Geometria I
S.2 (1/3/2000)

Scrivere nome, cognome e il corso di Laurea in stampatello.
Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno valutate Il punteggio è riportato a fianco di ogni domanda.

1.(7) Dire se la matrice reale $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile e determinare una base degli eventuali autospazi.

2. Sia $q : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita da

$$(x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2yz.$$

i) (3) Determinare rango e segnatura con il metodo di Gauss

ii) (3) Sia f la forma bilineare associata. Fornire una base di $(\mathbf{R^3})^\perp$

iii) (2) Sia $V \subset \mathbf{R^3}$ un sottospazio vettoriale. Dire, giustificando la risposta, se è possibile che per ogni vettore non nullo $v \in V$ si abbia $q(v) < 0$.

3. Si consideri il seguente sistema lineare, nelle variabili (x, y, z) e dipendente dal parametro reale λ. $\Sigma(\lambda) := \begin{cases} \lambda x + y - z & = 2\lambda \\ 2x - \lambda y + 2\lambda z & = 0 \\ \lambda x - 4z & = -1 \end{cases}$

Giustificare le seguenti affermazioni (non è necessario risolvere il sistema !):

i) (3) esistono al più tre valori di λ per cui il sistema non ammette soluzione;

ii) (4) Sia $S(\lambda)$ il sottospazio affine delle soluzioni di $\Sigma(\lambda)$. Allora $dim S(\lambda) \leq 1$.

4. Si considerino le rette di $\mathbf{R^3}$ definite dalle equazioni cartesiane

$$R_1 := \begin{cases} 2x + y + 3z & = 1 \\ 4x + 2y - z & = 2 \end{cases}$$

$$R_2 := \begin{cases} 2x - 2y + z & = 4 \\ x - y - z & = 2 \end{cases}$$

i) (3) si mostri che R_1 ed R_2 sono incidenti e se ne determini il punto di intersezione P

ii) (3) Sia R_3 la retta definita dall'equazione parametrica $R_3 = P + \langle(1, 1, 1)\rangle$. Determinare un'equazione cartesiana di un piano H_1 parallelo ad R_3 e tale che $H_1 \cap R_1 = \emptyset$.

iii) (2) Determinare la posizione reciproca di H_1 ed R_2.