ProbleMATEMATICAmente

Il problema di Ottobre 2003

Da un punto M, interno ad un triangolo equilatero, si conducano le perpendicolari MD, ME, MF a ognuno dei lati.
Qual è la probabilità che MD, ME, MF possano essere i lati di un triangolo?

Premessa
Dimostriamo che in un triangolo equilatero un lato è il luogo dei punti per i quali è costante la somma delle sue distanze dagli altri due lati e inoltre che tale distanza equivale all'altezza del triangolo stesso.
Sia P un punto qualsiasi del lato ST del triangolo equilatero STV e siano PR e PQ le sue distanze dai lati VT e VS (vedi Fig. 1)
Congiungendo P con V, il triangolo STV viene diviso nei due triangoli PTV e PSV aventi area rispettivamente: VT×PR / 2 e VS×PQ / 2; la somma di queste due aree equivale all'area del triangolo STV che è ST×VH / 2
In sintesi si ha,
$\forall$ P, $\quad VT \times PR / 2 + VS \times PQ / 2 = ST \times VH / 2$
essendo per ipotesi $\quad VT = VS = ST$, $\qquad$ si ottiene $\quad PR + PQ = VH$.

Affrontiamo adesso il nostro problema (vedi Fig. 2).
Consideriamo il triangolo equilatero ABC e un suo punto interno M e siano MD, ME ed MF le sue distanze dai lati BC, AC e AB.
Perché i segmenti MD, ME e MF siano lati di un triangolo, devono essere soddisfatte le disuguaglianze triangolari:
" In un qualsiasi triangolo un lato risulta sempre minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza".
Congiungendo punti medi dei lati di ABC: X, Y e K. Si formano i quattro triangoli equilateri isometrici CXK, AXY, BYK e XYK aventi lato e altezza congruenti rispettivamente con metà lato e metà altezza del triangolo ABC.
Se si considera un qualsiasi punto M interno al triangolo XYK e si tracciano per esso le parallele GI, LN e WZ si ottengono i tre triangoli equilateri BGI, ALN e CWZ aventi tutti altezza maggiore della metà dell'altezza del triangolo ABC per cui, in base alla premessa, possiamo affermare che si ha:

$$MD + ME > MF, \qquad ME + MF > MD, \qquad MF + MD > ME$$

ed da queste ricavare anche che:

$$MD > MF - ME \qquad ME > MF - MD$$
$$ME > MD - MF \qquad MF > MD - ME$$
$$MF > ME - MD \qquad MD > ME - MF$$

Le nove disuguaglianze sopra scritte consentono di affermare che per i punti appartenenti al triangolo XYK vengono soddisfatte le condizioni per esistenza del triangolo di lati MD, ME ed MF, allo stesso modo si può dimostrare che, per i punti del triangolo ABC, che non appartengono al triangolo XYK, le nove disuguaglianze non vengono soddisfatte. Poiché l'area del triangolo XYK è un 1 / 4 dell'area di tutto il triangolo ABC, la probabilità che un punto interno ad ABC sia un punto di XYK è: Area XYK / Area ABC = 1 / 4.

Claudia Cucci II A
Maria Scilimpa II A
Salvatore Santocono V C
Liceo Scientifico "P, Farinato" ENNA

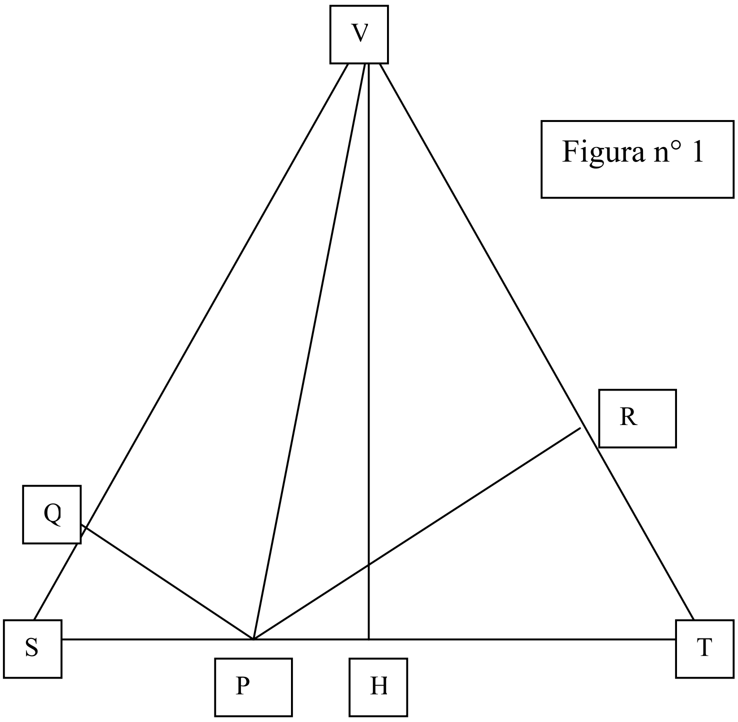

Figura n° 1

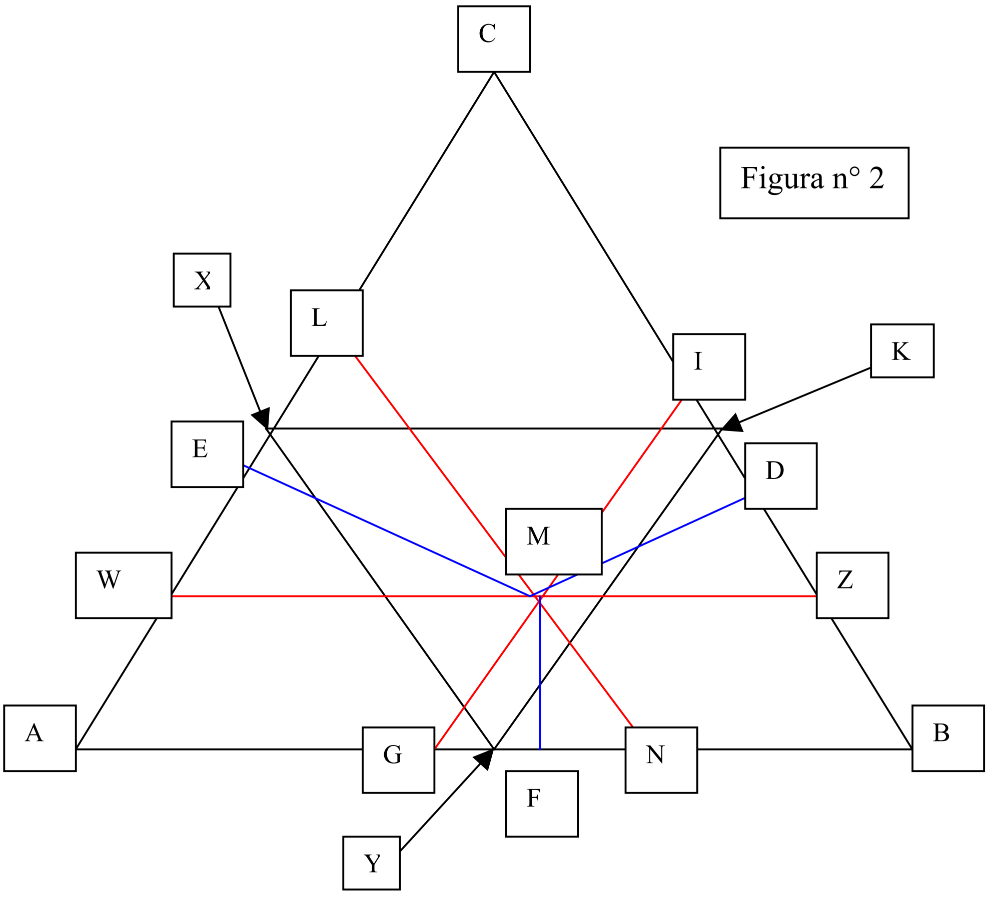

Figura n° 2