Da un punto M, interno ad un triangolo equilatero, si conducano le perpendicolari MD, ME, MF a ognuno dei lati.
Qual è la probabilità che MD, ME, MF possano essere i lati di un triangolo?
Dato un punto M interno al triangolo ABC, tracciamo le parallele ai lati del triangolo, con D'E"//AB, D"F'//BC, E'F"//AC, dove D' e D" sono le intersezioni con il lato AC, E' ed E" quelle con BC, F' ed F" quelle con AB.
Il triangolo risulta diviso in tre triangoli equilateri D'MD", E'ME", F'MF" e in tre parallelogrammi AF"MD', F'BE"M, D"ME'C (infatti gli angoli opposti sono isometrici). Figura 1
Siano l_1, l_2, l_3 le lunghezze dei lati di D'MD", E'ME", F'MF" rispettivamente. Il lato AB è diviso in tre segmenti: AF"= l_1, F'B= l_2 perché lati opposti in un parallelogramma; F"F'= l_3. Si ha quindi $l_1+l_2+l_3=l$.
Siano a,b,c le lunghezze rispettivamente dei lati DM, EM ed FM: a,b,c sono le altezze del triangoli equilateri D'MD", E'ME", F'MF".
$a=l_1\sqrt{3}/2 \quad b=l_2\sqrt{3}/2 \quad c=l_3\sqrt{3}/2$
$a+b+c=l_1\sqrt{3}/2+l_2\sqrt{3}/2+l_3\sqrt{3}/2=\sqrt{3}/2(l_1+l_2+l_3)=l\sqrt{3}/2=h$
La somma di a,b e c è quindi uguale all'altezza del triangolo ABC.
(1) $a+b+c=h$
Condizione sufficiente e necessaria affinché a,b e c possano essere i lati di un triangolo è: $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$.
Dalla *(1)* si ricava: $a=h-b-c$
Quindi, sostituendo, si ottiene:
$h-b-c<b+c \Rightarrow h<2b+2c \Rightarrow h/2<b+c$
Da cui, per la *(1)*: $a<h/2$
Analogamente si dimostra che $b<h/2$ e $c<h/2$.
Tracciamo ora le congiungenti i punti medi del triangolo. Figura 2
L'evento di cui si vuole calcolare la probabilità è:
$E=E' \wedge E'' \wedge E''' \quad E'=a<h/2 \quad E''=b<h/2 \quad E'''=c<h/2$
$P(E)=P(E')\bullet P(E''/E')\bullet P(E'''/E''/E')$
$P(E')=3/4$ poiché M non può ricadere nella superficie B
$P(E''/E')=2/3$ poiché M non può ricadere nella superficie A
$P(E'''/E''/E')=1/2$ poiché M non può ricadere nella superficie C
$P(E)=3/4 \bullet 2/3 \bullet 1/2=1/4$
Ciò si vede anche graficamente: il punto M può stare soltanto nella superficie D
Andrea Seppi
Classe 2D
Liceo Scientifico Statale G.Oberdan - Trieste

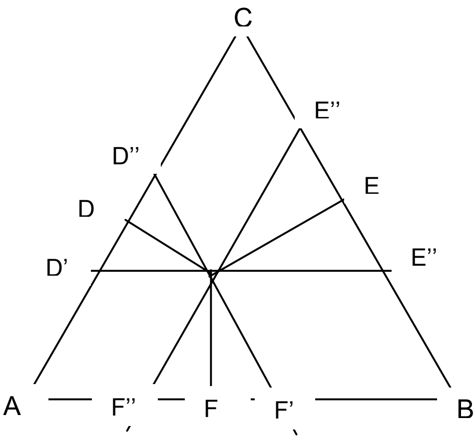

Figura 1

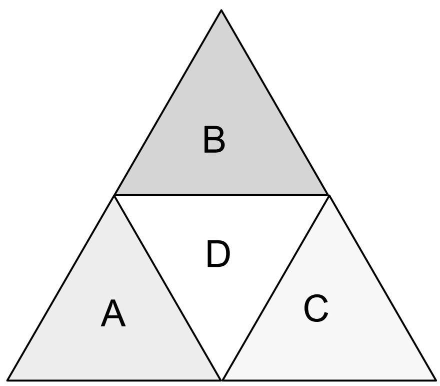

Figura 2