Geometria 2
Correzione: Appello del 25/06/2003.

I (i) La matrice è diagonalizzabile, gli autovalori sono -1 (doppio) e 2.
(ii) Una base di autovettori è: $E_{-1} =< (1,0,2),(0,1,0) >$, $E_2 =< (1,2,1) >$.

II (i) Termini contenenti x: $x^2 + 2xy - 2xz = [(x+y-z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz]$, quindi $q(x,y,z) = (x+y-z)^2 - 2z^2$. La segnatura è $(1,1)$.
(ii) Nella base canonica la matrice della forma bilineare associata è
$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Abbiamo $(\mathbf{R^3})^\perp = Ker(M) =< (1,-1,0) >=< e >$.
(iii) Se v non è isotropo, $v^\perp$ ha dimensione due e $e \in v^\perp$, $v \notin v^\perp$. Sia (e,w) una base di $v^\perp$, allora (e,w,v) è una base (sono indipendenti perchè (e,w) è una base di $v^\perp$ e $v \notin v^\perp$), ortogonale (e è ortogonale a tutti e $w \in v^\perp$).
Sia v isotropo e supponiamo (e,v,w) base ortogonale. Allora $w, e \in v^\perp$ ma anche $v \in v^\perp$ (perchè v isotropo). Quindi $dim(v^\perp) = 3$, cioè $v^\perp = \mathbf{R^3}$. Questo implica $v \in (\mathbf{R^3})^\perp =< e >$, quindi v e e sono dipendenti: assurdo.
Oppure si puó osservare che, essendo e e v isotropi, la matrice (diagonale perchè la base è ortogonale) avrebbe rango al piú uno.

III (i) $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
(ii) Il rango di A è due.

IV (i) Le rette sono due a due parallele, disgiunte. $r = (1,0,1)+ < v >$, $d = (1,1,1)+ < v >$, $l = \{(x,y,z) \mid x+1 = y; z = 2y+1\}$ $(v = (1,1,2))$.
(ii) $[r,d] = (1,0,1)+ < v, (1,0,1) - (1,1,1) >$ quindi:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e un'equazione di H_0 è $2x - z = 1$.
(iii) Il piano H_0 e l sono paralleli, $(-1,0,1) \notin H_0$, quindi $H_0 \cap l = \emptyset$.
(iv) Se $r \subset \Pi$ allora $dir(r) \subset dir(\Pi)$, quindi anche $dir(d) \subset dir(\Pi)$ cioè d e Π sono paralleli e pertanto $d \cap \Pi = d$ o $\emptyset$. Il piano Π non esiste.