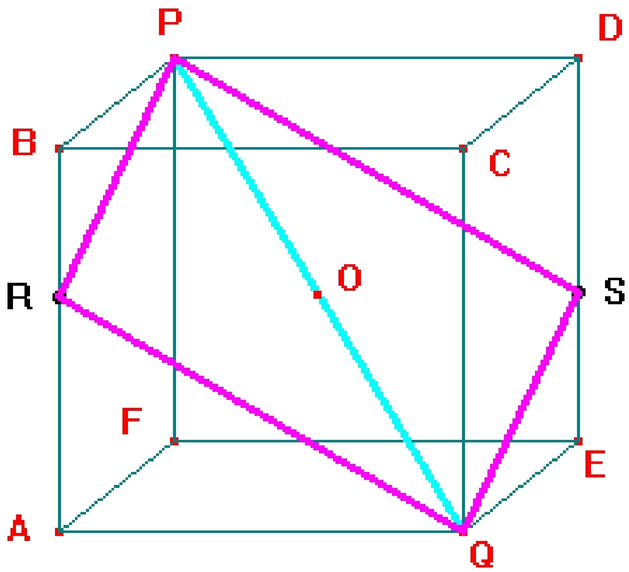
**Flavia Vincenzi**
**Classe V Liceo Scientifico**
**Liceo Scientifico "Blaise Pascal" di Merano (BZ)**

**RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI NOVEMBRE 2003**

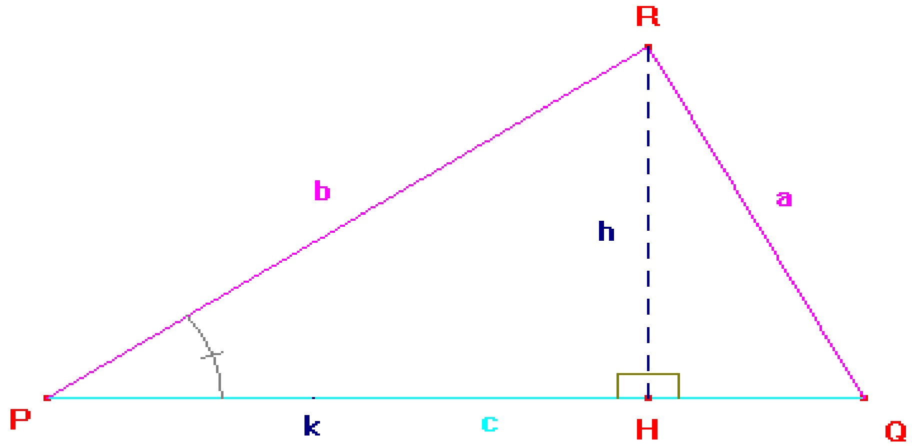
## *Il problema di Novembre 2003*

**Si consideri un cubo di spigolo unitario e una sua diagonale PQ (P e Q sono vertici opposti).**
**Si determini il valore minimo ed il valore massimo dell'area della figura che risulta dall' intersezione fra il cubo e un piano passante per PQ.**




Il piano intersecante il cubo forma con tale solido un parallelogramma che ha due vertici opposti in P e Q. Gli altri due vertici R e S sono simmetrici rispetto al centro O del cubo e si trovano nel cammino chiuso ABCDEFA. Se faccio ruotare il piano attorno alla retta PQ il punto R percorre tutto il cammino chiuso ABCDEFA.
Ho notato che qualunque sia lo spigolo del percorso, per simmetria, il parallelogramma varia allo stesso modo.
Facendo variare R su AB ho posto come variabile $x$ la distanza AR
L'area del parallelogramma si può calcolare come doppia area del triangolo PQR.
PQ, RQ e RP sono facilmente esprimibili rispetto ad $x$ utilizzando il teorema di Pitagora.
In riferimento alla figura sottostante:
$a = \sqrt{x^2 + 1}$,

$b = \sqrt{1+(1-x)^2} = \sqrt{x^2-2x+2}$,
$c = \sqrt{3}$.




Inoltre, posto $k = \mathrm{PH}$ e $h = \mathrm{RH}$ (altezza del triangolo),

$$h^2 = b^2 - k^2 = (x^2-2x+2) - (x^2-2x+2)\cos^2\alpha = (x^2-2x+2)(1-\cos^2\alpha).$$

Applicando il teorema del coseno esprimo il coseno di α in funzione di $x$:

$$\cos\alpha = -\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc} = -\frac{x^2+1-(x^2-2x+2)-3}{\sqrt{3(x^2-2x+2)}} = \frac{x-2}{\sqrt{3(x^2-2x+2)}}.$$

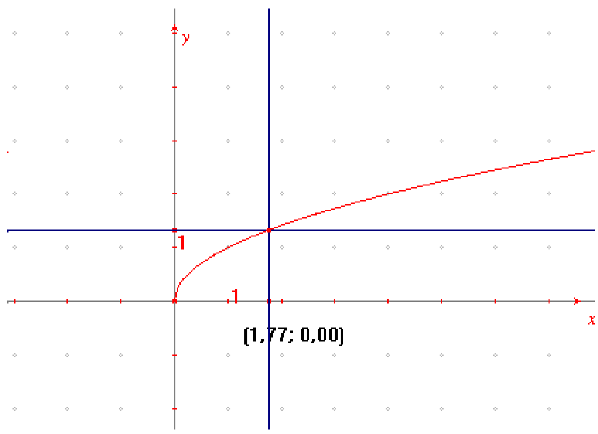
Successivamente calcolo l'area del parallelogramma al quadrato (al quadrato solo per semplicità di calcolo) ponendola uguale al prodotto della base $c$ del triangolo e dell'altezza $h$ in precedenza trovata sostituendo all'interno della formula il quadrato del coseno di α appena espresso in funzione di $x$:

$$A^2 = c^2h^2 = 3(x^2-2x+2)\left(1-\frac{(x-2)^2}{3(x^2-2x+2)}\right) = 2(x^2-x+1).$$

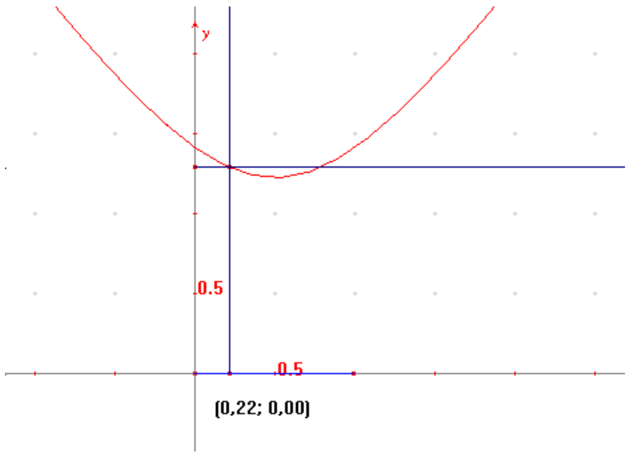
Ora calcolo la radice quadrata, in modo da esprimere l'area in funzione della variabile $x$:

$$A = \sqrt{2(x^2-x+1)}.$$

Considerando il fatto che la funzione radice quadrata è una funzione monotona crescente (figura a destra) i massimi ed i minimi della funzione area $A(x)$ sono i massimi ed i minimi dell'argomento della radice quadrata. Esso è una funzione di secondo grado il cui grafico è una parabola con concavità rivolta verso l'alto.
Per trovare il suo minimo considero il valore assunto dalla funzione area $A(x)$ in corrispondenza dell'ascissa del vertice $x_v = 1/2$ della parabola.



Per trovare il suo massimo basta trovare i suoi valori negli estremi dell'intervallo in cui la funzioni è definita, cioè 0 e 1.
Si ha $A(1/2) = \sqrt{3/2}$ e $A(0) = A(1) = \sqrt{2}$.
Quindi l'area minima che può assumere il parallelogramma è circa 1,22 mentre quella massima è circa 1,41.
Il grafico della funzione area $A(x)$ è rappresentato dalla figura a destra.




Il problema può anche essere risolto anche attraverso il calcolo della derivata della funzione area e lo studio dei suoi massimi e minimi nell'intervallo chiuso [0,1].

$$D(A(x)) = \frac{2x-1}{\sqrt{2(x^2-x+1)}}.$$