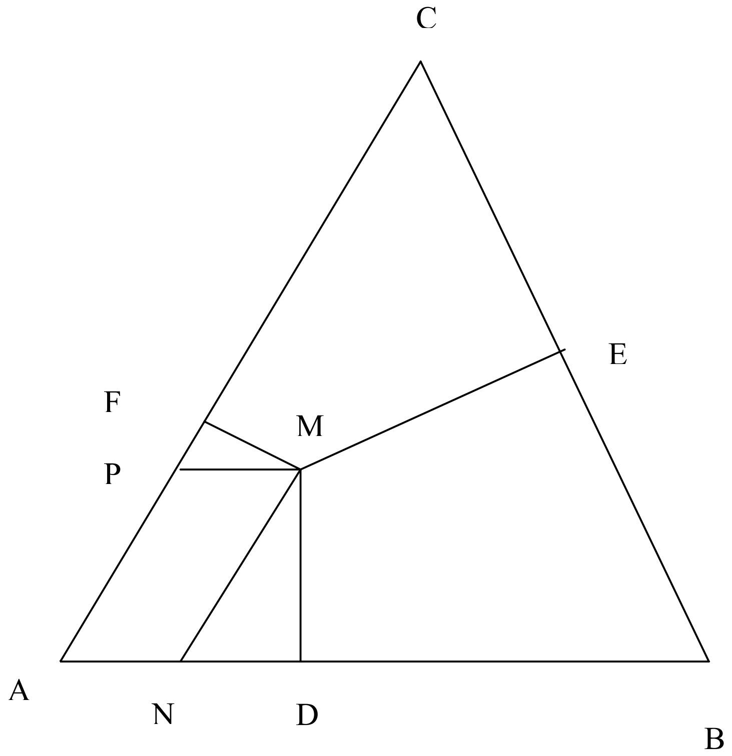
Soluzione problema di ottobre 2003 – Cavarero Gianfranco cl. V A scientifico - Liceo “Ancina” – Fossano (Cuneo)

Figura 1



SVOLGIMENTO

Scelto un generico punto M interno al triangolo, si tracciano da esso le perpendicolari ai lati. Si costruisce inoltre (fig.1) il parallelogrammo ANMP con MP parallelo ad AB e MN parallelo ad AC. Risulta che gli angoli DNM e FPM valgono entrambi 60° in quanto congruenti all’angolo BAC (angoli fra lati paralleli).

Denotiamo con l la misura del lato del triangolo equilatero, con x la misura di MD, con y la misura di MF e con z la misura di ME. Le limitazioni delle incognite sono immediatamente deducibili dalla figura e risultano $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2} l$; $0 < y < \frac{\sqrt{3}}{2} l$; $0 < z < \frac{\sqrt{3}}{2} l$

Si osserva che $\overline{DN} = \frac{\overline{MD}}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}$ e che $\overline{AN} = \overline{MP} = 2\frac{\overline{MF}}{\sqrt{3}} = \frac{2y}{\sqrt{3}}$. Dunque

$\overline{AD} = \overline{DN} + \overline{AN} = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{x+2y}{\sqrt{3}}$.

Con calcolo analogo si ricava che $\overline{BD} = \frac{x+2z}{\sqrt{3}}$.

Essendo $\overline{AD} + \overline{BD} = l$, si ottiene $\frac{x+2y}{\sqrt{3}} + \frac{x+2z}{\sqrt{3}} = l$, da cui, svolgendo i calcoli, si ricava che

x + y + z = $\frac{\sqrt{3}}{2} l$. Dal punto di vista geometrico, questa scrittura significa che la somma delle misure di MD, ME e MF è uguale alla misura dell’altezza del triangolo equilatero.

Dalla precedente scrittura, isolando la z, si ottiene che z = $\frac{\sqrt{3}}{2}l - x - y$. Essendo z un valore positivo, dovrà risultare y < $\frac{\sqrt{3}}{2}l - x$, il che fornisce un'ulteriore condizione a cui le due misure di x e y devono sottostare.

Perché i segmenti MD, ME e MF possano essere i lati di un triangolo, ciascuno di essi deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Devono cioè essere verificate le seguenti condizioni:

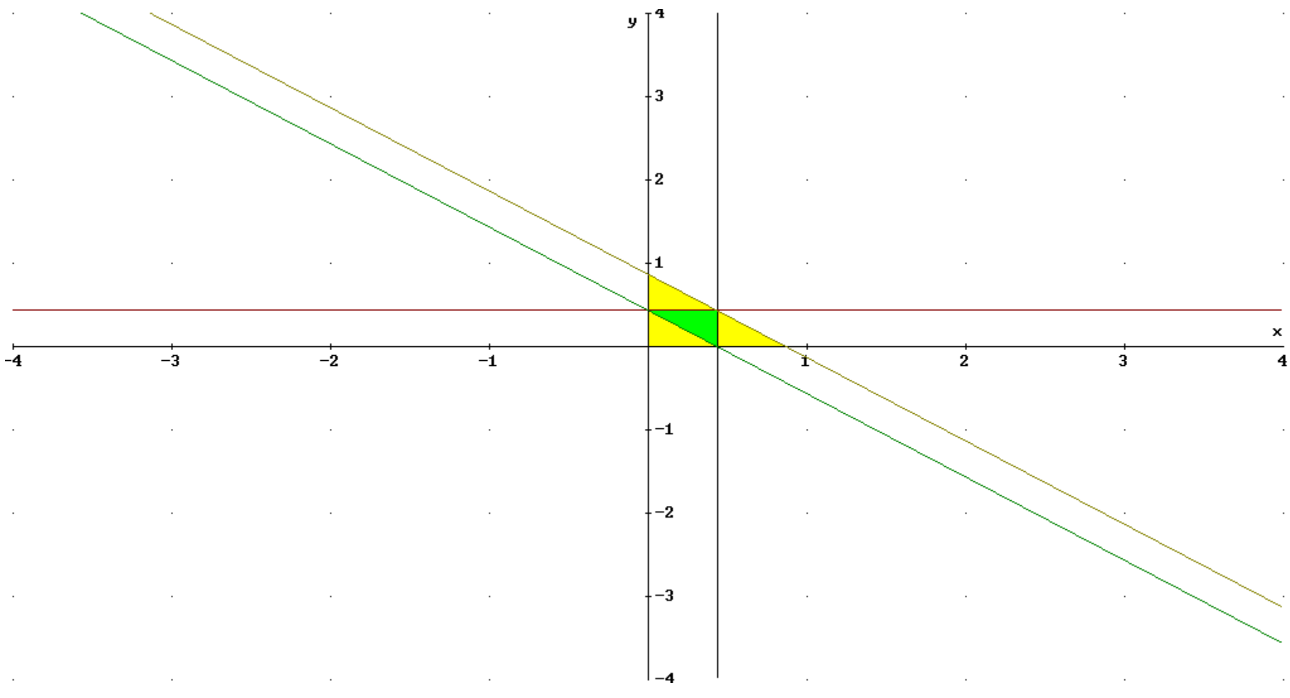
$$z < x + y \;\wedge\; z > |x - y|$$

cioè, sostituendo il valore individuato di z in funzione di x e y :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}l - x - y < x + y \;\wedge\; \frac{\sqrt{3}}{2}l - x - y > |x - y|.$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene che: $x + y > \frac{\sqrt{3}}{4}l \;\wedge\; x < \frac{\sqrt{3}}{4}l \;\wedge\; y < \frac{\sqrt{3}}{4}l.$

Riportiamo ora i risultati ottenuti in un grafico in x e y (ricordando, inoltre, che x > 0 e y > 0):



L'area evidenziata in giallo definisce il luogo dei punti del piano cartesiano le cui coordinate x e y rappresentano uno dei casi possibili della situazione geometrica (qualsiasi posizione di M all'interno del triangolo ABC).
L'area evidenziata in verde definisce invece il luogo dei punti per i quali le coordinate x, y rappresentano i casi favorevoli all'assunto del problema, i casi cioè in cui il punto M è tale per cui i segmenti MD, ME e MF sono lati di un triangolo.

Poiché il rapporto fra le due aree vale $\frac{1}{4}$, la probabilità che, al variare di M all'interno del triangolo ABC, i segmenti MD, ME e MF siano lati di un triangolo risulta essere:

$$p = \frac{1}{4}$$

Ulteriori considerazioni geometriche: La relazione $x + y + z = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ ci dice che i triangoli che soddisfano al problema (di lati MD, ME e MF) sono isoperimetrici (di perimetro pari all'altezza del triangolo equilatero ABC).

E' possibile osservare, inoltre, che i segmenti MD, ME e MF sono lati di un triangolo quando il punto M è scelto internamente al triangolo A'B'C' formato dalle congiungenti i punti medi del triangolo ABC (d'altra parte, l'area di A'B'C' è proprio un quarto dell'area totale di ABC, concordemente con il risultato trovato per il valore della probabilità).

A tale conclusione si giunge attraverso le seguenti considerazioni (fatte riguardo a x, ma valide per simmetria anche per y e z): mantenendo costante il valore di x e facendo variare i valori di y e z (all'interno del loro campo di esistenza, il che implica, essendo $x + y + z = \frac{\sqrt{3}}{2} l$, che anche la somma $y + z$ rimane costante), il punto M descrive un segmento parallelo al lato AB e avente gli estremi sui lati AC e BC.

Ricordando la condizione che $x < \frac{\sqrt{3}}{4} l$ che garantisce che i segmenti MD, ME e MF siano lati di un triangolo, studiamo il caso limite in cui $x = \frac{\sqrt{3}}{4} l$ (per cui il triangolo di lati MD, ME e MF è degenere): dal punto di vista geometrico, ciò significa che $\overline{MD} = \frac{\sqrt{3}}{4} l = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} l$, cioè che la misura del segmento MD è uguale alla metà dell'altezza del triangolo ABC. In tal caso, quindi, il punto M coincide con il punto medio del lato AC quando $y = 0$, e con il punto medio del lato BC quando $z = 0$ (tale constatazione si ricava per similitudine di triangoli); di conseguenza, il segmento descritto dal punto M al variare di y e z è la congiungente i punti medi dei lati AC e BC.

Ripetendo le stesse considerazioni mantenendo costante il valore di y e successivamente quello di z, e ricordando le condizioni $x < \frac{\sqrt{3}}{4} l \;\wedge\; y < \frac{\sqrt{3}}{4} l \;\wedge\; z < \frac{\sqrt{3}}{4} l$, l'area che rimane individuata è proprio quella del triangolo A'B'C' formato dalle congiungenti i punti medi del triangolo ABC.