mathbb{P}^n$. Se p è un punto di $\mathbb{P}^n$ che non sta su una bi-secante o una tangente a X , allora la restrizione a X della proiezione di centro p induce un morfismo $\pi_p : X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ che è un isomorfismo sull'immagine. Sia $\text{Sec}(X)$ la chiusura di $\bigcup \langle x, y \rangle$, $x, y \in X, x \neq y$ ($\text{Sec}(X)$ è la varietà delle secanti di X). La varietà $\text{Sec}(X)$ può essere parametrizzata nel modo seguente: darsi un punto di $\text{Sec}(X)$ torna a darsi due punti x, y di X (∞^2 parametri) e un punto sulla retta $\langle x, y \rangle$ (∞^1 parametri). Vediamo quindi che $\dim(\text{Sec}(X)) \leq 3$. Quindi se $n > 3$ possiamo sempre proiettare isomorficamente X in $\mathbb{P}^{n-1}$. □

Esercizi.

Esercizio 52 1) Sia C una curva di genere $g \geq 2$, mostrare che il sistema canonico $|K|$ è senza punti base.

2) Una curva è iperellittica se possiede un g_2^1 cioè un sistema lineare ∞^1 , di grado due. Mostrare che un g_2^1 è necessariamente senza punti base se $g > 0$. Concludere che C è iperellittica se e solo esiste un morfismo di grado due $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$.

3) Ogni curva di genere $g \leq 2$ è iperellittica.

4) Sia C una curva di genere $g \geq 2$. Mostrare che il sistema canonico $|K|$ è molto ampio se e solo se C non è iperellittica.

5) Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una quartica piana liscia. Mostrare che X è una curva di genere 3, non iperellittica.

Esercizio 53 Un fibrato in rette L , di grado d , su una curva di genere 2 è molto ampio $\Leftrightarrow d \geq 5$.

Sia L un fibrato di grado d su una curva C di genere 3. Mostrare che se L è molto ampio, allora: $d = 4$, $L = \omega_C$ (quindi C non è iperellittica), oppure $d \geq 6$.

Esercizio 54 Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile, di grado d .

1) Se $C \subset Q$, dove Q è una quadrica liscia, mostrare che esistono due interi a, b , con $d = a + b$, tali che C intersechi ogni generatrice di un sistema in a punti e ogni generatrice dell'altro sistema in b punti (contando le molteplicità). In particolare C ha un g_a^1 e un g_b^1 senza punti base.

2) Sia $C \subset K$, dove K è un cono quadrico di vertice v . Se d è pari $v \notin C$ e C interseca ogni generatrice in $d/2$ punti. Se d è dispari, $v \in C$, e C interseca ogni generatrice in $(d+1)/2$ punti (contando v).

3) Si assume $d = 5$, $g(C) = 2$, mostrare che $h^0(\mathcal{I}_C(2)) = 1$ (cioè C è contenuta in un'unica quadrica).

Esercizio 55 ([15] IV Ex. 6.3)

Sia X una curva di genere 2.

1) Se L è un fibrato di grado due con $h^0(L) \geq 2$, allora $L = \omega_X$ (l'unico g_2^1 di X è $|K|$).

2) Se D è un generico divisore di grado tre, allora non esiste nessun punto $p \in X$ tale che $D \sim 2K + p$. Inoltre $|D|$ è un g_3^1 senza punti base.

3) Sia L un fibrato in rette su X di grado 5. Mostrare che $L = \mathcal{O}_X(D + K)$, con $|D|$ un g_3^1 senza punti base, o $L = \mathcal{O}_X(2K + p)$.

4) Sia D un generico divisore di grado 3. Sia $L = \mathcal{O}_X(D + K)$, allora L è molto ampio, immerge X in $\mathbb{P}^3$ e l'immagine è contenuta in una quadrica

liscia.

5) Se $M = \mathcal{O}_X(2K + p)$, M è molto ampio, immerge X in $\mathbb{P}^3$ e l'immagine è contenuta in un cono quadrico.

Parte II

Curve in $\mathbb{P}^3$.

Curve di $\mathbb{P}^3$: introduzione.

Nel seguito (cioè fino alla fine di questi appunti) $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}_k^3$, dove k è algebricamente chiuso, di caratteristica zero.

Tranne menzione del contrario una curva $C \subset \mathbb{P}^3$ è una curva liscia, irriducibile, non degenere (cioè non piana). Però molti dei risultati dimostrati riguardanti limitazioni del genere, sono validi per le curve integre (irriducibili, ma eventualmente singolari), purché si consideri il *genere aritmetico* al posto del genere (tra l'altro non definito per tali curve). Il genere aritmetico della curva X è: $p_a(X) = 1 - \chi(\mathcal{O}_X)$.

6.1 Primi esempi.

Come abbiamo visto ogni curva di genere $g \geq 0$ può essere immersa in $\mathbb{P}^3$ con un divisore di grado $d \geq 2g + 1$. Quindi per ogni $g \geq 0$ e ogni $d \geq 2g + 1$, esiste una curva $C \subset \mathbb{P}^3$, di grado d , genere g . Inoltre siccome $h^0(\mathcal{O}_C(1)) = d - g + 1$, se $d - g + 1 \geq 4$, C non è piana.

- Se $g = 0$ (*curve razionali*), per ogni $d \geq 3$, esiste una curva razionale sghemba, $C \subset \mathbb{P}^3$, di grado d . Abbiamo poi la retta e la conica che sono piane.

- Se $g = 1$ (*curve ellittiche*), per ogni $d \geq 4$ esiste una curva ellittica, sghemba, di grado d . Per $d = 3$, abbiamo le cubiche piane.

- Se $g = 2$, sappiamo che se $d \geq 5$ esiste una curva sghemba di grado d , genere 2. Ogni curva di grado $d \leq 3$ è razionale (Esercizio 56). Rimane da vedere se esiste una curva di genere 2, grado 4. Una tale curva non esiste. Questo segue dal fatto che non esiste nessun fibrato di rango uno (fasci invertibile), di grado 4, molto ampio su una curva di genere 2. Infatti se L ha

grado 4, per Riemann-Roch: $h^0(L) = 4 - 2 + 1 + h^1(L)$. Per dualità di Serre: $h^1(L) = h^0(\omega_C \otimes L^*)$. Siccome $\deg \omega_C \otimes L^* = -2$, viene $h^0(L) = 3$. Se L fosse molto ampio, si avrebbe una curva piana liscia, di grado 4 e genere 2. Ma una curva piana liscia, di grado 4, ha genere 3.

• Se $g = 3$, sappiamo che esiste una curva sghemba, di genere 3, e grado d per ogni $d \geq 7$. Ragionando come prima si vede che non c'è nessuna curva sghemba, di genere 3 e grado $d \leq 5$. Il caso $d = 6$ rimane aperto.

E' chiaro che al crescere del genere le cose si complicano ed è quindi preferibile cercare qualche risultato generale. Per esempio bisognerebbe migliorare la limitazione $d \geq 2g + 1$.

Definizione 6.1. *Un divisore D sulla curva C è detto non speciale se $h^1(\mathcal{O}(D)) = 0$. Analogamente un fibrato, $\mathcal{L}$, di rango uno (fascio invertibile) è non speciale se $h^1(\mathcal{L}) = 0$.*

Osservazione 6.2.

1) Se D è non speciale, di grado d , allora $h^0(\mathcal{O}(D)) = d - g + 1$, per Riemann-Roch. Se D è molto ampio, immerge C in $\mathbb{P}^{d-g}$, quindi per avere un'immersione in $\mathbb{P}^3$ come curva sghemba, ci vuole $d \geq g + 3$.

2) Se D è speciale, cioè $h^1(\mathcal{O}(D)) > 0$, allora $h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(K - D)) > 0$, quindi esiste un divisore effettivo, D' tale che $K - D \sim D'$, cioè $D \sim K - D'$. Se D è effettivo, $D + D'$ è un divisore effettivo canonico. In conclusione ogni divisore speciale, effettivo è contenuto in un divisore canonico effettivo.

Proposizione 6.3. (Halphen)

Una curva C di genere $g \geq 2$ ammette un divisore D non speciale, molto ampio, di grado d , se e solo se $d \geq g + 3$.

Dimostrazione. Mostriamo che la condizione è necessaria. Se D è molto ampio e non speciale, allora $|D|$ immerge C in $\mathbb{P}^{d-g}$. Siccome $C \not\subset \mathbb{P}^1$, $d - g \geq 2$. Se $d - g = 2$, l'immagine è una curva piana liscia, di grado $d = g + 2$. Per la formula del genere di una curva piana (Esercizio 46), viene $d \leq 3$, quindi $g \leq 1$. Pertanto se $g \geq 2$, necessariamente $d \geq g + 3$.

Rimane da mostrare l'esistenza. Il divisore non speciale D è molto ampio se e solo se $h^0(\mathcal{O}(D - p - q)) = h^0(\mathcal{O}(D)) - 2 = d - 2 - g + 1$, per ogni $p, q \in C$. Questo è equivalente a richiedere che $D - p - q$ sia non speciale. Osserviamo che $h^0(\mathcal{O}(D)) = d - g + 1 \geq 4$, quindi possiamo trovare $D' \geq 0$, $D' \sim D$, tale che $D' - p - q$ sia effettivo.

I divisori effettivi di grado d sono parametrizzati da C^d : a $(p_1, \dots, p_d) \in C^d$ associamo il divisore effettivo $D = p_1 + \dots + p_d$. Per abuso di linguaggio diremo che $D \in C^d$ (in realtà bisognerebbe considerare $D \in C^d / \text{Sym}^d$, in quanto ogni

permutazione delle coordinate fornisce lo stesso divisore, ma siccome vogliamo solo fare stime dimensionali, possiamo trascurare questo dettaglio). Ci basta fare vedere che $S = \{D \in C^d \mid D \sim E + p + q \text{ tale che } E \text{ sia speciale, effettivo, di grado } d - 2\}$ ha dimensione $\leq g + 2$. Infatti siccome $d \geq g + 3$, $S \neq C^d$ e per ogni $p, q \in C$, il generico $D \in C^d$ sarà tale che $D - p - q$ non sarà mai linearmente equivalente a un divisore E , effettivo, speciale.

I divisori effettivi speciali, E , di grado $d - 2$ sono tutti contenuti in un divisore canonico (Osservazione 6.2). Siccome $|K| \simeq \mathbb{P}^{g-1}$, $\{E\}$ ha dimensione $\leq g - 1$. Quindi $\{E + p + q\}$ ha dimensione $\leq g + 1$. Per quanto detto prima $\{E + p + q \mid E + p + q \text{ è speciale}\}$ ha dimensione $\leq g - 1$. Possiamo quindi assumere $E + p + q$ non speciale. Abbiamo una successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(E + p + q) \rightarrow k^2 \rightarrow 0$$

Siccome $h^1(\mathcal{O}(E)) \neq 0$ e $h^1(\mathcal{O}(E + p + q)) = 0$, $h^0(\mathcal{O}(E + p + q)) \leq h^0(\mathcal{O}(E)) + 1$. Quindi $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(E + p + q)))$, l'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a $E + p + q$, ha dimensione $\leq$ alla dimensione più uno dell'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a E . Un divisore effettivo linearmente equivalente a E è speciale di grado $d - 2$. Abbiamo visto che l'insieme di tutti questi divisori ha dimensione $\leq g - 1$. Concludiamo che S ha dimensione $\leq g + 2$. $\square$

Corollario 6.4. *Per ogni $g \geq 0$ e ogni $d \geq g + 3$, esiste una curva sghemba, $C \subset \mathbb{P}^3$, di grado d , genere g , non speciale (cioè con $h^1(\mathcal{O}_C(1)) = 0$).*

Quindi in particolare esiste una curva sghemba di genere 3 e grado 6 in $\mathbb{P}^3$ e questo completa l'analisi per il genere 3.

Un altro metodo per costruire curve consiste nell'usare il teorema di Bertini. I teoremi "tipo" Bertini affermano che se una varietà ha una certa proprietà, allora, sotto certe ipotesi, anche la sua sezione iperpiana generica gode di questa proprietà. Una prima versione del teorema di Bertini è:

Teorema 6.5. (Bertini)

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una varietà non singolare. Allora se $H \subset \mathbb{P}^n$ è un iperpiano sufficientemente generale, $X \cap H$ è non singolare.

Dimostrazione. Possiamo assumere X non degenere (altrimenti lavorare in $\langle X \rangle$, lo spazio generato da X). L'osservazione cruciale è la seguente. Sia $x \in X$ e sia $T_x X \subset \mathbb{P}^n$ lo spazio tangente "immerso". Se $r = \dim X$, $T_x X \simeq \mathbb{P}^r$. Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano, allora ci sono due possibilità:

- a) $T_x X \cap H$ ha dimensione $r - 1$ (è un iperpiano di $T_x X$)
- b) $T_x X \subset H$.

Nel caso a) $Y := X \cap H$ è non singolare nel punto x (e $T_x Y = T_x X \cap H$). Nel caso b) Y , di dimensione $r - 1$, è singolare nel punto x .

Sia $J \subset X \times \mathbb{P}_n^*$, $J = \{(x, H) \mid T_x X \subset H\}$ ($\mathbb{P}_n^*$ è lo spazio duale che parametrizza gli iperpiani di $\mathbb{P}^n$). Abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}_n^* \\ \downarrow p & & \\ X & & \end{array}$$

La fibra di p , $p^{-1}(x)$ si identifica con il $\mathbb{P}^{n-1-r}$ degli iperpiani contenenti $T_x X \simeq \mathbb{P}^r$. Vediamo quindi che J è irriducibile, di dimensione $n - 1$. Pertanto $q(J) \subset \mathbb{P}_n^*$ ha dimensione $\leq n - 1$ ed è un chiuso proprio di $\mathbb{P}_n^*$. Se $H \in \mathbb{P}_n^* - q(J)$, $H \cap X$ è non singolare. $\square$

Osservazione 6.6.

- 1) La dimostrazione mostra che esiste un aperto (non vuoto) di $\mathbb{P}_n^*$, U , tale che se $H \in U$, $X \cap H$ è non singolare (questo è il senso di "sufficientemente generale"). Questa dimostrazione è valida anche se $ch(k) > 0$.
- 2) Se X ha un numero finito di singolarità, gli iperpiani passanti per un punto singolare sono un chiuso di $\mathbb{P}_n^*$ e quindi la conclusione del teorema è ancora vera.
- 3) La varietà $q(J) \subset \mathbb{P}_n^*$ è la *varietà duale* X^* di X .
- 4) Abbiamo usato il seguente risultato: Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo tra varietà proiettive. Se Y è irriducibile e se tutte le fibre sono irriducibili, della stessa dimensione, allora X è irriducibile, di dimensione $\dim Y + r$, dove r è la dimensione delle fibre ([21], I.6, Theorem 7, Theorem 8, p. 76).
- 5) Il teorema *non* dice che $X \cap H$ è irriducibile (anche perché non è vero se X è una curva).

Su una varietà X di dimensione > 1 possiamo definire la nozione di divisore e di sistema lineare esattamente come l'abbiamo fatto su una curva. Abbiamo quindi la nozione di sistema lineare, di sistema senza punti base e di sistema molto ampio ("separa i punti e i vettori tangenti" e quindi il morfismo associato è un'immersione chiusa). Sia δ un sistema lineare molto ampio sulla varietà liscia X . Sia $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ l'immersione corrispondente e sia $Y = \varphi(X)$; Y è non singolare. Per il teorema di Bertini $Y \cap H$ è non singolare per H generale. Per costruzione $Y \cap H = D$ è (isomorfo a) un divisore del sistema δ . Quindi:

Corollario 6.7. *Sia δ un sistema lineare molto ampio sulla varietà X non singolare. Un generico divisore $D \in \delta$ è non singolare.*

Per esempio se δ è un sistema lineare molto ampio sulla superficie liscia $S \subset \mathbb{P}^3$, allora il generico $D \in \delta$ è una curva liscia. Questo permette di

costruire delle curve lisce (ma non necessariamente irriducibili). In realtà, almeno in caratteristica zero, si ha un risultato più forte. Bisogna però usare il teorema di liscità generica (*generic smoothness*).

Teorema 6.8. (Generic smoothness)

Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo dominante di varietà. Se X è liscia, esiste un aperto non vuoto, U , di Y tale che: U e $f^{-1}(U)$ siano degli aperti lisci e per ogni $y \in U$, la fibra $f^{-1}(y)$ sia liscia, di dimensione $\dim(X) - \dim(Y)$.

Dimostrazione. [21] II.6.2 Theorem 2, p. 141, [15], III, Corollary 10.7. $\square$

Dire che $U, f^{-1}(U)$ sono degli aperti lisci significa che ogni punto di U (risp. di $f^{-1}(U)$) è un punto non singolare di Y (risp. X). Nel caso di $f^{-1}(U)$ questo è ovvio (X è liscia), nel caso di U quasi (il luogo singolare è chiuso).

Dire che la fibra $f^{-1}(y)$ è liscia torna a dire che per ogni $x \in f^{-1}(y)$, l'applicazione tangente (derivata) $T_x f : T_x X \rightarrow T_y Y$ è suriettiva (e qui si capisce la necessità dell'ipotesi $ch(k) = 0$). Quindi $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$ è un morfismo liscio (derivata suriettiva nei punti chiusi) nel senso di [15]. I morfismi lisci sono gli analoghi delle submersioni in geometria differenziale e il Teorema di liscità generica l'analogo del Teorema di Sard. Il Teorema di liscità generica è *falso* se $ch(k) > 0$.

Teorema 6.9. (Bertini, $ch(k) = 0$)

Sia X una varietà proiettiva ($k = \bar{k}, ch(k) = 0$) e sia $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ un morfismo. Se $H \subset \mathbb{P}^n$ è un iperpiano sufficientemente generale e se $Y = f^{-1}(H)$, allora $Sing(Y) = Sing(X) \cap Y$.

Dimostrazione. Sia $I \subset X \times \mathbb{P}_n^*$, $I = \{(x, H) \mid f(x) \in H\}$. Se $p : I \rightarrow X$ è indotta dalla prima proiezione, $p^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$. Vediamo così che $\dim I = r + n - 1$, dove $r = \dim X$. Quindi $I \subset X \times \mathbb{P}_n^*$ è un'ipersuperficie.

Sia $U_n \subset \mathbb{P}^n$ l'aperto standard $x_n \neq 0$ e sia $U = f^{-1}(U_n)$. Per $x \in U$ possiamo scrivere $f(x) = (f_0(x) : \cdots : f_{n-1}(x) : 1)$. In $\mathbb{P}_n^*$ sia V l'aperto standard $x_0^* \neq 0$. Se $H \in V$, l'equazione di H è della forma: $x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$. Pertanto in $U \times V$, I è definita dall'equazione: $f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_{n-1} f_{n-1}(x) + a_n = 0$. In sostanza ci siamo ricondotti alla situazione seguente: $X \subset \mathbb{A}^n$, $X = \mathbb{V}(J)$, $J = (f_1, \dots, f_m)$ e $I \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$, $I = \{((x_i), (y_i)) \mid x_1 + x_2 y_1 + \cdots + x_n y_{n-1} + y_n = 0 \text{ con } (x_1, \dots, x_n) \in X\}$, cioè $I \subset \mathbb{A}^{2n}$ è definita dalle equazioni: $(f_1, \dots, f_m, G)$, dove $G(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = x_1 + x_2 y_1 + \cdots + x_n y_{n-1} + y_n$. Scrivendo la matrice jacobiana vediamo che: $\dim T_{(x_i, y_i)} I = \dim T_{(x_i)} X + n - 1$.

Concludiamo che $\dim T_{(x, H)} I = \dim T_{(x, H)} (X \times \mathbb{P}_n^*) - 1 = \dim T_x X + \dim T_H \mathbb{P}_n^* - 1$. Quindi $Sing(I) = \pi_1^{-1}(Sing(X))$, dove $\pi_1 : X \times \mathbb{P}_n^* \rightarrow X$ è la proiezione.

Sia $I_{sm} = I \setminus \text{Sing}(I)$ e sia $\tilde{\pi}_2 : I_{sm} \rightarrow \mathbb{P}_n^*$ indotto dalla seconda proiezione. Per il Teorema 6.8 esiste un aperto $V^* \subset \mathbb{P}_n^*$ tale che: $\tilde{\pi}_2 : \tilde{\pi}_2^{-1}(V^*) \rightarrow V^*$ sia liscio. Quindi se $H \in V^*$, $\tilde{\pi}_2^{-1}(H) = \{x \mid f(x) \in H, x \notin \text{Sing}(X)\}$ è liscio. Il teorema è dimostrato. $\square$

Otteniamo il miglioramento promesso del Corollario 6.7:

Corollario 6.10. *Sia δ un sistema lineare senza punti sulla varietà proiettiva liscia X ($k = \bar{k}$, $ch(k) = 0$). Allora un generico divisore $D \in \delta$ è liscio.*

Osservazione 6.11.

Il Teorema 6.9 è falso in caratteristica positiva.

Il Teorema 6.9 è praticamente la formulazione originale di Bertini: se δ è un sistema lineare sulla varietà X , un generico $D \in \delta$ è liscio fuori dal luogo base di δ e da $\text{Sing}(X)$. Essenzialmente se B è il luogo base allora δ definisce un morfismo $X \setminus B \rightarrow \mathbb{P}^n$ e si ragiona come nella dimostrazione del Teorema 6.9 (infatti l'ipotesi X proiettiva non è necessaria, basta X quasi proiettiva).

6.2 Intersezioni complete, curve su una quadrica liscia.

Il teorema di Bertini (risultato fondamentale delle geometria algebrica proiettiva) ci permetterà di costruire altre curve lisce.

Proposizione 6.12. *La generica ipersuperficie di grado $a \geq 1$, $S_a \subset \mathbb{P}^n$ è liscia.*

Se S_a, S_b sono due ipersuperfici sufficientemente generali, allora $X = S_a \cap S_b$ è una varietà liscia, irriducibile se $n > 2$, di codimensione due.

Dimostrazione. Il sistema lineare delle ipersuperfici di grado $a \geq 1$ è chiaramente senza punti base (anzi molto ampio). Si conclude con Bertini che la generica ipersuperficie di grado a è liscia. Se $S_a = F \cup T$, allora S_a è singolare nei punti di $F \cap T$. Pertanto la generica S_a è liscia, irriducibile.

Sia S_a liscia, irriducibile e consideriamo δ_b il sistema lineare segato su S_a dalle ipersuperficie di grado b . Chiaramente δ_b è senza punti base (considerare delle ipersuperficie di grado b unioni di iperpiani; anzi così si vede che δ_b è molto ampio). Si conclude con Bertini che per S_b generica, $X = S_a \cap S_b$ è liscia. Abbiamo $\mathbb{I}(X) = (f_a, f_b)$ (f_a, f_b equazioni di S_a, S_b) e quindi una successione esatta (cf Esercizio 34):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-a-b) \rightarrow \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow 0$$

Se $n > 2$, $h^1(\mathcal{I}_X) = 0$, quindi dalla successione esatta: $0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$, segue che $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$. Quindi X è connessa e essendo liscia è irriducibile. $\square$

Definizione 6.13. *Un sotto schema chiuso $X \subset \mathbb{P}^n$ di dimensione r è una intersezione completa se $\mathbb{I}(X)$ è generato da r elementi.*

Abbiamo quindi visto che esistono intersezioni complete lisce di codimensione due, $X = S_a \cap S_b$, per ogni $a, b \geq 1$ in $\mathbb{P}^n$. Reiterando il ragionamento si dimostra l'esistenza di intersezioni complete lisce di codimensione qualsiasi. A questo proposito non posso esimermi dal menzionare la famosa congettura di Hartshorne:

Congettura 6.14. (Hartshorne 1974)

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una varietà liscia di dimensione r ($k = \bar{k}$, $ch(k) = 0$). Se $r > 2n/3$, allora X è un'intersezione completa.

Quindi, per esempio, ogni sotto varietà liscia, di codimensione due, in $\mathbb{P}^n$, $n > 6$, dovrebbe essere un'intersezione completa. A prima vista questo sembra assai improbabile, ma dopo un po' di riflessione ci si convince che potrebbe anche essere vero. Al momento, malgrado alcuni risultati parziali, la congettura è largamente aperta.

Lemma 6.15. *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, intersezione completa di tipo (a, b) (cioè intersezione di una superficie di grado a con una superficie di grado b). Allora $\deg C = ab$ e $g(C) = 1 + \frac{ab(a+b-4)}{2}$.*

Dimostrazione. Per il grado basta guardare una sezione piana generica e usare l'Esercizio 46. Per il genere si tratta di calcolare $h^1(\mathcal{O}_C)$. Questo si fa usando la successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-a-b) \rightarrow \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$$

e osservando che $h^1(\mathcal{O}_C) = h^2(\mathcal{I}_C)$ dalla successione $0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$.

Vedere l'Esercizio 58 per una dimostrazione alternativa e più istruttiva.

□

Se C è intersezione completa di tipo (a, b) , allora $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(a+b-4)$ (Esercizio 58). In particolare per $a=2, b=3$, abbiamo una curva di grado 6, genere 4, con $\mathcal{O}_C(1) = \omega_C$. Quindi C è immersa in $\mathbb{P}^3$ con il sistema canonico completo $|K|$. Una tale curva si chiama *curva canonica*. Le curve canoniche hanno proprietà molto interessanti.

Curve su una quadrica liscia.

Sia $Q \subset \mathbb{P}^3$ una quadrica liscia. Abbiamo visto (Esercizio 43) che $Q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ via $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3 : (u:v) \times (x:y) \rightarrow (ux:uy:vx:vy)$, quindi Q ha per equazione $X_0X_3 = X_1X_2$. Sia $C \subset Q$ una curva (o meglio un divisore).

Togliendo il punto $(1 : 0) =: \infty$ ad ogni fattore abbiamo: $(\mathbb{P}^1 \setminus \infty) \times (\mathbb{P}^1 \setminus \infty) \simeq k \times k \simeq k^2$. In questo isomorfismo la curva C diventa una curva piana $\tilde{C}$ di equazione, diciamo, $F(s, t) = 0$. Possiamo assumere che C non contenga nessuna delle generatrici L_∞, R_∞ . Siccome la mappa $(\mathbb{P}^1 \setminus \infty) \times (\mathbb{P}^1 \setminus \infty) \rightarrow Q \setminus (L_\infty \cup R_\infty) \simeq \mathbb{A}^2$ è data da $(u : v) \times (x : y) \rightarrow (s, t)$, con $s = u/v, t = x/y$, vediamo che per recuperare C , dobbiamo omogeneizzare F rispetto a $(u : v)$ e a $(x : y)$. Cioè se $F(s, t) = \sum a_{ij} s^i t^j = \sum a_{ij} (u/v)^i (x/y)^j$, allora se $a = \max\{i\}, b = \max\{j\}$, C è data dall'equazione $\sum a_{ij} u^i v^{a-i} x^j y^{b-j} = 0$. Quindi ogni divisore su Q è dato da un polinomio bi-omogeneo di bi-grado (a, b) , per qualche a, b in $\mathbb{N}$. Adesso se fissiamo il punto $(u : v)$, siamo sulla retta $L_{(u:v)}$ e $C \cap L_{(u:v)}$ è data da $F_{(u:v)}(x, y) = 0$, quindi da un polinomio omogeneo di grado b . Pertanto C interseca ogni generatrice di tipo L in b punti (o la contiene) e analogamente ogni generatrice di tipo R in a punti (o la contiene). Questo mostra:

Proposizione 6.16. *Il gruppo delle classi $Cl(Q)$ è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (cioè $Cl(\mathbb{P}^1) \times Cl(\mathbb{P}^1)$). Inoltre $Pic(Q) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, cioè ogni fibrato in rette su Q è della forma $p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) \otimes q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b))$, dove p, q sono le proiezioni e dove $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che ogni divisore su Q è dato da un polinomio bi-omogeneo quindi è linearmente equivalente a $p^*(D_1) + q^*(D_2)$, dove D_1, D_2 sono dei divisori di $\mathbb{P}^1$. Inoltre sappiamo che $Cl(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$.

Per la corrispondenza tra divisori e fasci invertibili (che funziona per le varietà lisce di dimensione > 1 esattamente come nel caso delle curve), abbiamo $Pic(Q) \simeq Pic(\mathbb{P}^1) \times Pic(\mathbb{P}^1)$. Vedere [15] II Example 6.6.1; III Exercise 5.6 per più dettagli. $\square$

Il fascio invertibile $p^*\mathcal{O}(a) \otimes q^*\mathcal{O}(b)$ viene notato $\mathcal{O}_Q(a, b)$. Il sistema lineare completo delle curve di bi-grado (a, b) è $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_Q(a, b))) =: \delta(a, b)$. E' facile convincersi che $\delta(a, b) \neq \emptyset \Leftrightarrow a \geq 0$ e $b \geq 0$ (se $a = b = 0$, abbiamo il divisore nullo).

Lemma 6.17. *Se $0 \leq a \leq b$, il sistema lineare $\delta(a, b)$ è senza punti base.*

Dimostrazione. Se $(a, b) \neq (0, 0)$ basta osservare che $\delta(a, b)$ contiene tutti i divisori costituiti dall'unione di a generatrici di un sistema e b generatrici dell'altro sistema. Quindi per ogni $p \in Q$ esiste un tale divisore non passante per p . $\square$

La coomologia dei fasci $\mathcal{O}_Q(a, b)$ è data dalla formula di Künneth:

Proposizione 6.18. *Abbiamo:*

$$h^i(\mathcal{O}_Q(a, b)) = \sum_{j, l | j+l=i} h^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) \cdot h^l(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)).$$

Da questo segue che $\delta(a, b)$ è un sistema lineare $\infty^{(a+1)(b+1)-1}$, inoltre:

Proposizione 6.19. *Per ogni $1 \leq a \leq b$, esiste una curva liscia, irriducibile di bi-grado (a, b) , $C \subset Q$. La curva C ha grado $a + b$ e genere $(a - 1)(b - 1)$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 6.17 e per il Teorema di Bertini (6.9) sappiamo che esiste una curva liscia $C \in \delta(a, b)$. Il fascio d'ideali $\mathcal{I}_{C, Q}$ non è altro che $\mathcal{O}_Q(-a, -b)$ (C è una sezione di $\mathcal{O}_Q(a, b)$). Abbiamo quindi una successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-a, -b) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

Per la Proposizione 6.18: $h^i(\mathcal{O}_Q(-a, -b)) = 0$, $0 \leq i \leq 1$, quindi C è connessa e pertanto irriducibile. E' chiaro che $\deg C = a + b$. Abbiamo $g(C) = h^1(\mathcal{O}_C) = h^2(\mathcal{O}_Q(-a, -b)) = h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)) \cdot h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b)) = (a - 1)(b - 1)$. $\square$

Se $(a, b) = (1, d - 1)$, $d \geq 2$, vediamo che per ogni $d \geq 2$ esiste una curva razionale di grado d su Q .

Invece se $g = 1$, da $1 = (a - 1)(b - 1)$, vediamo che necessariamente abbiamo $a = b = 2$. Quindi nessuna curva ellittica di grado > 4 è contenuta in una quadrica liscia.

Per $(a, b) = (2, d - 2)$, otteniamo delle curve lisce di grado d , genere $g = d - 3$. Queste curve sono iperellittiche (Esercizio ??). Quindi per ogni $g \geq 2$, esiste una curva di genere g , iperellittica.

Per d fissato i possibili (a, b) con $a + b = d$ sono $(1, d - 1), (2, d - 2), \dots, (d/2, d/2)$ se d è pari o $(d - 1)/2, (d + 1)/2$ se d è dispari. Il genere più grande si ottiene per $(d/2, d/2)$ (risp. $((d - 1)/2, (d + 1)/2)$) e vale: $(d - 2)^2/4$ (risp. $(d - 3)(d - 1)/4$). Vedremo tra poco che questo è il genere massimo di una curva sghemba di grado d in $\mathbb{P}^3$.

Finalmente osserviamo che una curva di bi-grado (a, a) è l'intersezione completa di Q con una superficie di grado a (Esercizio 59).

Esercizi.

Esercizio 56 Sia $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva liscia, irriducibile, non degenera. Mostrare che $\deg(C) \geq n$. Inoltre se $\deg(C) = n$, allora C è razionale. Concludere che ogni curva, liscia, irriducibile, di grado ≤ 3 in $\mathbb{P}^3$ è razionale (una retta, una conica o una cubica gobba) oppure una cubica piana (curva ellittica).

Esercizio 57 ("Here enters the hero" (Shakespeare))

Se $X \subset \mathbb{P}^n$ è una sotto varietà liscia abbiamo un morfismo iniettivo di fibrati $T_X \hookrightarrow T|X$ ($T = T_{\mathbb{P}^n}$); il quoziente N_X è il fibrato normale a X in $\mathbb{P}^n$ (per essere precisi bisognerebbe notare $N_{X, \mathbb{P}^n}$). Il fibrato N_X ha supporto su X e rango $\text{codim}(X)$.

1) Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ liscia irriducibile. Mostrare che C è localmente definita da due equazioni (si dice che C è localmente intersezione completa).

2) Si tratta di mostrare che $N_C \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$.

La questione è locale, possiamo ragionare in $\mathbb{A}^3$ con coordinate x_i . Una sezione del tangente T è della forma $\xi = \sum_i h_i \partial/\partial x_i$. In un punto p questo fornisce il vettore tangente (a_i) dove $a_i = g_i(p)$.

Questo vettore è tangente a C definita da $f = g = 0$ se $\sum_i a_i \partial f/\partial x_i(p) = 0$ e $\sum_i a_i \partial g/\partial x_i(p) = 0$. Quindi ξ è zero in N_X se $\sum_i h_i \partial f/\partial x_i = 0 = \sum_i h_i \partial g/\partial x_i$ in ogni punto di C , cioè modulo $\mathcal{I}_C$.

Sia adesso

$$T|C \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) : \sum_i h_i \partial/\partial x_i \rightarrow (s \rightarrow \sum_i h_i \partial s/\partial x_i \pmod{\mathcal{I}_C})$$

Per quanto detto prima il $\ker$ di questa mappa è T_C . Concludere che $N_C = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$.

2) In realtà questa descrizione si applica, *mutatis mutandis*, ad ogni $X \subset \mathbb{P}^n$ liscia (ogni X liscia è localmente intersezione completa; cioè localmente definita da $\text{codim } X$ equazioni).

3) Sia I un ideale dell'anello A . Osservare che I/I^2 è un A/I -modulo e che $\text{Hom}_A(I, A/I) \simeq \text{Hom}_{A/I}(I/I^2, A/I)$.

Concludere che $N_X = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2, \mathcal{O}_X)$, se $X \subset \mathbb{P}^n$ è liscia. In particolare $N_X^* = \mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo localmente libero di rango $\text{codim } X$. Il fascio $\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2$ è il fascio conormale a X . E' lui il vero eroe perché può essere definito per ogni sotto schema chiuso (anche singolare).

4) Mostrare che $\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \simeq \mathcal{I}_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_X$, $X \subset \mathbb{P}^n$ sotto schema chiuso qualsiasi (usare la successione $0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$).

5) Se $X \subset \mathbb{P}^n$ è un'ipersuperficie di grado a , $\mathcal{I}_X = \mathcal{O}(-a)$. Concludere che

$N_X^* \simeq \mathcal{O}_X(-a)$, dove, per definizione, $N_X^* = \mathcal{I}_X / \mathcal{I}_X^2$.

Esercizio 58 Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva (non necessariamente liscia) intersezione completa di tipo (a, b) . Mostrare che $N_C^* = \mathcal{O}_C(-a) \oplus \mathcal{O}_C(-b)$ (usare la risoluzione minimale di un'intersezione completa). Dedurre che, se C è liscia, $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(a + b - 4)$ (prendere i determinanti nella successione $0 \rightarrow T_C \rightarrow T|_C \rightarrow N_C \rightarrow 0$ e usare il fatto che $\omega_{\mathbb{P}^n} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n - 1)$) e ritrovare la formula del genere di un'intersezione completa. (N.B. una curva piana di grado d è un'intersezione completa di tipo $(1, d)$.)

In realtà il risultato ($\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(a+b-4)$) è valido per ogni sotto schema di codimensione due in $\mathbb{P}^3$, intersezione completa, ma con un'altra dimostrazione (T_C e quindi N_C non sono definiti (come fibrati) se C è singolare).

Esercizio 59 1) Sia $C \subset Q$ una curva di bi-grado (a, a) sulla quadrica liscia $Q \subset \mathbb{P}^3$. Mostrare che C è l'intersezione completa di Q con una superficie di grado a .

2) Sia $X \subset Q$ una curva liscia di bi-grado $(a, a - 1)$. Mostrare che esiste una superficie di grado a , S_a , tale che $S_a \cap Q = X \cup L$, dove L è una retta.

Il teorema di Halphen sul genere massimo.

Scopo di questo capitolo è dimostrare il Teorema di Halphen sul genere massimo di una curva sghemba (sempre liscia, irriducibile) di grado d , $C \subset \mathbb{P}^3$. Seguiremo però il metodo di Castelnuovo e non quello originale di Halphen.

Il metodo di Castelnuovo poggia sull'osservazione seguente: il genere di C è limitato dalla coomologia (funzione di Hilbert) della sezione piana generica (genere virtuale di C). Adesso la sezione piana generica di una curva sghemba gode di una proprietà notevole: non contiene tre punti allineati (lemma delle trisecanti). Questo permette di dare una limitazione del genere in funzione del grado della curva. E' divertente e istruttivo vedere che anche Halphen usava il Lemma delle trisecanti (per affermare che l'immagine della proiezione generica di C su un piano aveva al più nodi come singolarità).

7.1 Restrizione a un piano.

Sia $H \subset \mathbb{P}^3$ un piano. Il piano H è un divisore e abbiamo $\mathcal{I}_H = \mathcal{O}(-1)$. Pertanto abbiamo una successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{h} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0 \quad (7.1)$$

La mappa h è la moltiplicazione per l'equazione h di H ; in altri termini questa successione proviene da $0 \rightarrow S(-1) \xrightarrow{h} S \rightarrow S_H \rightarrow 0$, dove $S_H = S/(h)$.

Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva. Tensorizzando la successione (7.1) per $\mathcal{O}_C$, viene:

$$0 \rightarrow \mathcal{T}or^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_H) \rightarrow \mathcal{O}_C(-1) \xrightarrow{h} \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_H \rightarrow 0$$

Il fascio $\mathcal{T}or^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_H)$ ha supporto su $C \cap H$, quindi è di torsione, siccome $\mathcal{O}_C(-1)$ è senza torsione, $\mathcal{T}or^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_H) = 0$. Quindi se $\Gamma := C \cap H$, abbiamo $\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_H \simeq \mathcal{O}_\Gamma$ (Γ è il divisore luogo degli zeri della sezione $\mathcal{O}_C \xrightarrow{h} \mathcal{O}_C(1)$).

Adesso tensorizzando la successione $0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ con $\mathcal{O}_H$, otteniamo:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C \otimes \mathcal{O}_H \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_H \simeq \mathcal{O}_\Gamma \rightarrow 0$$

Segue che $\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{O}_H \simeq \mathcal{I}_{\Gamma, H}$ ($\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{O}_H$ è visto come $\mathcal{O}_H$ -modulo). Finalmente tensorizzando (7.1) per $\mathcal{I}_C$, viene:

$$\cdots \rightarrow \mathcal{I}_C(-1) \xrightarrow{h} \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{I}_C \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_H \rightarrow 0 \quad (7.2)$$

Il morfismo $h : \mathcal{I}_C(-1) \rightarrow \mathcal{I}_C$ è iniettivo. Questo si può vedere in vari modi. Per esempio sia $I = H_*^0(\mathcal{I}_C)$, allora tensorizzando $0 \rightarrow S(-1) \rightarrow S \rightarrow S_H \rightarrow 0$ con I , abbiamo: $\cdots \rightarrow I(-1) \xrightarrow{h} I \rightarrow I \otimes_S S_H \rightarrow 0$, il morfismo $h : I(-1) \rightarrow I$ è chiaramente iniettivo, quindi abbiamo $0 \rightarrow I(-1) \xrightarrow{h} I \rightarrow I \otimes_S S_H \rightarrow 0$ e applicando il funtore $\sim$, abbiamo $0 \rightarrow \mathcal{I}_C(-1) \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{I}_C \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_H \rightarrow 0$. In particolare vediamo che $I \otimes_S S_H \simeq I/hI(-1)$. In conclusione abbiamo:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C(-1) \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{I}_{\Gamma, H} \rightarrow 0$$

dove $\Gamma := C \cap H$. Fianlmente tensorizzando con $\mathcal{O}(m)$ (che è localmente libero) otteniamo la così detta *successione di restrizione a H*:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C(m-1) \rightarrow \mathcal{I}_C(m) \rightarrow \mathcal{I}_{\Gamma, H}(m) \rightarrow 0 \quad (7.3)$$

dove $\Gamma = C \cap H, m \in \mathbb{Z}$.

Prendendo la coomologia abbiamo:

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(m-1)) \xrightarrow{h} H^0(\mathcal{I}_C(m)) \xrightarrow{r(m)} H^0(\mathcal{I}_{\Gamma, H}(m)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_C(m-1)) \rightarrow \cdots$$

Sia $I = H_*^0(\mathcal{I}_C), J_H = H_*^0(\mathcal{I}_{\Gamma, H})$. Le applicazioni $r(m)$ definiscono un morfismo (di restrizione) $I \xrightarrow{r} J_H$, la cui immagine è $I/hI(-1)$. Se $m \gg 0$, $h^1(\mathcal{I}_C(m-1)) = 0$ (Esercizio 41) e quindi $(I/hI(-1))^\sim = J_H^\sim = \mathcal{I}_{\Gamma, H}$, ma in generale $I/hI(-1) \neq J_H$. Geometricamente gli elementi di $Im(r)$ sono le curve contenenti Γ della forma $S \cap H$ dove S è una superficie contenente C , ma in generale possono esistere curve piane contenenti $\Gamma = C \cap H$ che non provengono da superfici contenenti C . L'esempio più facile di questa situazione è quello in cui $C = L \sqcup R$, unione di due rette sghembe. La sezione piana generica consta di due punti, sempre contenuti in una retta. Questa retta non è la restrizione di un piano contenente C . Per un esempio con C irriducibile, consideriamo C di genere 1, grado 5. Se Γ è la sezione piana, $h^0(\mathcal{I}_{\Gamma, H}(2)) \neq 0$, perché 5 punti sono sempre su una conica. Invece una curva ellittica di grado cinque non è contenuta in una quadrica: $h^0(\mathcal{I}_C(2)) = 0$. E' chiaro che C non è contenuta in una quadrica liscia ($a+b=5, (a-1)(b-1)=1$ non ha soluzioni) ed è pur vero che C non è contenuta in un cono quadrico (i gradi e generi su

un cono sono un sotto insieme di quelli su una quadrica liscia). D'altra parte ci sono delle curve per cui r è suriettiva, tali curve sono dette *aritmeticamente Cohen-Macaulay* (a.C.M.):

Definizione 7.1. Una curva (non necessariamente liscia) $X \subset \mathbb{P}^3$ è aritmeticamente Cohen-Macaulay (nel seguito a.C.M.) se $h^1(\mathcal{I}_X(m)) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$. Se inoltre X è liscia si dice che X è proiettivamente normale.

Osservazione 7.2.

- 1) Una curva a.C.M. è connessa (perché $h^1(\mathcal{I}_X) = 0$, quindi $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$). Quindi una curva proiettivamente normale è liscia, irriducibile.
- 2) Ogni intersezione completa è a.C.M.
- 3) Se C è ridotta $h^0(\mathcal{O}_C(m)) = 0$ se $m < 0$, quindi $H_*^1(\mathcal{I}_C)$ è un modulo di lunghezza finita e si vede facilmente che C è a.C.M. se e solo se r è suriettiva (cioè $I/hI(-1) = J_H$).

7.2 Il metodo di Castelnuovo della sezione piana.

Sia H un piano generico prendendo la coomologia, per $m \geq 0$, nella successione di restrizione (7.3) abbiamo:

$$\cdots \rightarrow H^1(\mathcal{I}_C(m)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_{\Gamma,H}(m)) \xrightarrow{\delta_m} H^2(\mathcal{I}_C(m-1)) \rightarrow H^2(\mathcal{I}_C(m)) \rightarrow 0$$

Infatti $h^2(\mathcal{I}_{\Gamma,H}(m)) = 0$, se $m \geq 0$ (considerare $0 \rightarrow \mathcal{I}_{\Gamma,H}(m) \rightarrow \mathcal{O}_H(m) \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma \rightarrow 0$).

Sia $\Delta(m) := \text{Im}(\delta_m) \subset H^2(\mathcal{I}_C(m-1))$ e sia $d(m) := \dim(\Delta(m))$.

Dalla successione esatta risulta:

- (a) $d(m) \leq h^1(\mathcal{I}_{\Gamma,H}(m))$
- (b) $h^2(\mathcal{I}_C(m-1)) - h^2(\mathcal{I}_C(m)) = d(m)$

Pertanto

$$\sum_{m \geq 1} [h^2(\mathcal{I}_C(m-1)) - h^2(\mathcal{I}_C(m))] = \sum_{m \geq 1} d(m) \leq \sum_{m \geq 1} h^1(\mathcal{I}_\Gamma(m))$$

Adesso dalla successione di definizione $0 \rightarrow \mathcal{I}_C(m) \rightarrow \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}_C(m) \rightarrow 0$ segue che $h^2(\mathcal{I}_C(m)) = h^1(\mathcal{O}_C(m))$ per ogni m . Quindi

$$\sum_{m \geq 1} [h^2(\mathcal{I}_C(m-1)) - h^2(\mathcal{I}_C(m))] = h^1(\mathcal{O}_C) = g$$

Osservare che la somma è finita perché $h^1(\mathcal{O}_C(m)) = 0$ se $m \gg 0$ (basta $dm > 2g - 2$).

In conclusione abbiamo:

$$g \leq \sum_{m \geq 1} h^1(\mathcal{I}_{\Gamma, H}(m)). \quad (7.4)$$

Definizione 7.3. (i) Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di punti, il genere di X è $g(X) := \sum_{m \geq 1} h^1(\mathcal{I}_X(m))$
(ii) Il genere virtuale di una curva $C \subset \mathbb{P}^3$ è il genere della sua sezione piana generica.

Dalla discussione precedente segue immediatamente la:

Proposizione 7.4. Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile, di genere g , allora $g \leq g(\Gamma)$ dove $g(\Gamma)$ è il genere virtuale di C ($\Gamma = C \cap H$, H generico). Inoltre $g = g(\Gamma)$ se e solo se C è proiettivamente normale.

Dimostrazione. Rimane da dimostrare l'ultima affermazione. Se $g = g(\Gamma)$, allora $0 \rightarrow H^1(\mathcal{I}_{\Gamma, H}(m)) \rightarrow H^2(\mathcal{I}_C(m-1)) \rightarrow H^2(\mathcal{I}_C(m)) \rightarrow 0$ è esatta per ogni $m \geq 1$. Quindi $h^1(\mathcal{I}_C(m-1)) \geq h^1(\mathcal{I}_C(m))$, per ogni $m \geq 1$. Siccome $h^1(\mathcal{I}_C) = 0$, viene $h^1(\mathcal{I}_C(m)) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$. Viceversa è chiaro che se $H_*^1(\mathcal{I}_C) = 0$, allora $d(m) = h^1(\mathcal{I}_{\Gamma, H}(m))$ per ogni $m \geq 1$ e quindi $g = g(\Gamma)$. $\square$

Osservazione 7.5. Il ragionamento si applica con una sezione piana qualsiasi, però se $\Gamma' = C \cap H'$, H' piano qualsiasi, allora si avrà $g(\Gamma) \leq g(\Gamma')$ (semi continuità della coomologia), quindi per avere una buona limitazione conviene prendere H generico.

7.3 Il lemma delle trisecanti.

Il lemma delle trisecanti dice che la sezione piana generica di una curva $C \subset \mathbb{P}^3$ non contiene tre punti allineati; si può anche formulare dicendo che la proiezione generica di C su un piano ha al più nodi come singolarità.

Definizione 7.6. Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile. Una retta $R \subset \mathbb{P}^3$ è una n -secante a C se R incontra C in $\geq n$ punti (contati con molteplicità).

Lemma 7.7. Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile. Se ogni piano di $\mathbb{P}^3$ contiene una trisecante a C allora ogni bisecante a C è una trisecante.

Dimostrazione. Sia J la chiusura in $C \times C \times \mathbb{P}_3^*$ di $\{(x, y, H) \mid x \neq y, x \text{ e } y \in C \cap H; \text{ la retta } [x, y] \text{ è una trisecante a } C\}$. Se ogni piano contiene una trisecante a C , la proiezione $J \rightarrow \mathbb{P}_3^*$ è suriettiva e quindi $\dim(J) \geq 3$,

cioè esiste una componente irriducibile, J_0 , di J di dimensione almeno tre. Sia $q : J \rightarrow C^2$ la proiezione e sia $q_0 : J_0 \rightarrow C^2$ la restrizione di q a J_0 , dove J_0 è una componente irriducibile di dimensione massima di J . Se q_0 non è suriettiva, la dimensione dell'immagine è ≤ 1 e la dimensione della fibra $q_0^{-1}(x, y)$ per $(x, y) \in \text{Im}(q_0)$ è almeno 2. Questo è impossibile perché per ogni $(x, y) \in C^2$, $\dim(q^{-1}(x, y)) \leq 1$. Infatti $q^{-1}(x, y)$ (se non vuota) si identifica con il fascio di piani per la retta $[x, y]$ (risp. per $T_x C$ se $x = y$). Quindi q_0 è suriettiva e pertanto ogni bisecante $[x, y]$ è una trisecante. $\square$

Lemma 7.8. *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva sghemba, liscia, irriducibile.*

(i) *Se ogni bisecante a C è una trisecante allora per ogni x, y in C le tangenti $T_x C, T_y C$ sono complanari.*

(ii) *Se per ogni x, y in C le tangenti $T_x C, T_y C$ sono complanari, allora esiste un punto $a \in \mathbb{P}^3$ tale che ogni tangente a C passi per a .*

Dimostrazione. (i) Sia $p \in C$ e proiettiamo C su un piano dal punto p : $\pi_p : C \rightarrow C'$. Se z è un punto liscio dell'immagine, C' , e se x, y appartengono a $\pi_p^{-1}(z)$ allora le tangenti $T_x C, T_y C$ si proiettano nella tangente in z a C' , quindi $T_x C$ e $T_y C$ sono contenute nel piano $[p, T_z C']$. Questo mostra che per ogni p e per quasi ogni x, y tali che p, x, y siano allineati, $T_x C$ e $T_y C$ sono complanari. Pertanto esiste un aperto, U , di C^2 tale che se $(x, y) \in U$, $T_x C$ e $T_y C$ sono complanari. Siccome la condizione $T_x C$ e $T_y C$ sono complanari è una condizione chiusa (è equivalente a $T_x C \cap T_y C \neq \emptyset$), concludiamo che per ogni x, y , $T_x C$ e $T_y C$ sono complanari.

(ii) Siano $x \neq y$ due punti di C con $T_x C \neq T_y C$. Segue da (i) che $T_x C$ e $T_y C$ s'incontrano. Sia $a := T_x C \cap T_y C$. Sia H il piano generato da $T_x C$ e $T_y C$. Sia $z \in C \setminus (C \cap H)$ (un tale z esiste perché C è sghemba). Dal punto (i), $T_z C$ deve incontrare $T_x C$ e $T_y C$. Siccome $z \notin H$, l'unica possibilità è che $T_z C$ passi per a . Quindi per ogni punto, z , dell'aperto $U := C \setminus (C \cap H)$, $a \in T_z C$. Siccome la condizione $a \in T_x C$ è una condizione chiusa, concludiamo che $a \in T_x C, \forall x \in C$. $\square$

Lemma 7.9. *($ch(k) = 0$)*

Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile. Se esiste $a \in \mathbb{P}^3$ tale che per ogni $x \in C$, $a \in T_x C$, allora C è una retta.

Dimostrazione. Proiettiamo C su un piano dal punto a : $\pi_a : C \rightarrow C'$. L'immagine C' è una curva irriducibile tranne se $a \in C$ e se C è una retta. Siccome la caratteristica del campo k è zero, il teorema di nonsingularità generica (Teorema 6.8) assicura che esiste un aperto V di C' tale che $\pi_a : \pi_a^{-1}(V) \rightarrow V$ sia un morfismo liscio, in particolare se $z \in V$, $\pi_a^{-1}(z)$ è liscia. Ma questo è assurdo perché se $x \in \pi_a^{-1}(z)$, $a \in T_x C$ e $2x \in \pi_a^{-1}(z)$. $\square$

Corollario 7.10. (Lemma delle trisecanti.)

Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva sghemba, liscia, irriducibile. La sezione piana generica di C non contiene tre punti allineati.

Dimostrazione. Segue dai Lemmi 7.7, 7.8, 7.9. □

Osservazione 7.11.

Sia $ch(k) = 2$ e sia $C \subset \mathbb{P}^2$ la conica di equazione $zy = x^2$ allora tutte le tangenti a C passano per il punto $(1 : 0 : 0) \notin C$.

Ciò non toglie che il Lemma delle trisecanti sia vero in caratteristica positiva ([15], IV, Theorem 3.9, 3.10).

7.4 Il teorema di Halphen.

Usando il Lemma delle trisecanti vogliamo limitare il genere virtuale $g(I) = \sum_{n \geq 1} h^1(\mathcal{I}_{I,H}(n))$, della curva C . Questo torna a limitare il genere virtuale di un insieme di punti $X \subset \mathbb{P}^2$, non contenente tre punti allineati.

Se $X \subset \mathbb{P}^2$ è un insieme di d punti abbiamo per ogni m :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X(m) \rightarrow \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Qui $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ e scriviamo $\mathcal{O}_X$ invece di $\mathcal{O}_X(m)$ perché X essendo di dimensione zero, il twist è influente. Prendendo la coomologia per $m \geq 0$ viene:

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_X(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(m)) \xrightarrow{r(m)} H^0(\mathcal{O}_X) \simeq k^d \rightarrow H^1(\mathcal{I}_X(m)) \rightarrow 0$$

L'immagine dell'applicazione di restrizione $r(m)$ è $(S_H/I)_m = A(X)_m$, dove $I = H_*^0(\mathcal{I}_X)$; $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{I}_X(m)))$ è il sistema lineare delle curve piane di grado m passanti per X .

Definizione 7.12. La funzione di Hilbert dell'insieme di punti $X \subset \mathbb{P}^2$ è la funzione $h_X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \rightarrow \dim(\text{Im}(r(n))) = \dim A(X)_n$.

Siccome $h^1(\mathcal{I}_X(m)) = 0$ se $m \gg 0$, $h_X(m) = d$ se $m \gg 0$, ci sono quindi un numero finito di valori da determinare per conoscere h_X . La funzione di Hilbert della sezione piana generica di C è un invariante importante sul quale torneremo più avanti. Per il momento ci basta il seguente:

Lemma 7.13. (Criterio di separazione)

Sia $X = \{p_1, \dots, p_d\}$ un insieme di d punti in $\mathbb{P}^2$. Sia $n > 0$ un intero. Diremo che le curve di grado n separano i punti di X se per ogni i esiste una curva di grado n passante per $X \setminus \{p_i\}$, e non passante per p_i .

Abbiamo: $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = 0$ se e solo se le curve di grado n separano i punti di X .

In particolare $h^1(\mathcal{I}_X(m)) = 0 \Rightarrow h^1(\mathcal{I}_X(n)) = 0$ se $n \geq m$.

Inoltre: $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = 0$, se $n \geq d - 1$.

Dimostrazione. Se C_i è una curva di grado n passante per $X \setminus \{p_i\}$ ma non passante per p_i , abbiamo $r(n)(C_i) = (0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots, 0) \in k^d$, con $\lambda \neq 0$ al posto i . Siccome questo è vero per ogni i , $r(n)$ è suriettiva. Viceversa se $r(n)$ è suriettiva l'immagine contiene i vettori $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Se le curve di grado m separano i punti di X allora a fortiori anche quelle di grado $n \geq m$ separano i punti di X .

Se $n \geq d - 1$, possiamo prendere $d - 1$ rette ognuna per un punto di $X \setminus \{p_i\}$, non passanti per p_i . $\square$

Se X non contiene tre punti allineati possiamo migliorare queste stime:

Lemma 7.14. *Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di d punti, non contenente tre punti allineati. Per ogni $n \geq 1$, $h_X(n) \geq \min\{d, 2n + 1\}$. In particolare:*

- (i) se $d = 2\delta$, $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = 0$ se $n \geq \delta$ e $h^1(\mathcal{I}_X(\delta - i)) \leq 2i - 1$, $1 \leq i \leq \delta - 1$
- (ii) se $d = 2\delta + 1$, $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = 0$ se $n \geq \delta$, e $h^1(\mathcal{I}_X(\delta - i)) \leq 2i$, $1 \leq i \leq \delta - 1$.

Dimostrazione. Sia $X = \{p_1, \dots, p_d\}$. Supponiamo $d = 2\delta$ e mostriamo $h^1(\mathcal{I}_X(\delta)) = 0$ usando il criterio di separazione (Lemma 7.13). Per separare p_d , consideriamo le rette $R_i := [p_{2i-1}, p_{2i}]$, $1 \leq i \leq \delta - 1$. Siccome X non contiene tre punti allineati $R_i \cap X = \{p_{2i-1}, p_{2i}\}$. Quindi $R_1 \cup \dots \cup R_{\delta-1} \cup R$ (dove R è una retta per $p_{2\delta-1}$ non contenente $p_{2\delta}$) è una curva di grado δ contenente $X \setminus \{p_{2\delta}\}$ e non passante per $p_{2\delta}$. Chiaramente in questo modo possiamo separare qualsiasi $p_i \in X$. Questo mostra $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = 0$ se $n \geq \delta$. Sia $n < \delta$, prendiamo un sottoinsieme $Y \subset X$, $\#(Y) = 2n + 1$ (possibile perché $2n + 1 < d$). Ragionando come prima viene $h^1(\mathcal{I}_Y(n)) = 0$, cioè $h_Y(n) = 2n + 1$. Questo implica $h_X(n) \geq 2n + 1$ (Esercizio 60). Si conclude osservando che $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = d - h_X(n)$.

Il caso d dispari è analogo. $\square$

Possiamo finalmente dimostrare il nostro teorema:

Teorema 7.15. (Halphen, 1882)

Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva sghemba, liscia, irriducibile, di grado d e genere g .

- (i) Allora: $g \leq G(d)$ dove: $G(d) = \frac{(d-2)^2}{4}$ se d è pari, $G(d) = \frac{(d-1)(d-3)}{4}$ se d è dispari.

(ii) Inoltre se $g = G(d)$, C è proiettivamente normale ed è contenuta in una quadrica.

(iii) Per ogni $d \geq 3$, esiste una curva sghemba, liscia, irriducibile, di grado d , genere $G(d)$.

Dimostrazione. (i) Sia $\Gamma = C \cap H$, H piano generico. Abbiamo $g \leq g(\Gamma)$ (Proposizione 7.4). Per il lemma delle trisecanti Γ non contiene tre punti allineati. Per il Lemma 7.14, $g(\Gamma) \leq 1 + 3 + \dots + 2(\delta - 1) - 1 = (\delta - 1)^2 = G(d)$ se $d = 2\delta$, mentre $g(\Gamma) \leq 2 + 4 + \dots + 2\delta - 2 = \delta(\delta - 1) = G(d)$ se $d = 2\delta + 1$.
(ii) Se $g = G(d)$ allora $g = g(\Gamma) = G(d)$ e C è proiettivamente normale (Proposizione 7.4). Quindi ogni curva piana contenente Γ proviene da una superficie contenente C . Inoltre se $g(\Gamma) = G(d)$ tutte le disuguaglianze nel Lemma 7.14 sono delle uguaglianze. In particolare $h_\Gamma(2) = \min\{d, 5\}$. Segue che $h^0(\mathcal{I}_\Gamma(2)) \neq 0$, pertanto $h^0(\mathcal{I}_C(2)) \neq 0$.

(iii) Supponiamo d pari. Una curva intersezione completa di una quadrica e di una superficie di grado $d/2$ ha grado d e genere $G(d)$. Se d è dispari una curva di bi-grado $((d - 1)/2, (d + 1)/2)$ su una quadrica liscia ha grado d , genere $G(d)$ (Proposizione 6.19). $\square$

Osservazione 7.16. (i) Il Teorema 7.15 si trova nella memoria di Halphen ([13]). L'approccio di Halphen è diverso, invece di considerare la sezione piana generica, considera una proiezione generica su un piano. La dimostrazione riportata qui ricalca quella di Castelnuovo ([3]). E' istruttivo notare come i due approcci (segare e proiettare) usino il lemma delle trisecanti. Il vantaggio della dimostrazione di Castelnuovo è che si estende a $\mathbb{P}^n$ (il lettore interessato può consultare [10]). In effetti, nel lavoro citato, Castelnuovo dimostra la maggiorazione del genere per curve in $\mathbb{P}^n$ mentre Halphen considerava solo curve in $\mathbb{P}^3$. Il risultato per le curve di $\mathbb{P}^n$ è il seguente: sia $m = \lfloor \frac{d-1}{n-1} \rfloor$ (parte intera) e $d = m(n - 1) + \epsilon + 1$ ($0 \leq \epsilon \leq n - 2$), allora il genere di una curva liscia, non degenere di grado d verifica: $g \leq G_n(d) := \binom{m}{2}(n - 1) + m\epsilon$. Quindi $G_n(d)$ è dell'ordine di $\frac{d^2}{2(n - 1)}$.

(ii) Il Teorema 7.15 è vero anche se $ch(k) > 0$.

Esercizi.

Esercizio 60 Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di d punti. Abbiamo visto che $h_X(n) = d$ se $n \geq d-1$ (cioè $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = 0$, se $n \geq d-1$).

- 1) Mostrare che se $Y \subset X$ e se $h_Y(n) = t$, allora $h_X(n) \geq t$.
- 2) Mostrare che $h^1(\mathcal{I}_X(n)) \leq h^1(\mathcal{I}_X(n-1))$ (usare la successione di restrizione a una retta)
- 3) Mostrare inoltre che: $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = h^1(\mathcal{I}_X(n-1)) \Rightarrow h^1(\mathcal{I}_X(k)) = 0$, per ogni $k \geq n-1$.
- 4) Mostrare che $h^1(\mathcal{I}_X(d-2)) \neq 0 \Leftrightarrow X$ è contenuto in una retta.

Esercizio 61 Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile, non degenera di grado d , genere g . Mostrare che se $(d, g) \neq (3, 0), (1, 4)$, allora C ha un'infinità di multiseccanti (proiettare su un piano da un punto di C). Se $(d, g) = (3, 0), (4, 1)$, C non ha trisecanti.

Esercizio 62 1) Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una cubica gobba (una curva liscia di grado 3, genere 0). Mostrare che C è proiettivamente normale e che $\mathbb{I}(C)$ è generato da tre quadriche.

- 2) Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una quartica razionale. Mostrare che C è contenuta in un'unica quadrica Q . Mostrare che Q è necessariamente liscia.
- 3) Mostrare che $h^0(\mathcal{I}_C(3)) \geq 7$. Concludere che esiste una superficie cubica irriducibile, S , contenente C .
- 4) Mostrare che $C = Q \cap S \cap F$ (intersezione schematica), dove F è un'altra cubica contenente C (considerare $Q \cap S$). L'intersezione essendo schematica $I = (Q, S, F)$ definisce C (si dice che C è quasi intersezione completa). Abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3) \oplus \mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$$

Si ammetterà che E è localmente libero. Mostrare che E è indecomponibile di rango due (cioè non è la somma diretta di due fibrati in rette).

Esercizio 63 Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva, non piana, proiettivamente normale di grado d , genere g . Mostrare che se $d = 6$, allora $g = 3$ o $g = 4$. Se $d = 7$, allora $g = 5$. Cosa potete dire dell'esistenza di tali curve?

Il carattere numerico di una curva.

8.1 Il carattere numerico di un insieme di punti in $\mathbb{P}^2$.

In questa sezione $X = \{p_1, \dots, p_d\} \subset \mathbb{P}^2$ denoterà un insieme di d punti in $\mathbb{P}^2$. In realtà tutto quello che faremo è valido se X è un sotto schema chiuso, zero-dimensionale, di $\mathbb{P}^2$ (in questo caso $\deg(X) := h^0(\mathcal{O}_X)$). Sia $I = H_*^0(\mathcal{I}_X)$ l'ideale di X . Abbiamo la successione:

$$0 \rightarrow I \rightarrow k[x_0, x_1, x_2] \rightarrow A(X) \rightarrow 0$$

L'anello $A(X)$ è l'anello delle coordinate di X .

Sia $\sigma = \min\{k \mid h^0(\mathcal{I}_X(k)) \neq 0\}$, quindi σ è il grado minimo di una curva contenente X . Sia C una curva di grado σ contenente X . Abbiamo quindi:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{X,C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad (8.1)$$

Se $F(x, y, z) = 0$ è un'equazione di C , questo torna a considerare la successione esatta:

$$0 \rightarrow I/(F) \rightarrow S/(F) \rightarrow S/I \simeq A(X) \rightarrow 0 \quad (8.2)$$

dove $S := k[x, y, z]$ e $I = H_*^0(\mathcal{I}_X)$.

Sia O un punto non appartenente a C e sia L una retta tale che $O \notin L$, $L \cap X = \emptyset$. Cambiando le coordinate possiamo assumere $O = (0 : 0 : 1)$, L la retta di equazione $z = 0$. Sia $\pi : \mathbb{P}^2 \setminus \{O\} \rightarrow L$ la proiezione di vertice O sulla retta L di equazione $z = 0$. Vogliamo proiettare la successione (8.1) su L .

Il nostro $A(X)$ è un $S = k[x, y, z]$ modulo graduato. Per restrizione degli scalari è anche un $R := k[x, y]$ -modulo. Siccome $O \notin C$, l'equazione di C è della forma: $F(x, y, z) = z^\sigma + p_1(x, y)z^{\sigma-1} + \dots + p_\sigma(x, y)$, dove p_i è omogeneo di grado i . In $S/(F)$ abbiamo $\bar{F} = 0$, quindi $\bar{z}^\sigma = -p_1(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}^{\sigma-1} - \dots -$

$p_\sigma(\bar{x}, \bar{y})$. Pertanto $S/(F)$, come R -modulo, è libero di rango σ , isomorfo a $\bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} R(-i)$ (Esercizio 64). Quindi come R -modulo $A(X)$ è generato dalle classi di $1, z, \dots, z^{\sigma-1}$ cioè abbiamo: $\bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} R(-i) \xrightarrow{(1, z, \dots, z^{\sigma-1})} A(X) \rightarrow 0$. In altre parole se $P \in S$, consideriamo $P \in R[z]$ e facciamo la divisione euclidea per F secondo le potenze di z : $P = FQ + T$, $\deg_z T < \sigma$. Quindi $T = a_0 z^{\sigma-1} + \dots + a_{\sigma-1}$, $a_i \in R$, $\deg a_i = i$. Abbiamo $P = T$ in $S/(F)$. L'immagine di T in $A(X)$ è, ovviamente, $T \pmod{\mathbb{I}(X)}$.

Sia N il nucleo di modo che abbiamo:

$$0 \rightarrow N \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} R(-i) \rightarrow A(X) \rightarrow 0$$

Prendendo i fasci associati viene:

$$0 \rightarrow N^\sim \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} \mathcal{O}_L(-i) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Infatti $A(X)^\sim = \pi_* \mathcal{O}_X$ (il modulo $A(X)$ letto come R -modulo).

Siccome $N^\sim \subset \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} \mathcal{O}_L(-i)$, $N^\sim$ è senza torsione quindi (Esercizio 45) localmente libero. Siccome $\pi_* \mathcal{O}_X$ ha rango zero, $N^\sim$ è localmente libero di rango σ . Per la classificazione dei fibrati su $\mathbb{P}^1 \simeq L$ (Esercizio 47) abbiamo: $N^\sim = \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} \mathcal{O}_L(-n_i)$, con $n_0 \geq n_1 \geq \dots \geq n_{\sigma-1}$. In conclusione abbiamo una successione esatta:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} R(-n_i) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} R(-i) \xrightarrow{\psi} A(X) \rightarrow 0 \quad (8.3)$$

con $n_0 \geq \dots \geq n_{\sigma-1}$ e con $\psi = (1, z, \dots, z^{\sigma-1})$.

Definizione 8.1. (Carattere numerico)

Con le notazioni precedenti, la successione $\chi(X) := (n_0, n_1, \dots, n_{\sigma-1})$ è il carattere numerico dell'insieme di punti X .

A priori la definizione sembra dipendere dalle scelte fatte (la curva di grado σ contenente X , il punto O , ecc...). Il Lemma 8.3 mostra che la definizione è ben posta.

Osservazione 8.2.

Si può arrivare al risultato in termini puramente algebrici: l'anello $A(X)$ è un anello di Cohen-Macaulay. Infatti in $\mathbb{A}^3 = \text{Spec}(k[x, y, z])$, $A(X)$ è l'anello delle coordinate del cono sopra X . Se C denota questa curva, C è ridotta (anche nel vertice, abbiamo preso $\mathbb{I}(X)$ come ideale di definizione di C). Adesso $A(X)$ è Cohen-Macaulay se e solo se $A(X)_m$ lo è, cioè se $\mathcal{O}_{C,x}$ è un anello di

Cohen-Macaulay. Ma in dimensione uno un anello è C.M. se e solo se non ha componenti immerse. Quindi C e pertanto $A(X)$ sono C.M. Adesso siccome z non è un divisore dello zero in $A(X)$, $A(X)$ è un R -modulo C.M. Per la formula di Auslander-Buchsbaum nel caso graduato:

$$pd(A(X)) + depth(A(X)) = depth(R)$$

Essendo C.M. abbiamo $depth(A(X)) = \dim(A(X)) = 1$. D'altra parte (per lo stesso motivo) $depth(R) = 2$. Risulta quindi che $pd(A(X)) = 1$ e questo implica che N è un R -modulo libero.

Lemma 8.3. *Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di d punti e sia $\chi(X) = (n_0, \dots, n_{\sigma-1})$ il suo carattere numerico.*

- (i) $n_i \geq \sigma, \forall i, 0 \leq i \leq \sigma - 1$
- (ii) Per ogni n : $h_X(n) = \sum_{i=0}^{\sigma-1} [(n-i+1)_+ - (n-n_i+1)_+]$, dove $(x)_+ = \max(0, x)$
- (iii) Per ogni n : $h^1(\mathcal{I}_X(n)) = \sum_{i=0}^{\sigma-1} [(n_i - n - 1)_+ - (i - n - 1)_+]$
- (iv) $d = \sum_{i=0}^{\sigma-1} (n_i - i)$.

Dimostrazione. (i) Siccome $n_0 \geq \dots \geq n_{\sigma-1}$ basta mostrare $n_{\sigma-1} \geq \sigma$. Supponiamo $n_{\sigma-1} < \sigma$. Guardiamo la successione (8.3) in grado $\sigma - 1$:

$$0 \rightarrow \oplus R(-n_i)_{\sigma-1} \rightarrow \oplus R(-i)_{\sigma-1} \xrightarrow{f_{\sigma-1}^{\sigma-1}} A(X)_{\sigma-1} \rightarrow 0$$

$$\text{cioè } 0 \rightarrow \oplus R_{-n_i+\sigma-1} \rightarrow \oplus R_{-i+\sigma-1} \xrightarrow{f_{\sigma-1}^{\sigma-1}} A(X)_{\sigma-1} \rightarrow 0$$

Se $n_{\sigma-1} < \sigma$ allora $-n_{\sigma-1} + \sigma - 1 \geq 0$ e quindi $Ker(f_{\sigma-1}) \neq 0$. Pertanto esiste $(b_0, \dots, b_{\sigma-1}) \neq 0$ in $R_{\sigma-1} \oplus \dots \oplus R_0$ tale che $\sum b_i z^i = 0 \mod I_{\sigma-1}$, ossia $\sum b_i z^i \in I_{\sigma-1}$ ma questo contraddice la minimalità di σ .

(ii) La funzione di Hilbert è data da: $h_X(n) = \dim(A(X)_n)$. Dalla successione (8.3), $\dim(A(X)_n) = \sum \dim(R_{n-i}) - \sum \dim(R_{n-n_i})$. Abbiamo $\dim(R_k) = (k+1)_+$; quindi: $h_X(n) = \sum [(n-i+1)_+ - (n-n_i+1)_+]$.

(iii) Segue da (ii) visto che $d = h_X(n) + h^1(\mathcal{I}_X(n))$.

(iv) Per $n \gg 0$ sappiamo che $h_X(n) = d$ perciò: $h_X(n) = d = \sum_{i=0}^{\sigma-1} [(n-i+1)_+ - (n-n_i+1)_+] = \sum_{i=0}^{\sigma-1} [(n-i+1) - (n-n_i+1)] = \sum_{i=0}^{\sigma-1} (n_i - i)$. $\square$

Osservazione 8.4. Il Lemma mostra che darsi il carattere numerico è equivalente a darsi la funzione di Hilbert di X (quindi $\chi(X)$ non dipende dalle scelte fatte). In sostanza il carattere numerico descrive in modo molto compatto la funzione di Hilbert di un insieme di punti.

Osserviamo che tutto quanto rimane valido se X è un sotto schema chiuso zero-dimensionale.

Esempio 8.5. (i) Supponiamo X costituito da d punti allineati:

Abbiamo $\sigma = 1$, $\chi(X) = (n_0)$ e $n_0 = d$, quindi $\chi(X) = (d)$. Ritroviamo così il fatto che $h_X(d-2) \neq d$: $\sum [(d-2+i+1)_+ - (d-2-n_i+1)_+] =$

$$d - 1 - (d - 2 - d + 1)_+ = d - 1.$$

(ii) Sei punti non contenuti in una conica: Chiaramente $\sigma = 3$, quindi $\chi(X) = (n_0, n_1, n_2)$ con $\sum n_i = 9$ e $n_i \geq 3, \forall i$. L'unica possibilità è $\chi(X) = (3, 3, 3)$.

(iii) Sei punti su una conica irriducibile: Abbiamo $\sigma = 2$, $\chi(X) = (n_0, n_1)$ con $n_i \geq 2$, per ogni i e $\sum n_i = 7$. Ci sono a priori due possibilità: $(5, 2)$ e $(4, 3)$. Siccome $h^0(\mathcal{I}_X(2)) = 1$, vediamo che $\chi(X) = (4, 3)$.

(iv) Sei punti di cui cinque allineati: Ragionando come in (iii) ma tenendo conto del fatto che $h^0(\mathcal{I}_X(2)) = 2$, otteniamo $\chi(X) = (5, 2)$.

Definizione 8.6. *Un carattere numerico χ di lunghezza σ , grado d , è una successione $\chi = (n_0, \dots, n_{\sigma-1})$, $n_0 \geq \dots \geq n_{\sigma-1} \geq \sigma$, con $\sum (n_i - i) = d$. Per ogni $n \geq 1$, sia $h_\chi(n) = \sum_{i=0}^{\sigma-1} [(n_i - n - 1)_+ - (i - n - 1)_+]$. Il genere di χ è $g(\chi) := \sum_{n \geq 1} h_\chi(n)$.*

Esercizi.

Esercizio 64 Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva di grado σ , di equazione $F = 0$. Sia $O \notin C$ e sia L la retta all'infinito (cioè possiamo assumere $O = (0 : 0 : 1)$, L di equazione $z = 0$). Quindi l'equazione di C è della forma $z^\sigma + z^{\sigma-1}p_1(x, y) + \dots + p_\sigma(x, y)$, con $p_i(x, y)$ omogenei di grado i .

Mostrare che le classi di $z^{\sigma-1}, \dots, z, 1$ sono una base del $R = k[x, y]$ -modulo $S/(F)$ ($S = k[x, y, z]$).

Esercizio 65 Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di punti e sia $\chi(X) = (n_0, \dots, n_{\sigma-1})$ il suo carattere numerico.

1) Mostrare che $h^0(\mathcal{I}_X(\sigma)) = \#\{i \mid n_i = \sigma\} + 1$.

2) Si suppone $n_{\sigma-1} > \sigma$. Mostrare che $\mathbb{I}(X)$ ha un generatore minimale di grado $n_{\sigma-1}$ e nessun generatore minimale di grado k , $n_{\sigma-1} > k > \sigma$. In generale questo non implica che X sia contenuto in un'intersezione completa $(\sigma, n_{\sigma-1})$ (dare un contr'esempio).

Esercizio 66 Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di $d \geq 4$ punti di cui $d - 1$ sono allineati, con $h^0(\mathcal{I}_X(1)) = 0$. Determinare $\chi(X)$.

8.2 Il carattere numerico di una curva.

Abbiamo già visto, nella dimostrazione del Teorema di Halphen sul genere massimo, l'importanza di avere informazioni sulla funzione di Hilbert della sezione piana generica di $C \subset \mathbb{P}^3$. Il Lemma delle trisecanti dice che $\Gamma = C \cap H$, sezione generica, non contiene tre punti allineati. Vediamo adesso un'altra limitazione importante.

Definizione 8.7. *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva. Il carattere numerico di C è il carattere numerico di $\Gamma = C \cap H$, dove H è un piano sufficientemente generale.*

Questa definizione è ben posta: per i teoremi di semi-continuità della coomologia, esiste un aperto $U \subset \mathbb{P}_3^*$ tale che per ogni $H \in U$, gli insiemi di punti $C \cap H$ hanno tutti la stessa funzione di Hilbert (o la stessa "postulazione" cioè $h^0(\mathcal{I}_{C \cap H}(n))$ non dipende da H per $H \in U, \forall n$).

L'interesse del carattere sta nel seguente lemma:

Lemma 8.8. *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ e sia $\chi(C)$ il suo carattere numerico. Allora $g(C) \leq g(\chi(C))$ con uguaglianza se e solo se C è proiettivamente normale.*

Dimostrazione. E' una riformulazione della Proposizione 7.4, tenuto conto della Definizione 8.6. $\square$

Scopo di questa sezione è di mostrare:

Teorema 8.9. (Gruson-Peskine [11])

Il carattere numerico di una curva integra $C \subset \mathbb{P}^3$ è connesso, cioè se $\chi(C) = (n_0, \dots, n_{\sigma-1})$, allora $n_{i-1} \leq n_i + 1$, per ogni i .

Questo teorema (di non facile dimostrazione) fornisce una limitazione molto forte sulla funzione di Hilbert della sezione piana generica di una curva integra di $\mathbb{P}^3$.

Consideriamo la varietà d'incidenza $I \subset C \times \mathbb{P}_3^* \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}_3^*$, $I = \{(x, H) \mid x \in H\}$. Siano $p : I \rightarrow C$, $q : I \rightarrow \mathbb{P}_3^*$ le proiezioni. Allora $q^{-1}(H) \simeq C \cap H \subset H$. Sia H_ξ il punto generico di $\mathbb{P}_3^*$, allora $q^{-1}(H_\xi) = \Gamma_\xi \subset H_\xi$ è la sezione generica (dal punto di vista degli schemi). Il carattere numerico di C è il carattere numerico di Γ_ξ . Osserviamo che Γ_ξ è un sotto schema chiuso di $H_\xi \simeq \mathbb{P}_K^2$, dove K è il campo delle funzioni razionali di $\mathbb{P}_3^*$. Il problema è che K non è algebricamente chiuso. Questo non impedisce di definire e quindi di considerare $\chi(\Gamma_\xi)$, ma bisogna stare attenti! Useremo il seguente:

Lemma 8.10. *Siano X, Y due schemi noetheriani, integri e sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo dominante. Se ξ è il punto generico di Y , allora $f^{-1}(\xi) =: X_\xi$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Sia η il punto generico di X . Siccome f è dominante $f(\eta) = \xi$. Quindi $\eta \in f^{-1}(\xi)$. Pertanto $X = \bar{\eta} \subset \overline{X_\xi}$. Quindi $\overline{X_\xi} = X$ è irriducibile e questo implica che X_ξ è irriducibile. $\square$

Ricordiamo che la fibra generica, è ottenuta per cambiamento di base:

$$\begin{array}{ccc} X_\xi & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k(Y) = \xi & \rightarrow & Y \end{array}$$

($k(Y)$ il campo delle funzioni razionali su Y). Risulta quindi che il $k(Y)$ -schema X_ξ è irriducibile. In generale $k(Y)$ non è algebricamente chiuso. La dimostrazione mostra che si tratta di una questione topologica, non algebrica.

Adesso ripetiamo, in un contesto più generale, quello che abbiamo già fatto per definire il carattere numerico. Sia $X \subset \mathbb{P}_k^n$ una varietà (quindi uno schema integro), k non necessariamente algebricamente chiuso. Supponiamo $O = (0 : \dots : 0 : 1) \notin X$ e sia $\pi : X \rightarrow H = \text{Proj}(k[x_0, \dots, x_{n-1}])$ la proiezione sull'iperpiano all'infinito. Sia $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente, senza torsione (come $\mathcal{O}_X$ -modulo). Sia $M = H_*^0(\mathcal{F})$, è un $S = k[x_0, \dots, x_n]$ -modulo e possiamo considerarlo come un $S_H = k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ -modulo.

Proposizione 8.11. *Con le notazioni precedenti sia*

$$\bigoplus_{i=0}^t S_H(-a_i) \rightarrow M \rightarrow 0$$

dato da un sistema minimale di generatori $m_0, \dots, m_t$ (di gradi $a_t \geq \dots \geq a_0$) di M come S_H -modulo. Se esiste r tale che $a_{r-1} + 1 < a_r$, allora esiste un'ipersuperficie $\Sigma \subset \mathbb{P}_k^n$, di grado r , contenente X tale che $O \notin \Sigma$.

Dimostrazione. Per $i < r$, $x_n m_i \in M_{\leq a_{r-1}}$. Quindi esistono $\alpha_{ij} \in S_H$ tali che $x_n m_i = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{ij} m_j$. Sia A la matrice di coefficienti $(\delta_{ij} x_n - \alpha_{ij})$. Abbiamo $A \cdot {}^t(m_0, \dots, m_{r-1}) = 0$. Se A^c è la matrice compagna di A , allora $A^c A = \det A \cdot I_r$. Segue che $\det A \cdot m_i = 0, 0 \leq i \leq r-1$. Adesso $\det A = x_n^r + \dots + b_0$ è un polinomio omogeneo di grado r nelle variabili $x_0, \dots, x_n$. Siccome $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo senza torsione, $\det A$ deve annullarsi sul supporto di $\mathcal{F}$, cioè su X . Quindi l'ipersuperficie Σ di equazione $\det A = 0$ contiene X . Dalla forma dell'equazione è chiaro che $O \notin \Sigma$. $\square$

Una varietà $X \subset \mathbb{P}^n$ è *aritmeticamente Cohen-Macaulay* (a.C.M.) se $A(X) = S/I$ ($S = k[x_0, \dots, x_n]$, $I = H_*^0(\mathcal{I}_X)$) è un anello di Cohen-Macaulay cioè se $\dim A(X) = \text{depth} A(X)$ (qui si tratta della profondità rispetto all'ideale irrilevante). Se X ha codimensione due e se X è a.C.M., $A(X)$ ha $\text{depth } n - 1$ come S modulo. Se H è un iperpiano non contenente alcuna componente irriducibile di X , l'equazione di H non è divisore dello zero in $A(X)$ e $A(X)$ è C.M. come S_H -modulo, con $\text{depth} = n - 1$. Per la formula di Auslander-Buchsbaum $A(X)$ ha dimensione proiettiva uno come S_H -modulo. Come fatto prima possiamo assumere $O = (0 : \dots : 0 : 1) \notin X$ e H di equazione $x_n = 0$. Sia $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ un'ipersuperficie di grado s minimale contenente X , con $O \notin \Sigma$. Sia π la proiezione di centro O . Abbiamo una successione esatta: $0 \rightarrow \pi_* \mathcal{I}_{X, \Sigma} \xrightarrow{\psi} \pi_* \mathcal{O}_\Sigma \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ che come abbiamo visto prima corrisponde alla successione:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} S_H(-n_i) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=0}^{s-1} S_H(-i) \rightarrow A(X) \rightarrow 0$$

Questa successione induce:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} \mathcal{O}_H(-n_i) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} \mathcal{O}_H(-i) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Applicando $\text{Hom}_{\mathcal{O}_H}(-, \mathcal{O}_H)$, viene:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} \mathcal{O}_H(i) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} \mathcal{O}_H(n_i) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_H}^1(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_H) \rightarrow 0$$

Infatti $\text{Hom}_{\mathcal{O}_H}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_H) = 0$ perché $\pi_* \mathcal{O}_X$ è di torsione (ha supporto su $\pi(X)$). Questa successione è quella associata alla successione di moduli graduati:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} S_H(i) \xrightarrow{t_\psi} \bigoplus_{i=0}^{s-1} S_H(n_i) \rightarrow \text{Ext}_{S_H}^1(A(X), S_H) \rightarrow 0$$

Il fascio $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_H}^1(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_H)$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo (via π). Si mostra che $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_H}^1(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_H)$ è senza torsione (è un sotto fascio di $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_H}^1(\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{O}_H) \simeq \omega_{\bar{X}}(n)$, dove $\bar{X} = \pi(X)$). Siccome $\bar{X}$ è un'ipersuperficie in H , $\omega_{\bar{X}}$ è localmente libero); possiamo quindi usare la Proposizione 8.11 per ottenere:

Corollario 8.12. *Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una varietà (o schema integro) di codimensione due, aritmeticamente Cohen-Macaulay. Sia Σ un'ipersuperficie di grado s , minimale, contenente X . Sia $O \notin \Sigma$. La proiezione sull'iperpiano all'infinito H induce una successione esatta:*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} \mathcal{O}_H(-n_i) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} \mathcal{O}_H(-i) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

dove $n_0 \geq \dots \geq n_{s-1} \geq s$ e dove $n_i + 1 \geq n_{i-1}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_H}^1(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_H)$ e sia $M = H_*^0(\mathcal{F})$ considerato come S_H -modulo. Per quanto visto prima abbiamo:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} S_H(i) \xrightarrow{t_{ij}} \bigoplus_{i=0}^{s-1} S_H(n_i) \rightarrow M \rightarrow 0$$

Abbiamo quindi un sistema di generatori di M di gradi $-n_i$. Se $-n_{i-1} < -n_i - 1$, allora per la Proposizione 8.11, X è contenuta in una ipersuperficie di grado i , ma questo va contro la minimalità di s ($s = \min\{m \mid h^0(\mathcal{I}_X(m)) \neq 0\}$). $\square$

Definizione 8.13. Con le notazioni e ipotesi del Corollario 8.12, la successione $(n_0, \dots, n_{s-1})$ si chiama il carattere numerico di X .

Quindi una curva a.C.M. $C \subset \mathbb{P}^3$ ha due caratteri: il suo (Definizione 8.13) e quello della sua sezione piana generica: questo è consistente perché i due caratteri sono uguali (Esercizio 70).

Arriviamo adesso al nostro risultato principale:

Teorema 8.14.

Il carattere numerico di una curva integra $C \subset \mathbb{P}^3$ è connesso, cioè se $\chi(C) = (n_0, \dots, n_{s-1})$, allora $n_{i-1} \leq n_i + 1$, per ogni i .

Dimostrazione. Riprendiamo la varietà d'incidenza $I \subset C \times \mathbb{P}_3^*$. Siccome la fibra di $p : I \rightarrow C$ è isomorfa a $\mathbb{P}^2$ e siccome C è irriducibile, concludiamo che I è irriducibile. Per il Lemma 8.10, $\Gamma_\xi \subset \mathbb{P}_K^2$ è irriducibile. Per semi continuità della coomologia ([15], III.12) esiste un aperto non vuoto $U \subset \mathbb{P}_3^*$ tale che per ogni $H \in U$ la funzione di Hilbert di $\Gamma_H = C \cap H$ sia costante (e quindi uguale a quella di Γ_ξ). Quindi se H è un punto chiuso di U , il carattere numerico di Γ_H è uguale a quello di Γ_ξ . Siccome $\Gamma_\xi \subset \mathbb{P}_K^2$ è integro, di codimensione due e a.C.M., per il Corollario 8.12, $\chi(\Gamma_\xi)$ è connesso (i.e. $n_{i-1} \leq n_i + 1$). $\square$

Questa dimostrazione, sconcertante per vari versi, è quella originale (cfr [11]). Nella prossima sezione ne vedremo un'altra, più geometrica e, forse, più naturale.

8.3 Il lemma di posizione uniforme.

Iniziamo con una definizione:

Definizione 8.15. Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di punti. Se per ogni $\Gamma' \subset \Gamma$ e per ogni $t \geq 1$: $h_{\Gamma'}(t) = \min \{deg(\Gamma'), h_{\Gamma}(t)\}$, allora si dice che Γ verifica il principio di posizione uniforme (oppure Γ è in posizione uniforme).

Questa definizione significa che tutti i sotto insiemi (di uno stesso grado) di Γ impongono lo stesso numero di condizioni alle curve di grado n , per ogni n . Quindi, dal punto di vista della funzione di Hilbert, sono indistinguibili (non c'è un sotto insieme di Γ "più bello" (o brutto) degli altri).

Detto ciò abbiamo:

Teorema 8.16. (Harris [14])

Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva integra. La sezione piana generica di C verifica il principio di posizione uniforme.

L'idea geometrica dietro questo teorema è molto semplice: se non fosse così ci sarebbe un sotto insieme "particolare" $\Delta_H \subset (C \cap H)$ per ogni H . Seguendo Δ_H al variare di H si otterrebbe una sotto curva $C' \subset C$, ma questo non è possibile perché C è integra.

Assumiamo per il momento il Teorema 8.16 (detto *Lemma di posizione uniforme*) e vediamo come dedurne il teorema di Gruson-Peskine. Per prima cosa bisogna interpretare la presenza di un buco nel carattere numerico.

Proposizione 8.17. Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di punti di carattere numerico $\chi(\Gamma) = (n_0, \dots, n_{\sigma-1})$. Se $n_j > n_{j+1} + 1$, per un j , $0 \leq j \leq \sigma - 2$, allora $\Gamma = E \cup E'$ dove E è contenuto in una curva di grado $j + 1$ e dove E' è contenuto in una curva di grado $\sigma - j - 1$.

Dimostrazione. Sia:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} S(-n_i) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} S(-i) \rightarrow A(\Gamma) \rightarrow 0$$

la successione di definizione del carattere numerico ($S = k[x_0, x_1]$). Dualizziamo, cioè applichiamo $Hom_S(-, S(-2))$. Otteniamo:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} S(i-2) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\sigma-1} S(n_i-2) \rightarrow Ext_S^1(A(\Gamma), S(-2)) = \Omega_{\Gamma} \rightarrow 0$$

Abbiamo quindi una presentazione di Ω_{Γ} con generatori α_i di grado $-n_i + 2$. Siccome Ω_{Γ} è un $A(\Gamma)$ -modulo, gli elementi $x_2 \alpha_i$ appartengono a Ω_{Γ} . Quindi

$x_2 \alpha_k = \sum_{i=0}^{\sigma-1} a_{ki} \alpha_i$, con $a_{ki} \in S$, $\deg a_{ki} = n_i - n_k + 1$. Sia P la matrice di coefficienti $(\delta_{ik} x_2 - a_{ki})$. Allora, con il solito ragionamento, $\det P$ annulla

tutti i generatori α_i , quindi il modulo Ω_Γ e quindi $A(\Gamma)$. Pertanto $\det P$ è l'equazione di una curva, C , di grado σ contenente Γ (è la curva che abbiamo usato per definire il carattere numerico).

Per ipotesi $n_j > n_{j+1} + 1$. Per $0 \leq k \leq j$, $\deg a_{ki} = n_i - n_k + 1$. Se $i > j$: $n_i \leq n_{j+1} < n_j - 1 \leq n_k - 1$. Quindi $n_i - n_k + 1 < 0$, questo implica $a_{ki} = 0$ se $0 \leq k \leq j$ e $i > j$. Quindi la matrice P è della forma $P = \begin{pmatrix} N & 0 \\ M & M' \end{pmatrix}$, dove $N = (\delta_{ik}x_2 - a_{ki})$, $0 \leq k, i \leq j$. Segue che $\det N$ divide $\det P$. Se C' è la curva, di grado $j+1$, di equazione $\det N = 0$, allora $C = C' \cup X$. Sia $E' = C' \cap \Gamma$. Osserviamo che E' è non vuoto perché altrimenti $\Gamma \subset X$, ma $\deg X = \sigma - j - 1 < \sigma$ e per minimalità di σ , questo non è possibile. Per lo stesso motivo $X \cap \Gamma \neq \emptyset$. $\square$

Osservazione 8.18.

Si può dimostrare (cf [7]) un risultato più forte (*Lemma di decomposizione*): sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$, sotto schema chiuso, zero-dimensionale, di carattere numerico $(n_0, \dots, n_{\sigma-1})$. Se $n_{t-1} > n_t + 1$, esiste una curva di grado t , T , tale che se $E = T \cap \Gamma$ e se E' è lo schema residuo a Γ rispetto a T , allora: $\chi(E) = (n_0, \dots, n_{t-1})$ e $\chi(E') = (m_0, \dots, m_{\sigma-t-1})$, con $m_i = n_{t+i} - t$.

Avremo bisogno anche del seguente lemma:

Lemma 8.19. *Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di punti di grado d . Sia $\sigma = \min \{n \mid h^0(\mathcal{I}_\Gamma(n)) \neq 0\}$. Se $d = \sigma(\sigma+1)/2 + r$, con $0 \leq r \leq 1$, allora $\chi(\Gamma)$ è connesso.*

Dimostrazione. Esercizio 67. $\square$

Adesso possiamo dimostrare

Proposizione 8.20. *Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di punti in posizione uniforme, allora $\chi(\Gamma)$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $\chi(\Gamma) = (n_0, \dots, n_{\sigma-1})$ e supponiamo $n_j > n_{j+1} + 1$ per un qualche $j < \sigma - 1$. Per la Proposizione 8.17, $\Gamma = E \cup E'$, dove E è contenuto in una curva di grado $a = j+1$ e dove E' è contenuto in una curva di grado $b = \sigma - a$. Siccome Γ è in posizione uniforme, $h_E(a) = \min \{d', h_\Gamma(a)\}$, dove $d' = \deg E$. Siccome $a < \sigma$, $h_\Gamma(a) = \binom{a+2}{2}$. Se $h_E(a) = \binom{a+2}{2}$, allora $h^0(\mathcal{I}_E(a)) = 0$, ma questo non è possibile. Quindi $h_E(a) = d'$ e $d' < \binom{a+2}{2}$.

Nello stesso modo: $d'' < \binom{b+2}{2}$, dove $d'' = \deg E'$. Sia $d = d' + d'' = \deg \Gamma$. Combinando le disuguaglianze precedenti:

$$d \leq \binom{a+2}{2} + \binom{\sigma-a+2}{2} - 2$$

Per il Lemma 8.19 possiamo assumere $d > \binom{\sigma+1}{2} + 1$. Mettendo tutto insieme viene: $(1-a)\sigma + a^2 - 1 > 0$ e quindi $\sigma < 1+a$: assurdo. Quindi $\chi(\Gamma)$ è connesso. $\square$

Possiamo ritrovare il teorema di Gruson-Peskine:

Corollario 8.21. *Il carattere numerico di una curva integra $C \subset \mathbb{P}^3$ è connesso.*

Dimostrazione. Segue dal Teorema 8.16 e dalla Proposizione 8.20. $\square$

Per concludere diamo alcuni cenni della dimostrazione del Teorema 8.16.

a) Se $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ è un insieme di d punti, per ogni $d' < d$ e ogni $k \geq 1$, esiste $\Gamma' \subset \Gamma$, di grado d' , con $h_{\Gamma'}(k) = \min\{d', h_{\Gamma}(k)\}$ (Esercizio 68).

b) Sia $I = \{(x, H) \mid x \in C \cap H\}$ la varietà d'incidenza e sia $q : I \rightarrow \mathbb{P}_3^*$ la proiezione. Allora q è un rivestimento ramificato di grado d . Sia $U \subset \mathbb{P}_3^*$, $U = \{H \mid C \cap H \text{ è composto da } d \text{ punti distinti}\}$. Per ogni $m \leq d$, sia $I(m) \subset C^m \times U$, $I(m) = \{(x_1, \dots, x_m; H) \mid H \in U, x_i \in C \cap H\}$. Il punto chiave consiste nel mostrare che $I(m)$ è connesso (quindi irriducibile perché $I(m)$ è liscio).

c) Infatti supponiamo $I(m)$ irriducibile. Sia per $k \geq 1$, $J(m; k) \subset I(m)$, $J(m; k) = \{(x_1, \dots, x_m; H) \mid \text{la funzione di Hilbert di } \Gamma' = \{x_1, \dots, x_m\} \text{ è minore di } \min(m, h_{\Gamma}(k))\}$. Allora $J(m; k)$ è un chiuso proprio di $I(m)$ (perché la proprietà di avere come funzione di Hilbert $\min(m, h_{\Gamma}(k))$ è aperta e non vuota per a). Quindi $\dim J(m; k) < \dim I(m) = 3$. Quindi l'immagine di $J(m; k)$ nell'applicazione $I(m) \rightarrow U$ è un chiuso proprio. Per m fissato abbiamo un numero finito di valori di k da considerare ($1 \leq k \leq m-1$). Quindi se $H \in U$ è sufficientemente generale, ogni sotto insieme, Γ' , di m punti di $\Gamma = C \cap H$ verifica $h_{\Gamma'}(k) = \min(m, h_{\Gamma}(k))$ per ogni $k \geq 1$. Siccome c'è un numero finito di m da considerare il teorema è dimostrato.

d) Rimane da vedere che $I(m)$ è connesso. Questo segue dal fatto che il gruppo di monodromia, G , del rivestimento $I \rightarrow \mathbb{P}_3^*$ è il gruppo simmetrico (G è due-transitivo perché $I(2)$ è irriducibile (considerare $I(2) \rightarrow C^2$) e contiene una trasposizione: prendere un piano semplicemente tangente in $x \in C$, cioè un punto liscio della varietà duale). Vedere [14], [19] per ulteriori dettagli. Osserviamo che la dimostrazione, a priori di natura topologica (su $\mathbb{C}$), ammette una traduzione algebrica ([19]) valida in qualsiasi caratteristica, ma il Teorema 8.16 richiede l'ipotesi $ch(k) = 0$.

Esercizi.

Esercizio 67 Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di d punti. Sia $\sigma = \min \{k \mid h^0(\mathcal{I}_X(k)) \neq 0\}$. Se $d = \sigma(\sigma + 1)/2 + r$, $0 \leq r \leq 1$, determinare $\chi(X)$ e verificare che $\chi(X)$ è connesso.

Esercizio 68 Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di d punti. Mostrare che per ogni $d' < d$ e ogni $k \geq 1$, esiste $X' \subset X$, $\deg X' = d'$, con $h_{X'}(k) = \min \{d', h_X(k)\}$.

Esercizio 69 Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di d punti.

- 1) Si assume che X sia contenuto in una curva irriducibile di grado σ (dove $\sigma = \min \{k \mid h^0(\mathcal{I}_X(k)) \neq 0\}$). Mostrare che $\chi(X)$ è connesso.
- 2) Se X è in posizione uniforme e se $d > \sigma(\sigma + 1)/2 + 1$ ogni curva di grado σ contenente X è irriducibile (e quindi $\chi(X)$ è connesso).
- 3) Se X è in posizione uniforme e se $d = \sigma(\sigma + 1)/2 + 1$ e se C è una curva riducibile contenente X , allora C contiene una retta. Dedurre che l'insieme delle curve riducibili è un chiuso proprio di $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{I}_X(\sigma)))$.
- 4) Se X è in posizione uniforme e se $d = \sigma(\sigma + 1)/2$, la generica curva di grado σ contenente X è irriducibile (usare Bertini).
- 5) Mostrare che esistono insiemi di punti, $X \subset \mathbb{P}^2$, con $\chi(X)$ connesso, non in posizione uniforme.

Esercizio 70 Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva proiettivamente normale. A priori C ha due caratteri numerici: $\chi(\Gamma)$ il carattere della sezione piana generica e $\chi(C)$ (Definizione 8.13). Mostrare che $\chi(\Gamma) = \chi(C)$.

$G(d, s)$ per $d > s(s - 1)$.

9.1 Il carattere massimale.

Sia $\mathcal{C}(d, s)$ l'insieme dei caratteri numerici, di grado d , lunghezza s , *connessi*. Su $\mathcal{C}(d, s)$ definiamo una relazione d'ordine totale (*ordine lessicografico*) nel modo seguente: $\chi = (n_i) \geq \varphi = (m_i) \Leftrightarrow \chi = \varphi$ oppure se $j = \min \{i \mid n_i \neq m_i\}$, allora $n_j > m_j$.

Siccome $\mathcal{C}(d, s)$ è un insieme finito e siccome la relazione è una relazione di ordine totale, esiste uno ed un unico elemento massimale $\Phi_{d,s} \in \mathcal{C}(d, s)$. Quindi per ogni $\chi \in \mathcal{C}(d, s)$: $\Phi_{d,s} = \chi$ o $\Phi_{d,s} > \chi$.

Definizione 9.1. *Con le notazioni precedenti $\Phi_{d,s}$ è il carattere massimale (connesso), di grado d , lunghezza s .*

Osservazione 9.2.

Sia $\chi = (n_0, \dots, n_{s-1})$ un carattere di grado d , lunghezza s . Diremo che χ ha un gradino d'inizio j , fine $j+i$ e lunghezza i se $n_{j-1} > n_j = \dots = n_{j+i} > n_{j+i+1}$, se $i+j < s-1$. Se $i+j = s-1$, l'ultima disuguaglianza è soppressa. In tal caso diremo che il gradino è terminale.

Sia $\Phi_{d,s} = (m_i)$ il carattere massimale, allora:

- (i) Ogni gradino non terminale di $\Phi_{d,s}$ ha lunghezza uno.
- (ii) Se $\Phi_{d,s}$ ha un unico gradino, questo ha lunghezza uno o è terminale con $m_{s-1} = s$.
- (iii) $\Phi_{d,s}$ ha al più due gradini. Inoltre se $\Phi_{d,s}$ ha due gradini, uno di questi è terminale con $m_{s-1} = s$.

Lemma 9.3. *Sia $d > s(s-1)$. Sia $d+r = st$, con $0 \leq r < s$, allora:*

Se $r = 0$, $\Phi_{d,s} = (s+t-1, s+t-2, \dots, t)$

Se $r \neq 0$, $\Phi_{d,s} = (s+t-2, s+t-3, \dots, s+t-r-1, s+t-r-1, s+t-r-2, \dots, t)$.

Dimostrazione. Esercizio 71. □

Osservazione 9.4.

- (i) Quindi se $d > s(s-1)$ e $r = 0$, $\phi_{d,s}$ è il carattere "ripido" (senza gradini) con $m_0 = s+t-1$ (è il carattere di un'intersezione completa (s, t) , cf Esercizio 72). Se $r \neq 0$, $\Phi_{d,s}$ ha un unico gradino, di lunghezza uno.
- (ii) Se χ è un carattere di lunghezza s , grado d , allora $d \geq s(s+1)/2$.
- (iii) Si può mostrare inoltre il seguente fatto. Se $s(s+1)/2 \leq d \leq s(s-1)$, siano ν, μ tali che $0 \leq \nu \leq \mu \leq s-3$, con $d = s(s+1)/2 + \mu(\mu+1)/2 + \nu$. Allora: $\Phi_{d,s} = (s+\mu, s+\mu-1, \dots, s+\nu+1, s+\nu, s+\nu, s+\nu-1, \dots, s, \dots, s)$.

Si ricorda (Definizione 8.6) che ogni carattere numerico χ ha un genere: $g(\chi) = \sum_{n \geq 1} h_\chi(n)$.

Lemma 9.5. *Se $d > s(s-1)$, sia $d+r = st$, con $0 \leq r < s$. Allora:*

$$g(\Phi_{d,s}) = 1 + \frac{d(d+s^2-4s) - r(s-r)(s-1)}{2s}$$

Dimostrazione. Risulta da un calcolo noioso. □

Osservazione 9.6.

Se $s^2 - 2s + 3 \leq d < s(s-1)$, si può vedere che:

$$g(\Phi_{d,s}) = 1 + \frac{s(s+1)(2s-5)}{6} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+3s-4)}{6} + \frac{\nu(\nu+2s-3)}{2}$$

dove $0 \leq \nu \leq \mu \leq s-3$, $d = s(s+1)/2 + \mu(\mu+1)/2 + \nu$. □

Il risultato che segue è fondamentale:

Proposizione 9.7. *Siano d, σ, s degli interi tali che $\sigma \geq s, d \geq \sigma(\sigma+1)/2$. Sia $\chi \in \mathcal{C}(d, \sigma)$. Allora: $g(\chi) \leq g(\Phi_{d,s})$, con uguaglianza se e solo se $\chi = \Phi_{d,s}$.*

Dimostrazione. Poniamo $\chi = (n_0, \dots, n_{\sigma-1})$, $\Phi = \Phi_{d,s} = (m_0, \dots, m_{s-1})$. Definiamo una funzione $F_\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ nel modo seguente:

$$F_\chi(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & \text{se } x < \sigma \\ \#\{n_i \mid n_i \geq x\} & \text{se } x \geq \sigma \end{cases}$$

Qui $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera. In modo analogo, con s al posto di σ , definiamo $F_\Phi(x)$.

Abbiamo $\int_0^{+\infty} F_\chi(x) dx = \sum_{i=0}^{\sigma-1} (n_i - i) = d$ (guardare il grafico). Inoltre:

$$\int_{n+1}^{+\infty} F_\chi(x) dx = \sum_{i=0}^{\sigma-1} (n_i - i) - (n+1-i)_+ = \sum_{i=0}^{\sigma-1} (n_i - n - 1)_+ - (i - n - 1)_+ = h_\chi(n)$$

Siccome $g(\chi) = \sum_{n \geq 1} h_\chi(n)$, ci basta mostrare $h_\chi(n) \leq h_\Phi(n)$, per ogni n .
Ossia $\int_{n+1}^{+\infty} (F_\Phi - F_\chi)(x) dx \geq 0$, per $n \geq 1$.

Osserviamo che esiste x_0 tale che, se $x \leq x_0$, $(F_\Phi - F_\chi)(x) \leq 0$, mentre se $x > x_0$, $(F_\Phi - F_\chi)(x) \geq 0$. Infatti:

- i) se $x < s$, chiaramente $F_\Phi(x) = F_\chi(x)$
- ii) se $s \leq n < \sigma$: $F_\chi(n) = n + 1$, mentre $F_\Phi(n) = \#\{m_i \mid m_i \geq n\} \leq s \leq n < F_\chi(n)$
- iii) sia $n \geq \sigma + 1$; se $F_\Phi(n) > F_\chi(n)$, allora $F_\Phi(x) \geq F_\chi(x)$, per $x \geq n$.

Infatti sia $F_\Phi(n) = \#\{m_i \mid m_i \geq n\} =: a + 1$, $F_\chi(n) = \#\{n_j \mid n_j \geq n\} =: b + 1$. Abbiamo $m_0 \geq \dots \geq m_a \geq n$ e $m_{a+1} < n$; $n_0 \geq \dots \geq n_b \geq n$ e $n_{b+1} < n$. Quindi $m_a \geq n > n_{b+1}$, ma $a > b$ implica $n_{b+1} \geq n_a$, pertanto $m_a > n_a$. Segue che $n_k \leq m_k$ per $k \leq a$ (il carattere massimale "scende alla velocità massima"). Quindi $F_\Phi - F_\chi$ è prima negativa e poi positiva. Siccome $\int_0^{+\infty} (F_\Phi - F_\chi)(x) dx = 0$ ($\deg \Phi = \deg \chi$), abbiamo $\int_{n+1}^{+\infty} (F_\Phi - F_\chi)(x) dx \geq 0$.

Finalmente se $\chi \neq \Phi$, esiste $p \leq s - 1$ tale che $n_p < m_p$. Infatti altrimenti $d = \sum_{i=0}^{\sigma-1} (n_i - i) \geq \sum_{i=0}^{s-1} (n_i - i) \geq \sum_{i=0}^{s-1} (m_i - i) = d$, implica $\sigma = s$, e per massimalità di Φ l'esistenza di p è chiara. Abbiamo $F_\Phi(n_p + 1) = \#\{m_i \mid m_i \geq n_p + 1\} \geq p + 1$, mentre $F_\chi(n_p + 1) = \#\{n_i \mid n_i \geq n_p + 1\} \leq p$. Quindi $(F_\Phi - F_\chi)(n_p + 1) \geq 1$ e $\int_{n_p+1}^{+\infty} (F_\Phi - F_\chi)(x) dx > 0$. $\square$

Una prima conseguenza notevole della Proposizione 9.7:

Definizione 9.8. Sia $G_{CM}(d, s) := \max \{g(C) \mid C \subset \mathbb{P}^3 \text{ è una curva proiettivamente normale, di grado } d, \text{ con } h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0\}$.

Corollario 9.9. Abbiamo $G_{CM}(d, s) \leq g(\Phi_{d,s})$.

Dimostrazione. Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ proiettivamente normale, di grado d , con $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$. Quindi se $s(C) = \min \{k \mid h^0(\mathcal{I}_C(k)) \neq 0\}$, $s(C) \geq s$. Siccome C è proiettivamente normale $\chi(C)$ ha lunghezza $s(C)$. La Proposizione 9.7 implica $g(\chi(C)) \leq g(\Phi_{d,s})$. Quindi (Lemma 8.8): $g(C) = g(\chi(C)) \leq g(\Phi_{d,s})$. $\square$

Sfortunatamente $G_{CM}(d, s) \neq G(d, s)$ in generale...

Esercizi.

Esercizio 71 Dimostrare il Lemma 9.3.

Esercizio 72 Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di punti intersezione completa di tipo (t, s) , $t \geq s$. Mostrare che $\chi(X) = (t + s - 1, t + s - 2, \dots, t)$.

Viceversa se $\chi(X) = (t + s - 1, t + s - 2, \dots, t)$ e se X è contenuto in una curva irriducibile di grado s , allora X è intersezione completa di tipo (t, s) .

Esercizio 73 Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva proiettivamente normale di grado d . Si assume $h^0(\mathcal{I}_C(1)) = 0$ e $d \leq 9$. Mostrare che $g(C) \in \{0, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12\}$.

9.2 Curve proiettivamente normali, il lifting problem.

Il teorema delle syzygie di Hilbert afferma che ogni $S = k[x_0, \dots, x_n]$ -modulo graduato, M , finitamente generato ha una risoluzione libera minimale di lunghezza $\leq n$:

$$0 \rightarrow L_t \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $t \leq n$. La dimensione proiettiva, $pd(M)$, è la lunghezza della risoluzione libera minimale (qui $pd(M) = t$). Per il teorema di Auslander-Buchsbaum nel caso graduato:

$$pd(M) + depth(M) = n + 1$$

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un sotto schema chiuso e consideriamo il modulo $A(X) = S/\mathbb{I}(X)$. Chiaramente $pd(\mathbb{I}(X)) = pd(A(X)) - 1$. Siccome possiamo sempre trovare un iperpiano non contenente alcuna componente irriducibile di X , $depth(A(X)) \geq 1$, quindi $pd(\mathbb{I}(X)) \leq n - 1$.

Per esempio se $X \subset \mathbb{P}^2$ è un sotto schema chiuso di codimensione due, allora $pd(\mathbb{I}(X)) \leq 1$, e quindi $pd(\mathbb{I}(X)) = 1$ (ritroviamo così il fatto che $A(X)$ è Cohen-Macaulay). La risoluzione libera minimale di $\mathbb{I}(X)$ è della forma:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r S(-b_j) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+1} S(-a_i) \rightarrow \mathbb{I}(X) \rightarrow 0$$

I numeri b_j, a_i si chiamano i numeri di Betti di X .

Se $C \subset \mathbb{P}^3$ è una curva, allora $1 \leq pd(\mathbb{I}(C)) \leq 2$. Nel primo caso:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r S(-b_j) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+1} S(-a_i) \rightarrow \mathbb{I}(C) \rightarrow 0$$

Nel secondo caso:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_3} S(-a_{i3}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_2} S(-a_{i2}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_1} S(-a_{i1}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{I}(C) \rightarrow 0$$

In questo caso se $E = Ker(\psi)$, $\mathcal{E} = E^\sim$ è localmente libero, con $H_*^1(\mathcal{E}) = 0$. Se C non è proiettivamente normale $H_*^2(\mathcal{E}) \neq 0$. Viceversa si può mostrare (teorema di Horrocks) che se $H_*^2(\mathcal{E}) = 0$, allora $\mathcal{E}$ è somma diretta di fibrati in rette (cosa impossibile se $pd(\mathbb{I}(C)) = 2$). Nel primo caso invece $H_*^1(\mathcal{I}_C) = 0$ e C è proiettivamente normale. In conclusione: siamo nel primo caso se e solo se C è proiettivamente normale (d'altronde questo è equivalente alla "vera" definizione: $A(C)$ è Cohen-Macaulay e C è liscia).

Se $C \subset \mathbb{P}^3$ è proiettivamente normale, la risoluzione libera minimale fornisce:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}(-b_j) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+1} \mathcal{O}(-a_i) \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$$

Tensorizzando con $\mathcal{O}_H$ viene:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_H(-b_j) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+1} \mathcal{O}_H(-a_i) \rightarrow \mathcal{I}_{C \cap H} \rightarrow 0$$

Vediamo che la risoluzione libera di $C \cap H$ è la restrizione a H di quella di C .

Osserviamo che se $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ è un insieme di punti, la risoluzione libera minimale di $\mathbb{I}(\Gamma)$ determina la funzione di Hilbert e quindi il carattere numerico. Il viceversa non è vero: la funzione di Hilbert non determina (numericamente) la risoluzione libera minimale (Esercizio 75).

Per riassumere:

Proposizione 9.10. *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva non singolare, irriducibile, sghemba. Sono equivalenti:*

- 1) $H_*^1(\mathcal{I}_C) = 0$, cioè C è proiettivamente normale.
- 2) La risoluzione libera minimale di $\mathbb{I}(C)$ ha lunghezza uno ed è la stessa (numericamente, cioè ha gli stessi numeri di Betti) di quella di $C \cap H$.

Si osserverà che non abbiamo supposto H generico, infatti l'asserto è vero per ogni piano H .

Definizione 9.11. *Per una curva $C \subset \mathbb{P}^3$ si pone $s(C) = \min \{k \mid h^0(\mathcal{I}_C(k)) \neq 0\}$ (indice di postulazione), $\sigma(C) = \min \{k \mid h^0(\mathcal{I}_{C \cap H}(k)) \neq 0, H \text{ piano generico}\}$.*

Se C è proiettivamente normale, allora $s(C) = \sigma(C)$. Esistono però delle curve con $s(C) = \sigma(C)$, non proiettivamente normali. Esistono anche delle curve con $\sigma(C) < s(C)$ e questo è il guaio.

Infatti se $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$ e se $\sigma(C) = s(C)$, allora $g(C) \leq g(\Phi_{d,s})$ (stessa dimostrazione del Corollario 9.9).

Dobbiamo quindi cercare qualche informazione su $\sigma(C)$. Questo torna a vedere quand'è che una curva piana contenente la sezione piana generica si "solleva" a una superficie contenente la curva (da cui il nome di *lifting problem*).

Se $\sigma(C) = 1$, allora chiaramente $s(C) = 1$. Se $\sigma(C) = 2$, non è necessariamente vero che C sia contenuta in una quadrica. Per esempio se C è una quintica ellittica, $\sigma(C) = 2$, ma $h^0(\mathcal{I}_C(2)) = 0$. Ci sono altri contr'esempi di grado > 5 , di grado arbitrariamente grande?

Per $\sigma = 2$, è possibile, con metodi "elementari" mostrare che non ci sono contr'esempi di grado arbitrariamente grande:

Lemma 9.12. *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile, di grado d . Se $d > 10$ e $\sigma(C) = 2$, allora $h^0(\mathcal{I}_C(2)) \neq 0$.*

Dimostrazione. Abbiamo $h^0(\mathcal{I}_{C \cap H, H}(2)) \neq 0$ per ogni piano H . Siccome $d > 6$, C ha una trisecante L , quindi $\#(L \cap C) = r \geq 3$. Se $L \subset H$, ogni conica, $K \subset H$, contenente $C \cap H$, interseca L in ≥ 3 punti e quindi contiene L , quindi $K = L \cup R_H$, con $\#(R_H \cap C) = d - r$.

Se $d - r = 2$, allora C ha infinite $d - 2$ secanti. Se due tali $d - 2$ secanti s'intersecano, abbiamo un piano contenente $\geq 2d - 5$ punti di C . Siccome $d > 5$, C è piana: assurdo. Se queste $d - 2$ -secanti sono due a due disgiunte, sia Q una quadrica liscia contenente tre di queste $d - 2$ -secanti (Esercizio 76), allora $\#(C \cap Q) \geq 3(d - 2)$. Siccome $3d - 6 > 2d$, $C \subset Q$.

Possiamo quindi assumere che esiste una conica K contenente $C \cap H$, della forma $K = L \cup R$, con $\#(C \cap L) = r$, $\#(C \cap R) = d - r$, con $d - r \geq r \geq 3$. Quindi $r \leq d/2$.

Consideriamo il fascio di piani per L . Se H è un piano del fascio $C \cap H \subset L \cup R_H$, con $\#(C \cap R_H) = d - r$. Otteniamo così una famiglia, $\mathcal{F}$, ∞^1 di rette R_H . Sia S_L la superficie ottenuta prendendo la chiusura di $\mathcal{F}$.

Se $r < \lfloor d/2 \rfloor$ (parte intera), le rette R_H sono due a due disgiunte. Infatti altrimenti si avrebbe un piano $(\langle R_H, R_{H'} \rangle)$ contenente $\geq 2(d - r) - 1 > d$ punti di C . In questo caso possiamo quindi trovare tre rette R_H due a due sghembe. Sia Q la quadrica liscia contenente queste tre rette. La retta L incontra ogni retta R_H quindi $\#(L \cap Q) \geq 3$, ossia $L \subset Q$. Quindi $\#(C \cap Q) \geq 3(d - r) + r$. Abbiamo $3d - 2r > 2d \Leftrightarrow d/2 > r$ e quindi $(r < \lfloor d/2 \rfloor)$, $C \subset Q$.

Siamo rimasti col caso $r = \lfloor d/2 \rfloor$.

Le rette R_H non passano tutte per uno stesso punto di L . Infatti se $p \in R_H \cap L, \forall H$, allora sia Π un piano generico e sia $\{q_1, \dots, q_d\} = C \cap \Pi$. Sia $X \subset \Pi$ la conica contenente $C \cap \Pi$. Il piano $H_{q_i} = \langle L, q_i \rangle$ appartiene al fascio, e la sua retta $R_{H_{q_i}} = [q_i, p]$. Il cono quadrico di vertice p base X contiene d rette di tipo R_H . Quindi C incontra il cono quadrico in $\geq d(d - r - 1) + 1$ punti. Siccome $d(d - r - 1) + 1 > 2d$, C è contenuta nel cono.

Questo mostra che $L \subset S_L$. Quindi S_L è una superficie rigata razionale. Tutto il problema sta nel vedere che S_L è liscia lungo L . Infatti se $H = \langle L, R_H \rangle$, il supporto di $S_L \cap H$ è $L \cup R_H$, quindi $S_L \cap H = mL \cup R_H$, dove m è la molteplicità di L per S_L (S_L è genericamente liscia lungo R_H generica). Quindi $\deg S_L = m + 1$ e per un punto generico di L passano m rette R_H .

Per un punto generico $p \in L$ passano al più quattro rette R_H (cioè $m \leq 4$). Infatti se ne passano cinque, sia Π un piano generico e sia $X \subset \Pi$ una conica passante per i cinque punti intersezione delle rette con Π . Allora il

cono quadrico di vertice p , base X contiene $\geq 5(d-r)$ punti di C . Siccome $5(d-r) > 2d$, C è contenuta nel cono.

Possiamo quindi assumere $\deg S_L \leq 5$. Sia Π un piano generico. Se $\deg S_L > 2$, $C \cap H$ è contenuto in $(S_L \cap H) \cap X$, dove X è una conica. Siccome possiamo assumere $S_L \cap H$ e X irriducibili, viene $d \leq 10$. $\square$

In realtà abbiamo un risultato molto più preciso e generale:

Teorema 9.13. (Laudal-Gruson-Peskine)

Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva integra di grado d . Sia $\sigma := \sigma(C)$. Se $d > \sigma^2 + 1$, allora $h^0(\mathcal{I}_C(\sigma)) \neq 0$ (e quindi $\sigma = s(C)$).

Una formulazione equivalente: se $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$ e se $d > s^2 - 2s + 2$, allora $\sigma(C) \geq s$ (fare $\sigma = s-1$ nel teorema). In questa forma il Teorema è stato prima dimostrato da Laudal (1978) sotto l'ipotesi $d > s(s-1)$. Il miglioramento successivo è dovuto a Gruson-Peskine (1982). Il risultato è ottimale: per ogni $d = s^2 - 2s + 2$, esistono delle curve di grado d , C , con $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$ e $\sigma(C) < s$. La dimostrazione è piuttosto impegnativa e quindi la salteremo.

Proposizione 9.14. *Se $d > s^2 - 2s + 2$, allora $G(d, s) \leq g(\Phi_{d,s})$.*

Dimostrazione. Sia C una curva di grado d con $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$. Abbiamo: $g(C) \leq g(\chi(C))$. Siccome $d > s^2 - 2s + 2$, per il Teorema 9.13, $\sigma(C) \geq s$. Quindi per la Proposizione 9.7: $g(\chi(C)) \leq g(\Phi_{d,s})$. $\square$

Per concludere rimane da trovare delle curve di grado d , genere $g(\Phi_{d,s})$, non contenute in una superficie di grado $< s$.

Esercizi.

Esercizio 74 Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ un insieme di d punti contenuti in una conica liscia. Se d è pari, X è intersezione completa $(2, d/2)$ e X è contenuto in una curva liscia di grado $d/2$. Se $d = 2m + 1$, X è contenuto in una curva liscia di grado $m + 1$.

Esercizio 75 Determinare tutti i caratteri numerici possibili per un insieme $X \subset \mathbb{P}^2$ di quattro punti. Determinare tutte le possibili risoluzioni libere minimale di $\mathbb{I}(X)$. Concludere che la funzione di Hilbert non determina i numeri di Betti della risoluzione libera minimale di $\mathbb{I}(X)$.

Esercizio 76 Sia $X \subset \mathbb{P}^3$, $X = L_1 \sqcup L_2 \sqcup L_3$, l'unione di tre rette sghembe. Mostrare che esiste una ed un'unica quadrica, Q , contenente X . Osservare che Q è necessariamente liscia.

Sia $Y \subset \mathbb{P}^3$ l'unione di quattro rette sghembe. Mostrare che Y ha due 4-secanti (una quadri-secante è una retta L , $L \not\subset Y$ che incontra Y in ≥ 4 punti).

9.3 La liaison.

La liaison (*linkage* in inglese) è un metodo classico e potente per studiare le curve.

Definizione 9.15. *Sia $C, C' \subset \mathbb{P}^3$ due curve senza componenti comuni tali che (come schemi): $Z = C \cup C'$ sia un'intersezione completa, cioè $\mathbb{I}(Z) = (S_a, S_b)$. In questa situazione si dice che C e C' sono geometricamente legate dall'intersezione completa $Z = S_a \cap S_b$.*

Se C e C' sono geometricamente legate allora $\mathbb{I}(C) \cap \mathbb{I}(C') = (S_a, S_b)$. Inoltre chiaramente: $\deg C + \deg C' = ab$, dove a, b sono i gradi di S_a, S_b . Se C è liscia questo significa che S_a e S_b sono genericamente (fuori dai punti di $C \cap C'$) lisce e trasversali lungo C ($T_x(S_a) \cap T_x(S_b) = T_x C$ nei punti di $C \setminus (C \cap C')$). Viceversa se F, G sono due superfici genericamente lisce e trasversali lungo C , allora $F \cap G$ lega geometricamente C ad una curva C' . In generale però la curva C' può essere singolare, riducibile, addirittura non ridotta. Siamo alla ricerca di un criterio che garantisca che la legata è liscia.

Lemma 9.16. ($ch(k) = 0$)

Sia E un fibrato di rango r sulla varietà liscia X . Sia $V \subset H^0(E)$ che genera E (cioè il morfismo di valutazione: $V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow E$ è suriettivo). Se $s \in V$ è sufficientemente generale, allora $(s)_0$ è liscio, di codimensione r . In particolare se $r > \dim X$, $(s)_0$ è vuoto.

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo:

$$0 \rightarrow K \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow E \rightarrow 0$$

dove K è localmente libero di rango $n+1-r$ ($n+1 = \dim V$). Possiamo pensare a K come a un fibrato vettoriale, il cui spazio totale è descritto da $K = \{(x, s) \mid s(x) = 0\}$ (per x fissato questa è la fibra ridotta $K(x)$). Passando ai proiettivi (s e λs hanno lo stesso luogo degli zeri), abbiamo $\mathbb{P}(K) \rightarrow \mathbb{P}(V) \times X$. Componendo con la proiezione su $\mathbb{P}(V)$ otteniamo $f : \mathbb{P}(K) \rightarrow \mathbb{P}(V)$. Siccome X è liscia $\mathbb{P}(K)$ è non singolare. Inoltre $\dim \mathbb{P}(K) = \dim X + n - r$. Osserviamo che $f^{-1}([s]) \simeq (s)_0$. Per il teorema di liscità generica, esiste un aperto $U \subset \mathbb{P}(V)$, tale che $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$ sia liscio. Quindi se $[s] \in U$, $(s)_0$ è liscio, di dimensione $\dim X - r$. $\square$

Questo lemma (dovuto a Serre) fornisce un metodo potente per costruire sotto varietà lisce; funziona però solo in caratteristica zero.

Lemma 9.17. *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia. Supponiamo $\mathcal{I}_C(m)$ generato dalle sezioni globali.*

- 1) la generica superficie in $H^0(\mathcal{I}_C(k))$, $k \geq m$ è liscia.
 2) Se F, G sono due superfici generali di gradi $k, t \geq m$ contenenti C , allora $F \cap G$ lega geometricamente C a una curva liscia.

Dimostrazione. 1) Per ipotesi il morfismo $H^0(\mathcal{I}_C(m)) \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{I}_C(m)$ è suriettivo. Questo significa (infatti è equivalente) che C è l'intersezione schematica delle superfici di grado m che la contengono. In particolare $\mathcal{I}_C(k)$ è generato dalle sezioni globali per $k \geq m$. Quindi il luogo base del sistema lineare (su $\mathbb{P}^3$) $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{I}_C(k)))$ è C . Per il teorema di Bertini (nella forma generale), la generica superficie di grado k è liscia fuori da C .

Se $C \subset S$, abbiamo $\mathcal{O}(-m) = \mathcal{I}_S \rightarrow \mathcal{I}_C$. Tensorizzando per $\mathcal{O}_C(m)$, otteniamo: $\mathcal{O}_C \xrightarrow{s} \mathcal{I}_C(m) \otimes \mathcal{O}_C \simeq \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2(m) = N_C^*(m)$. Quindi l'inclusione $C \subset S$ fornisce una sezione del fibrato conormale twistato. Questa sezione si annulla precisamente in $C \cap \text{Sing}(S)$ (considerare $\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2$).

Se $\mathcal{I}_C(k)$ è generato dalle sezioni globali, la successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C^2(k) \rightarrow \mathcal{I}_C(k) \rightarrow N_C^*(k) \rightarrow 0$$

mostra che $V = H^0(\mathcal{I}_C(k))$ genera il fibrato $N_C^*(k)$. Siccome N_C^* è un fibrato di rango due su una curva, il Lemma 9.16 implica che per $F \in H^0(\mathcal{I}_C(k))$ generale, la sezione corrispondente di $N_C^*(k)$ non si annulla mai, ossia che F è liscia lungo C . In conclusione se $\mathcal{I}_C(k)$ è generato dalle sezioni globali, la generica superficie di grado k contenente C è liscia dappertutto.

2) Sia F una superficie liscia di grado k contenente C . Abbiamo la successione esatta: $0 \rightarrow \mathcal{I}_F \simeq \mathcal{O}(-k) \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{I}_{C,F} \rightarrow 0$. Sia $t \geq m$, allora $\mathcal{I}_{C,F}(t) = \mathcal{O}_F(-C + tH)$ è localmente libero di rango uno, generato dalle sezioni globali (è un quoziente di $\mathcal{I}_C(t)$). Quindi il sistema lineare (su F), $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{I}_{C,F}(t))) = |tH - C|$ è senza punti base. Per Bertini la generica curva $C' \in |tH - C|$ è liscia. Il sistema $|tH - C|$ è segato su F dalle superfici di grado t contenenti C . Infatti abbiamo:

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}(-k + t)) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(t)) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_{C,F}(t)) \rightarrow 0$$

Quindi per $G \in H^0(\mathcal{I}_C(t))$ generale, $G \cap F = C \cup C'$, con C' liscia (la liaison è geometrica perché $|tH - C|$ è senza punti base). $\square$

Siano C, X due curve geometricamente legate dall'intersezione completa U , di tipo (a, b) . Per quanto riguarda i gradi, sappiamo che $d_C + d_X = ab$. Vogliamo calcolare il genere di X in funzione di $g(C), a, b$.

Siano I_U, I_C, I_X gli ideali di definizione di U, C, X . Abbiamo $I_U = I_C \cap I_X$. Inoltre (Esercizio 78): $I_X = (I_U : I_C) = \{P \in S \mid P.I_C \subset I_U\}$. Nello stesso modo: $I_C = (I_U : I_X)$.

Siccome $(I_U : I_C)/I_U \simeq \text{Hom}_S(S/I_C, S/I_U)$ (Esercizio 78), segue che $\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_U = \mathcal{I}_{X,U} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_U)$.

Per calcolare $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_U)$ consideriamo la successione: $0 \rightarrow \mathcal{I}_U \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow 0$, e applichiamo $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C, -)$, viene:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_U) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}_U) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

Adesso usiamo il fatto che se $X \subset \mathbb{P}^n$ è un sotto schema chiuso, di codimensione pura r (cioè X è equi-dimensionale) allora $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}) = 0$ se $i < r$, mentre $\mathcal{E}xt^r(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^n}) = \omega_X$, dove ω_X è il fascio dualizzante di X ([15], III, Lemma 7.3, 7.4). Segue che $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_U) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}_U)$.

Per calcolare questo ultimo fascio, applichiamo $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C, -)$ alla successione $0 \rightarrow \mathcal{O}(-a-b) \rightarrow \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \rightarrow \mathcal{I}_U \rightarrow 0$. Otteniamo:

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{L}_0) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}_U) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{L}_1) \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{L}_0)$$

dove $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b)$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}(-a-b)$. Per quanto detto prima, $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{L}_0) = 0$. D'altra parte il morfismo ψ , indotto da $\mathcal{O}(-a-b) \rightarrow \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) : F \rightarrow (S_b F, -S_a F)$ è nullo su U , quindi annulla ogni $\mathcal{O}_U$ -modulo, ossia $\psi = 0$ e $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}_U) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}(-a-b)) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}(-4)) \otimes \mathcal{O}(4-a-b) = \omega_C(4-a-b)$ ([15], III Prop. 6.7). In conclusione:

Proposizione 9.18. (Successione esatta di liaison)

Se C, X sono due curve geometricamente legate da un intersezione completa U , di tipo (a, b) , abbiamo: $\mathcal{I}_{X,U} = \omega_C(4-a-b)$ e quindi abbiamo una successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_U \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \omega_C(4-a-b) \rightarrow 0 \quad (9.1)$$

Dimostrazione. Segue da quanto precede, visto che:

$$\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_U = \mathcal{I}_{X,U} = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_U) \simeq \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}_U) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}(-a-b)) = \omega_C(4-a-b). \quad \square$$

La successione di liaison ha un significato geometrico interessante: abbiamo $\mathcal{I}_{X,U} \simeq \mathcal{O}_C(-\Delta)$, dove $\Delta = C \cap X$ (le funzioni su U che si annullano su X sono le funzioni su C che si annullano su $C \cap X$). Se prendiamo la coomologia in (9.1) abbiamo: $\rightarrow H^0(\mathcal{I}_X(m)) \xrightarrow{r} H^0(\omega_C(m+4-a-b)) \rightarrow 0$ (osservare che $h^1(\mathcal{I}_U(m)) = 0$). Sia $F \in H^0(\mathcal{I}_X(m))$. Se $C \subset F$, F contiene U e $r(F) = 0$. Se $C \not\subset F$, F sega su C un divisore, D . Questo divisore contiene Δ : $D = \Delta + D'$. Abbiamo $\mathcal{O}_C(D') = \mathcal{O}_C(-\Delta + mH) \simeq \omega_C(m+4-a-b)$.

Quindi, le superfici di grado m contenenti X , segano su C , residualmente a Δ , il sistema lineare completo $|H^0(\omega_C(m+4-a-b))|$.

Corollario 9.19. *Se C, C' sono due curve lisce, di grado d, d' geometricamente legate da un'intersezione completa di tipo (a, b) , allora:*

$$d + d' = ab, \quad g(C) - g(C') = \frac{(d - d')(a + b - 4)}{2}$$

Dimostrazione. Prendendo la coomologia in (9.1) per $m \gg 0$, abbiamo: $h^0(\mathcal{I}_C(m)) = h^0(\mathcal{I}_U(m)) + h^0(\omega_{C'}(m + 4 - a - b))$ (*). Adesso $h^0(\mathcal{I}_C(m)) = h^0(\mathcal{O}(m)) - h^0(\mathcal{O}_C(m))$ (perché $h^1(\mathcal{I}_C(m)) = 0$ se $m \gg 0$). D'altra parte, per Riemann-Roch: $h^0(\mathcal{O}_C(m)) = dm - g + 1$. Nello stesso modo (usando la successione di un'intersezione completa): $h^0(\mathcal{I}_U(m)) = h^0(\mathcal{O}(m)) - (abm - g_U + 1)$, dove $g_U = 1 + \frac{ab(a + b - 4)}{2}$ (Esercizio 58, 77). Finalmente $h^0(\omega_{C'}(m + 4 - a - b)) = d'(m + 4 - a - b) + 2g' - 2 - g' + 1$, per Riemann-Roch. Quindi (*) fornisce l'uguaglianza di due polinomi di grado uno in m . Uguagliando i coefficienti, si trovano le relazioni cercate. $\square$

Osservazione 9.20. (La liaison algebrica)

Abbiamo discusso della liaison geometrica di curve lisce. In realtà si ha una teoria più generale: sia $C \subset U$ dove U è un'intersezione completa di tipo (a, b) . Vogliamo definire la legata *algebrica*, X , (o curva residua a C) in U . Viene voglia di porre $\mathcal{I}_X := (\mathcal{I}_U : \mathcal{I}_C)$. Vogliamo anche che C sia la legata a X (cioè $\mathcal{I}_C = (\mathcal{I}_U : \mathcal{I}_X)$). Si può mostrare che se C è *localmente Cohen-Macaulay* (cioè tutti gli anelli locali $\mathcal{O}_{C,x}$ sono Cohen-Macaulay), allora X è ben definita, è anch'essa localmente Cohen-Macaulay e la sua legata è C . In questa situazione più generale C e X possono avere componenti irriducibili comuni (Esercizio 79).

Con la liaison algebrica abbiamo ancora la successione di liaison (9.1) e le relazioni del Corollario 9.19 sono valide (con $g(C) = p_a(C) := 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$). Finalmente si può anche dimostrare che: $h^1(\mathcal{I}_C(m)) = h^1(\mathcal{I}_X(a + b - 4 - m))$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. In particolare: C è a.C.M. $\Leftrightarrow X$ è a.C.M. $\square$

Possiamo finalmente dimostrare il nostro teorema:

Teorema 9.21. *Siano d, s due interi con $s \geq 2$, $d > s(s - 1)$. Sia $d + r = ts$, $0 \leq r \leq s - 1$. Allora:*

$$G(d, s) = g(\Phi_{d,s}) = 1 + \frac{d(d + s^2 - 4s) - r(s - r)(s - 1)}{2s}$$

Inoltre ogni curva C , di grado d , genere $G(d, s)$, con $h^0(\mathcal{I}_C(s - 1)) = 0$, è legata a una curva piana di grado r da un'intersezione completa di tipo (s, t) .

Dimostrazione. Sia X una curva piana di grado r (se $r = 0$, $X = \emptyset$ e C è intersezione completa (s, t)). Siccome $s, t \geq s > r$, $\mathcal{I}_X(m)$ è generato dalle sezioni

globali se $m \geq s$. Per il Lemma 9.17 possiamo legare X a una curva liscia, C , con un'intersezione completa (s, t) . La curva C è irriducibile ($h^1(\mathcal{I}_C) = 0$ per l'Osservazione 9.20, in effetti C è a.C.M.). Abbiamo la successione di liaison:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_U(s-1) \rightarrow \mathcal{I}_C(s-1) \rightarrow \omega_X(3-t) \rightarrow 0$$

Siccome X è piana $\omega_X = \mathcal{O}_X(r-3)$. Quindi $h^0(\omega_X(3-t)) = h^0(\mathcal{O}_X(r-t)) = 0$. Segue che $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$.

Il grado e il genere di C sono quelli cercati per il Corollario 9.19.

Viceversa sia C che realizza $G(d, s)$, cioè $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$, $\deg C = d$, $g(C) = G(d, s)$. Per il Teorema 9.13 $\sigma(C) \geq s$. Abbiamo $g(\Phi_{d,s}) = g(C) \leq g(\chi(C)) \leq g(\Phi_{d,s})$. Quindi $\chi(C) = \Phi_{d,s}$ (Proposizione 9.7) e C è a.C.M. Il carattere $\Phi_{d,s}$ mostra che $C \cap H$ è contenuto in un'intersezione completa (s, t) . Quindi anche C è contenuta in una intersezione completa U di tipo (s, t) . Sia X la curva legata. La successione di liaison fornisce:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_U(1) \rightarrow \mathcal{I}_X(1) \rightarrow \omega_C(5-s-t) \rightarrow 0$$

Abbiamo $h^0(\omega_C(5-s-t)) = h^1(\mathcal{O}_C(s+t-5)) \neq 0$ (Esercizio 82), quindi X è piana. $\square$

Per $s^2 - 2s + 2 < d < s(s-1)$, sappiamo che $G(d, s) \leq g(\Phi_{d,s})$ (Proposizione 9.14), ma la costruzione di curve con $g = g(\Phi_{d,s})$, grado d , non contenute in una superficie di grado $< s$ è più difficile. In particolare non c'è una caratterizzazione delle curve che realizzano $G(d, s)$ così gradevole come nel caso $d > s(s-1)$. La questione si risolve con il seguente risultato:

Teorema 9.22. *Sia χ un carattere connesso di grado d , lunghezza s . Allora esiste una curva proiettivamente normale (quindi liscia, irriducibile) $C \subset \mathbb{P}^3$, con $\chi(C) = \chi$.*

Dimostrazione. Vedere [11]. $\square$

Corollario 9.23. *Per $d > s^2 - 2s + 2$, $G(d, s) = g(\Phi_{d,s})$ e ogni curva che realizza $G(d, s)$ è aritmeticamente normale, contenuta in una superficie di grado s .*

Questo risolve il problema del $G(d, s)$ per $d > s^2 - 2s + 2$, cioè quando d è grande rispetto a s . Se d è piccolo rispetto a s abbiamo:

Lemma 9.24. *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile, di grado d , genere g . Se $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$, allora $d \geq (s^2 + 4s + 6)/6$. Inoltre se $h^1(\mathcal{O}_C(s-1)) \neq 0$, allora $d \geq (s^2 + 4s + 6)/3$.*

Dimostrazione. Abbiamo $h^0(\mathcal{O}(s-1)) \leq h^0(\mathcal{O}_C(s-1)) = d(s-1) - g + 1 + h^1(\mathcal{O}_C(s-1))$.

Supponiamo $h^1(\mathcal{O}_C(s-1)) = 0$. In questo caso $g \leq d(s-1) - h^0(\mathcal{O}(s-1)) + 1$. Siccome $g \geq 0$, viene: $h^0(\mathcal{O}(s-1)) - 1 \leq d(s-1)$, ossia: $(s-1)(s^2+4s+6)/6 \leq d(s-1)$ e il risultato segue.

Supponiamo $h^1(\mathcal{O}_C(s-1)) \neq 0$. Per il Lemma di Clifford (Esercizio 84), $h^0(\mathcal{O}_C(s-1)) \leq d(s-1)/2 + 1$. Il calcolo precedente mostra che $d \geq (s^2 + 4s + 6)/3$. $\square$

Corollario 9.25. *Siano $d \geq 3, s \geq 2$ degli interi.*

1) *Se $d < (s^2 + 4s + 6)/6$, ogni curva liscia irriducibile di grado d , C , verifica $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) \neq 0$ ($G(d, s)$ non è definito).*

2) *Se $(s^2 + 4s + 6)/6 \leq d < (s^2 + 4s + 6)/3$, ogni curva liscia, irriducibile, C , con $h^0(\mathcal{I}_C(s-1)) = 0$ verifica $h^1(\mathcal{O}_C(s-1)) = 0$ e si ha:*

$$g(C) \leq G(d, s) \leq G_A(d, s) := d(s-1) - \binom{s+2}{3} + 1.$$

Abbiamo quindi il Range $\emptyset$: $d < (s^2 + 4s + 6)/6$, dove il problema del $G(d, s)$ non si pone.

Nel Range A $((s^2 + 4s + 6)/6 \leq d < (s^2 + 4s + 6)/3)$, abbiamo $G(d, s) \leq G_A(d, s)$ e si pensa che questa sia sempre un'uguaglianza.

Nel Range C ($d > s^2 - 2s + 2$, come abbiamo visto, $G(d, s)$ è noto).

L'intervallo intermedio (Range B: $(s^2 + 4s + 6)/3 \leq d \leq s^2 - 2s + 2$) è quello più difficile. Si ha una minorazione $G(d, s) \geq G_B(d, s)$ e si congettura che si abbia uguaglianza.

FINE.

Esercizi.

Esercizio 77 *Un sotto schema chiuso X di una varietà liscia Y è localmente intersezione completa se $\mathcal{I}_{X,Y}$ può essere localmente generato da $\text{codim}(X, Y)$ elementi.*

- 1) *Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, mostrare che C è l.i.c. (localmente intersezione completa). (Più generalmente ogni sotto varietà liscia di $\mathbb{P}^n$ è l.i.c.).*
- 2) *Se $X \subset \mathbb{P}^3$ è una curva (sotto schema chiuso di equi-dimensionale, di dimensione uno) l.i.c., allora $\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2$ è un $\mathcal{O}_X$ -modulo localmente libero di rango due.*
- 3) *Se X (come in 2) è intersezione completa, allora $\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \simeq \mathcal{O}_X(-a) \oplus \mathcal{O}_X(-b)$ (tensorizzare la successione dell'intersezione completa con $\mathcal{O}_X$). Inoltre $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(a+b-4)$ (dualizzare la successione dell'intersezione completa e poi restringerla a X).*

Esercizio 78 *Siano $C, X \subset \mathbb{P}^3$ due curve geometricamente legate dall'intersezione completa U . Sia $S = k[x_0, \dots, x_3]$ e siano I_X, I_C, I_U gli ideali omogenei di X, C, U . Dimostrare che $I_X = (I_U : I_C)$ e che $I_C = (I_U : I_X)$. Mostrare inoltre che $(I_U : I_C)/I_U = \text{Hom}_S(S/I_C, S/I_U)$.*

Esercizio 79 1) *Sia $R \subset \mathbb{P}^3$ la retta di equazioni $x_0 = x_1 = 0$. Sia Q la quadrica di equazione $x_0^2 = 0$ e sia Q' la quadrica di equazione $x_1^2 = 0$. Determinare la legata algebrica a R nell'intersezione completa $Q \cap Q'$.*
 2) *Sia $X = R \cup p$, dove R è sempre la retta di equazioni $x_0 = x_1 = 0$ e dove p è il punto $(1 : 0 : 0 : 0)$. Abbiamo $\dim X = 1$, quindi X è una curva. Sia H il piano $x_1 = 0$ e sia Q la quadrica di equazione $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$. Determinare la curva, Y , legata a X nell'intersezione completa $H \cap Q$. Verificare che la legata a Y nell'intersezione completa $H \cap Q$ non è X . (La liaison non è sensibile alle componenti di dimensione zero, siano esse isolate o immerse. Per avere una buona teoria bisogna restringersi a curve equi-dimensionali, senza componenti immerse, cioè a curve localmente Cohen-Macaulay).*

Esercizio 80 *(Questo esercizio, che non è un esercizio, è per chi ha qualche nozione sulle singolarità delle curve piane e gli scoppiamenti).*

Sia $Q \subset \mathbb{P}^3$ un cono quadrico di vertice v .

- 1) *Sia $p \in Q$, $p \neq v$. Proiettando dal punto p su un piano Π , mostrare che il sistema lineare delle coniche $Q \cap H$ si proiettano nel sistema lineare, δ , delle coniche di Π aventi la stessa tangente, t , in un punto $q \in \Pi$.*
- 2) *Sia $C \subset Q$ una curva liscia, irriducibile, di grado $d = 2m$. Sia C' la curva piana proiezione di C dal punto p (si assume p "generico" rispetto a C , in particolare $p \notin C$). La curva C' ha una singolarità di molteplicità m in q ed è*

liscia fuori da q . In generale C' avrà m rami tutti tangenti a t in q di modo che dopo avere scoppiato q , la trasformata stretta, $\hat{C}$, avrà una singolarità ordinaria di molteplicità m (quindi dopo un ulteriore scoppiamento la curva sarà liscia). Si ammetterà quest'ultimo punto. Aiutandosi con [15], V, Example 3.9.2, concludere che $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - m(m-1)/2 - m(m-1)/2 = (m-1)^2$. Mostrare che C è intersezione completa $(2, m)$.

3) Se $d = 2m + 1$ (quindi $v \in C$), C' avrà, in generale, una singolarità di molteplicità $m + 1$ in q e dopo scoppiamento di q una singolarità ordinaria di molteplicità m . Pertanto $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - m(m+1)/2 - m(m-1)/2 = m(m-1)$. Mostrare che C è proiettivamente normale, legata a una retta da un'intersezione completa $(2, m+1)$. In particolare i (d, g) su un cono quadrico sono un sotto insieme di quelli su una quadrica liscia.

4) Concludere che per ogni $d \geq 5$ esiste una curva C di grado d con $h^0(\mathcal{I}_C(2)) = 0$.

Esercizio 81 Una curva (liscia, irriducibile) $C \subset \mathbb{P}^3$ è auto-legata se C è algebricamente legata a se stessa da un'intersezione completa, X , di tipo (a, b) (C è insiemisticamente intersezione completa, con molteplicità due, geometricamente le due superfici sono genericamente semplicemente tangenti lungo C e la loro intersezione insiemistica è C).

1) Se C è intersezione completa di S e F , allora C è auto-legata da (S^2, F) e da (S, F^2) .

2) Mostrare che esistono infinite curve in $\mathbb{P}^3$ che non sono auto-legate.

3) Mostrare che una quartica razionale non è mai auto-legata.

Esercizio 82 Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva liscia, irriducibile. L'indice di specialità di C è $e(C) = \max \{n \mid h^1(\mathcal{O}_C(n)) \neq 0\}$. Sia $\chi(C) = (n_0, \dots, n_{\sigma-1})$ il carattere numerico di C .

1) Sia $\tau(C) := \max \{n \mid H^1(\mathcal{I}_\Gamma(n)) \neq 0\}$, dove $\Gamma = C \cap H$, H generico. Mostrare che $\tau(C) = n_0 - 2$.

2) Mostrare che $e(C) \leq \tau(C) - 1 = n_0 - 3$, con uguaglianza se C è proiettivamente normale.

Esercizio 83 (Bilinear map lemma)

Siano V, W, E tre k -spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $f : V \times W \rightarrow E$ un'applicazione bi-lineare non degenere (cioè $f(v, w) \neq 0$ se $v \neq 0, w \neq 0$). Mostrare che $\dim E \geq \dim V + \dim W - 1$.

Hint: Abbiamo $f = \varphi \circ p$, dove $p : V \times W \rightarrow V \otimes W : (v, w) \rightarrow v \otimes w$ e dove $\varphi : V \otimes W \rightarrow E$ è lineare. Mostrare che $\text{Im}(p)$ (i tensori decomponibili) è il cono sopra l'immersione di Segre $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V \otimes W) : (\langle v \rangle, \langle w \rangle) \rightarrow \langle v \otimes w \rangle$. Concludere usando [15], I, Prop. 7.1.

Esercizio 84 (Clifford)

Sia D un divisore speciale ($h^1(\mathcal{O}_C(D)) \neq 0$) sulla curva C (liscia, irriducibile). Si tratta di mostrare: $h^0(\mathcal{O}_C(D)) \leq 1 + \frac{\deg D}{2}$.

1) Mostrare che $H^0(\mathcal{O}(D)) \times H^0(\mathcal{O}(K-D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(K))$ è non degenere.

2) Concludere usando il teorema di Riemann-Roch e l'Esercizio 83.

N.B. Questa è una versione parziale del Teorema di Clifford, vedere [15], IV Theorem 5.4.

Parte III

Appendice A.

Morfismi finiti tra curve.

Ricordiamo la definizione:

Definizione 10.1. *Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ è finito se esiste un ricoprimento V_i di Y con aperti affini tale che $U_i = f^{-1}(V_i)$ sia affine e tale che $\mathcal{O}(U_i)$ sia un $\mathcal{O}(V_i)$ -modulo finitamente generato.*

Vedere [15], II, p. 84. Questa definizione è valida sia nell'ambito delle varietà che in quello degli schemi.

Proposizione 10.2. *Un morfismo non costante $f : X \rightarrow Y$ tra due curve proiettive, non sinogolari, irriducibili è un morfismo finito.*

Prima di dimostrare questa proposizione ricordiamo alcuni fatti di algebra. Siano A, B due anelli $A \subset B$. Un elemento $b \in B$ è *intero* su A se b è radice di un polinomio monico a coefficienti in A . L'insieme degli elementi di B interi su A è un sotto anello di B , chiamato la chiusura integrale di A in B . L'anello B è *intero* su A se ogni $b \in B$ è intero su A (cioè B è la chiusura integrale di A in B).

Se A è intero, A è *integralmente chiuso* se è uguale alla sua chiusura integrale in K , il suo campo dei quozienti.

Useremo il seguente risultato ([15], I Thm. 3.9A):

Teorema 10.3. *Sia A un anello intero che è un k -algebra di tipo finito (k un campo). Sia L un'estensione finita di K , il campo dei quozienti di A . Se A' è la chiusura integrale di A in L , allora A' è un A -modulo finitamente generato e una k -algebra di tipo finito.*

Dimostriamo adesso la Proposizione 10.2:

Dimostrazione. Sia $y \in Y$ e sia V un intorno affine di y . Allora $\mathcal{O}(V) \subset k(Y) \subset k(X)$. Sia A la chiusura integrale di $\mathcal{O}(V)$ in $k(X)$. Per il Teorema

10.3, A è un $\mathcal{O}(V)$ -modulo finitamente generato e una k -algebra di tipo finito. Quindi possiamo vedere A come l'anello di una varietà affine $A = \mathcal{O}(U)$, dove U è una curva affine. Siccome il campo dei quozienti di A è $k(X)$, la curva U è birazionale a X , pertanto possiamo identificare U a un aperto affine di X . Per concludere la dimostrazione basta vedere che $f^{-1}(V) = U$.

Sia $y_0 \in V$ e supponiamo che esista $x_0 \notin U$ tale che $f(x_0) = y_0$. Mostriamo che questo conduce ad un assurdo. Indichiamo con $x_1, \dots, x_t$ gli $x \in U$ con $f(x) = y_0$. Possiamo trovare una funzione razionale g su X con $g \notin \mathcal{O}_{x_0}$ ma g regolare in $x_1, \dots, x_t$. Possiamo trovare $h \in \mathcal{O}(V)$ tale che $h(y_0) \neq 0$ e tale che $gh \in \mathcal{O}(U)$. Infatti se g ha un polo in $z \in U$, allora $g_z = v/t_z^m$, dove t_z è un parametro locale. Abbiamo $f(z) = y \neq y_0$. Sia t un parametro locale in y . Allora $f^*t_z = t_z^k$. Sia $h \in \mathcal{O}(V)$ con $h(y_0) \neq 0$ e con $\nu_y(h) = n$, $nk \geq m$, allora gh (cioè $g \cdot (h \circ f)$) è regolare in z .

Quindi $gh \in \mathcal{O}(U) = A$ e pertanto gh è intero su $\mathcal{O}(V)$:

$$(gh)^n + b_1(gh)^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

con $b_i \in \mathcal{O}(V)$. Segue che: $-(gh) = b_1 + \frac{b_2}{gh} + \dots + \frac{b_n}{(gh)^{n-1}}$. Ma gh non è regolare in x_0 perché g non lo è e $h(x_0) \neq 0$. Questo implica che $1/gh$ è regolare in x_0 . Quindi nell'ultima uguaglianza il membro di sinistra non è regolare in x_0 , mentre quello di destra lo è: assurdo. $\square$

Tornando alla dimostrazione

Proposizione 10.4. *L'anello $\tilde{\mathcal{O}}$ è un $\mathcal{O}_y$ -modulo libero di rango d .*

Dimostrazione. Mostriamo prima che $\tilde{\mathcal{O}}$ è un $\mathcal{O}_y$ -modulo finitamente generato. Riprendiamo le notazioni della dimostrazione della Proposizione 10.2. Quindi $f : U \rightarrow V$, U, V affini, $y \in V$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$, $\mathcal{O}(V) \subset \mathcal{O}(U)$ e $\mathcal{O}(U)$ è un $\mathcal{O}(V)$ -modulo finitamente generato. Sia $g \in \tilde{\mathcal{O}}$ e siano z_i i poli di g in U . Possiamo trovare $h \in \mathcal{O}(V)$ tale che: $h(y) \neq 0$, $h(y_i) = 0$ ($y_i = f(z_i)$, quindi $y_i \neq y$) e $gh \in \mathcal{O}(U)$. Siccome $h(y) \neq 0$, $1/h \in \mathcal{O}_y$. Quindi $g \in (1/h) \cdot \mathcal{O}(U)$. Questo mostra $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_y \cdot \mathcal{O}(U)$. L'inclusione opposta è chiara (pensare a $\mathcal{O}_y = \{(f^{-1}(V_i) = U_i, g_y \circ f)\}$, dove $(V_i, g_y) \in \mathcal{O}_{Y,y}$ è un germe in y). Siccome $\mathcal{O}(U)$ è generato da, diciamo, $h_1, \dots, h_m$ su $\mathcal{O}(V)$, ogni elemento di $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_y \cdot \mathcal{O}(U)$ si scrive $\sum (s_i b_i) h_i$, con $s_i b_i \in \mathcal{O}_y$. Quindi $\tilde{\mathcal{O}}$ è un $\mathcal{O}_y$ -modulo finitamente generato.

Per il teorema di struttura dei moduli su un P.I.D. $\tilde{\mathcal{O}}$ è somma diretta di un modulo libero di tipo finito con un modulo di torsione. Siccome $\tilde{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{O}_y$ sono contenuti nel campo $k(Y)$, il modulo di torsione è nullo. Segue che $\tilde{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}_y^m$. La dimensione m è il massimo numero di elementi di $\tilde{\mathcal{O}}$ indipendenti su $\mathcal{O}_y$. Siccome il campo dei quozienti dell'anello integro $\mathcal{O}_y$ è $k(Y)$, m è

anche il massimo numero di elementi indipendenti su $k(Y)$. Siccome $\tilde{\mathcal{O}} \subset k(X)$, abbiamo $m \leq d := [k(X) : k(Y)]$. Sia $(g_1, \dots, g_d)$ una base di $k(X)$ su $k(Y)$. Sia p il massimo degli ordini dei poli dei g_j nei punti x_i . Allora $g_j t^p$ è regolare in $x_i, \forall i$. Infatti da $t = t_1^{k_1} \dots t_r^{k_r} \cdot v$, segue che $\nu_{x_i}(g_j t^p) > 0$. Quindi $g_1 t^p, \dots, g_d t^p \in \tilde{\mathcal{O}}$. Chiaramente i $g_j t^p$ sono indipendenti su $k(Y)$ perché i g_j lo sono. Quindi $m = d$. $\square$

Possiamo finalmente dimostrare il nostro teorema:

Teorema 10.5. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo non costante tra due curve proiettive, non singolari, irriducibili. Il morfismo f induce $k(Y) \subset k(X)$, estensione finita. Sia $d = [k(X) : k(Y)]$. Sia $y \in Y$ e sia $f^*(y) = \sum m_i x_i$ il divisore associato. Allora $\sum m_i = d$ (cioè ogni fibra di f consta di d punti, contati con molteplicità).*

Dimostrazione. Riprendiamo le notazioni precedenti: $t \in \mathcal{O}_y$ è un parametro locale. Allora $t \in \mathcal{O}_y \subset \tilde{\mathcal{O}}$ e quindi (Teorema 5.5) $t = t_1^{m_1} \dots t_r^{m_r} \cdot v$, v invertibile. Siccome i t_i sono due a due primi tra di loro, per il teorema cinese: $\tilde{\mathcal{O}}/(t) \simeq \bigoplus \tilde{\mathcal{O}}/(t_i^{m_i})$. Adesso non è troppo difficile vedere che $\dim_k(\tilde{\mathcal{O}}/t_i^{m_i}) = m_i$. Quindi $\dim_k(\tilde{\mathcal{O}}/(t)) = \sum m_i$. Per la Proposizione 10.4, $\tilde{\mathcal{O}}/(t) \simeq (\mathcal{O}_y/(t))^d$. Ma $\mathcal{O}_y/(t) = \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y \simeq k$. Quindi $\sum m_i = d$. $\square$

Un altro modo di arrivare a questo risultato è il seguente. Il morfismo $f : X \rightarrow Y$ è piatto per [15], III, Proposition 9.7 (osservare l'ipotesi Y non singolare). Siccome $X \subset \mathbb{P}^n$, abbiamo

$$\begin{array}{ccc} X & \subset & \mathbb{P}^n \times Y \\ f \searrow & & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

Quindi le fibre di f formano una famiglia piatta di sotto schemi chiusi zero-dimensionali di X , quindi di $\mathbb{P}^n$, parametrizzata da Y . Quindi il polinomio di Hilbert delle fibre è costante ([15], III, Thm. 9.9). Questo significa che il grado delle fibre è costante. Rimane da vedere che questo grado è genericamente d .

Bibliografia

1. Atiyah, M.F.-Macdonald, I.G.: *Introduzione a l'algebra commutativa* con l'Appendice di P. maroscia, Feltrinelli (1981)
2. Ballico, E.-Bolondi, G.-Ellia, Ph.-Mirò Roig, R.M.: *Curves of maximum genus in range A and stick figures*, Trans. Amer. Math. Soc., **349**, 4589-4608 (1997)
3. Castelnuovo, G.: *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*, Rend. Circ. Mat. Palermo 7 (1893), o in *Memorie scelte*, pp. 95-113.
4. Eisenbud, D.: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, GTM **150**, Springer (1995)
5. Ellia, Ph.: *Riemann-Roch in 9 settimane e 1/2*
6. Ellia, Ph.-Hirschowitz, A.-Mezzetti, E.: *On the number of irreducible components of the Hilbert scheme of smooth space curves*, International J. of Math., Vol.3, No. 6, 799-807 (1992)
7. Ellia, Ph.-Peskin, Ch.: *Groupes de points de $\mathbb{P}^2$: caractère et position uniforme*, in L.N.M. **1417**, 111-116 (1990)
8. Ellia, Ph.-Strano, R.: *Sections planes et majoration du genre des courbes gauches*, in *Complex projective geometry, Proc. Trieste-Bergen*, London Math. Soc. Lect. Notes Series (Cambridge Univ. Press) 179, 157-174 (1992)
9. Ellia, Ph.: *Sur le genre maximal des courbes gauches de degré d non sur une surface de degré s - 1*, J. für die reine u. angew. Math. (Crelle's J.), 413, 78-87, (1991)
10. Griffiths, Ph.-Harris, J.: *Principles of algebraic geometry*, Wiley and Sons (1978)
11. Gruson, L.-Peskin, Ch.: *Genre des courbes de l'espace projectif*, in Algebraic geometry, Proc Tromsø, 1977, 31-59, Lecture Notes in Math., **687**, Springer, Berlin (1978)
12. Gruson, L.-Peskin, Ch.: *Genre des courbes de l'espace projectif, II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 15, no. 3, 401-418 (1982)
13. Halphen, G.: *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*, J. Ec. Polyt., **52**, 1-200 (1882)
14. Harris, J.: *The genus of space curves*, Math. Ann., **249**, 191-204 (1980)

15. Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*, GTM **52**, Springer (1977)
16. Hartshorne, R.: *Stable reflexive sheaves, III*, Math. Ann., **279**, 517-534 (1988)
17. Hartshorne, R.-Hirschowitz, A.: *Nouvelles courbes de bon genre dans l'espace projectif*, Math. Ann., **280**, 353-367 (1988)
18. Matsumura, H.: *Commutative algebra (Second Ed.)*, Math. Lecture Notes Series, Benjamin (1980)
19. Rathmann, J.: *The uniform position principle for curves in characteristic p* , Math. Ann., **276**, 565-579 (1987)
20. Serre, J.P.: *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Maths, **61**, 197-278 (1955)
21. Shafarevich, I.: *Basic algebraic geometry, 1*, Second Ed., Springer-Verlag (1994)