Geometria I

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno valutate. **Parziale del:**
Scrivere nome e cognome in stampatello. 4-05-2011

Esercizio 1.
Siano in $\mathbb{R}^3$ il piano H di equazione $2x-4y-z=3$, la retta R di equazioni: $x-3y=-2$, $z-2y=-3$, la retta $D=(-1,0,-1)+\langle(3,1,2)\rangle$ e la retta $L=(1,0,-1)+\langle(1,1,1)\rangle$. Sia E il sottospazio affine generato da R e D.
(i) Determinare le posizioni reciproche di H,E,L.
(ii) Senza fare conti, mostrare che non esiste nessuna retta, l, passante per $P=(1,0,-1)$ tale che $l\cap R\neq\emptyset$ e $l\cap D\neq\emptyset$.
(iii) Dire (senza fare conti) se esiste un'affinità, φ, di $\mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(L)=D$ e $\varphi(D)=R$.

Soluzione:
(i) La direzione di H è data da $2x-4y-z=0$, quindi $dir(H)=\langle(2,1,0),(1,0,2)\rangle$. La direzione di R è data da $x-3y=0$ e $z-2y=0$, quindi $dir(R)=\langle(3,1,2)\rangle$. Abbiamo $R=(1,1,-1)+\langle(3,1,2)\rangle$.
Vediamo che D e R sono parallele disgiunte ($(-1,0,-1)\notin R$). Quindi E è un piano. Due vettori direttori sono $(3,1,2)$ e $(1,1,-1)-(-1,0,-1)=(2,1,0)$. Siccome $(3,1,2)=(2,1,0)+(1,0,2)$, abbiamo $dir(E)=dir(H)$. Siccome $(1,1,-1)\notin H$, H ed E sono paralleli, disgiunti.
La retta L non è parallela a H (e quindi neanche a E) ($(1,1,1),(2,1,0),(1,0,2)$ sono indipendenti come si vede calcolando il loro determinante). Il punto $(1,0,-1)$ di L verifica l'equazione di H, quindi $L\cap H=\{(1,0,-1)\}$.
Alternativamente risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x-4y-z=3 \\ x-y=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

Il piano E è parallelo a H e passa per il punto $(1,1,-1)$, inserendo queste coordinate nell'equazione di H, ricaviamo l'equazione di E: $2x-4y-z=-1$. L'intersezione $L\cap E$ è data dal sistema:

$$\begin{cases} 2x-4y-z=-1 \\ x-y=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

La cui soluzione è $(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$.
(ii) Se $l\cap R\neq\emptyset$ e $l\cap D\neq\emptyset$, allora $l\subset E$. Questo è impossibile perchè $(1,0,-1)\in H\cap l$ e $H\cap E=\emptyset$.
(iii) Siano u,v dei vettori direttori di L,D, allora u e v sono indipendenti. Se f è la parte lineare di φ si dovrebbe avere $f(u)=\alpha v$, $f(v)=\beta v$ (R e D sono parallele), quindi f non sarebbe iniettiva: assurdo. L'affinità φ non esiste.

Esercizio 2.
Sia E uno spazio euclideo di dimensione n e sia B una base ortonormale di E. Se $f\in End(E)$ con $A=mat(f;B,B)$ si indica con ${}^tf$ l'unico endomorfismo di E tale che $mat({}^tf;B,B)={}^tA$ (${}^tf$ è l'aggiunto di f).
(i) Mostrare che $\forall v,w\in E$: $(f(v)\mid w)=(v\mid {}^tf(w))$.
(ii) Mostrare che: $(f(v)\mid v)=0,\forall v\in E\Leftrightarrow f+{}^tf=0$.
(iii) Concludere che una matrice antisimmetrica $A\in M_n(\mathbb{R})$ non ha autovalori reali non nulli.

Soluzione:
(i) Abbiamo: $(f(v)\mid w)={}^t(AV).W={}^tV{}^tAW={}^tV({}^tAW)=(v\mid {}^tf(w))$.

(ii) ($\Rightarrow$): $\forall v, w \in E$: $(f(v+w) \mid v+w) = 0 = (f(v) \mid w) + (f(w) \mid v)$. Usando (i): $(v \mid {}^t f(w)) + (f(w) \mid v) = 0$. Siccome $(f(w) \mid v) = (v \mid f(w))$, viene: $(v \mid (f + {}^t f)(w)) = 0$. Siccome questo è vero per ogni $v \in E$: $(f + {}^t f)(w) = 0$, siccome questo è vero $\forall w \in E$, $f + {}^t f = 0$.
($\Leftarrow$) Viceversa se $f + {}^t f = 0$, allora $\forall v \in E$: $((f + {}^t f)(v) \mid v) = 0 = (f(v) \mid v) + ({}^t f(v) \mid v) = (f(v) \mid v) + (v \mid (f(v)) = 2.(f(v) \mid v)$. Quindi $(f(v) \mid v) = 0, \forall v \in E$.

(iii) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisimmetrica. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore, esiste $V \neq 0$ tale che $A(V) = \lambda V$. Per quanto precede: $(A(V) \mid V) = 0$, quindi $(\lambda V \mid V) = \lambda.(V \mid V) = 0$, siccome $V \neq 0$, questo implica $\lambda = 0$.

Esercizio 3.
Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to -x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 2xy + 2xz + 6yz$.
(i) Determinare $A = mat_B(f)$ dove $B = (e_i)$ è la base canonica e dove f è la forma bilineare simmetrica associata. Calcolare il rango di A.
(ii) Determinare $e_1^\perp$.
(iii) Sia $v = (0, 1, 1)$. Determinare $v^\perp$.
(iv) Determinare la segnatura di q.
(v) Ritrovare la segnatura di q con il metodo di Gauss.

Soluzione:

(i) La matrice è $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Il rango vale tre (det $\neq 0$).

(ii) Abbiamo $e_1^\perp = \{(x, y, z) \mid (-1, -1, 1).{}^t(x, y, z) = 0 = -x - y + z\}$, quindi $e_1^\perp = \langle (0, 1, 1) = v, (1, 0, 1) \rangle$.

(iii) Abbiamo $v^\perp = \{(x, y, z) \mid z = 0\} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$.

(iv) Siccome $e_1^\perp \cap v^\perp = \langle (1, -1, 0) = w \rangle$, (e_1, v, w) è una base ortogonale (infatti i vettori non sono isotropi, oppure $\det(e_1, v, w) \neq 0$). Abbiamo $q(e_1) = -1$, $q(v) = 1$, $q(w) = -2$. La segnatura è $(1, 2)$.

Guardiamo i termini in x: $-(x^2 + 2xy - 2xz) = -[(x + y - z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz]$. Poi:
$-2y^2 - 2z^2 + 4yz = -2(y - z)^2$. Quindi $q(x, y, z) = -(x + y - z)^2 - 2(y - z)^2 + z^2$.

BONUS.
Siano in $\mathbb{R}^2$ due rette parallele R, D ($R \neq D$). Mostrare che esiste un'affinità $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tale che $\varphi(R) = D$ e $\varphi(D) = R$.

Soluzione: Sia L la retta parallela a R e D, equidistante da R e D. La riflessione ortogonale rispetto a L, r_L, è un'isometria (quindi un'affinità) che verifica $r_L(R) = D$, $r_L(D) = R$.