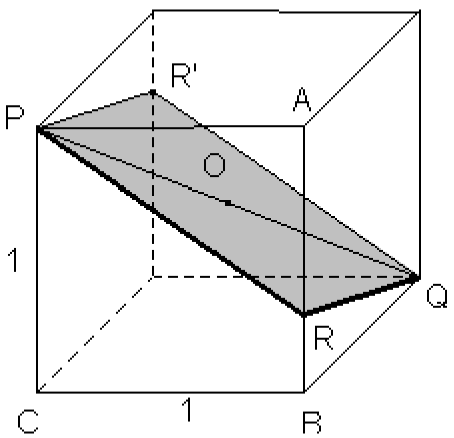
Marta Bisson
Classe V A
Liceo Scientifico "G. Falcone" di Asola (MN)

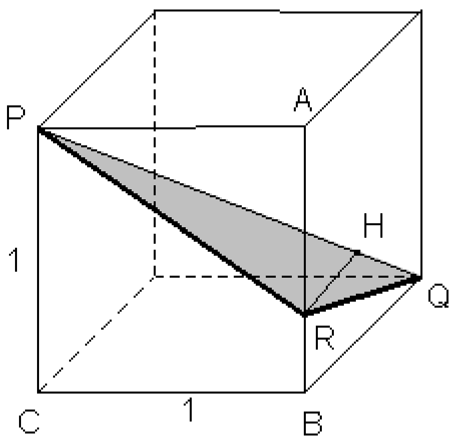
RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI NOVEMBRE 2003

Si consideri un cubo di spigolo unitario e una sua diagonale PQ (P e Q sono vertici opposti). Si determini il valore minimo ed il valore massimo dell'area della figura che risulta dall' intersezione fra il cubo e un piano passante per PQ.

Dalla figura, PC=CB=BQ=1, CQ=$\sqrt{2}$ e PQ=$\sqrt{3}$.



[Si considera un piano passante per PQ; la sezione sarà sempre un parallelogramma PRQR', con R appartenente allo spigolo AB. Possiamo limitarci a questo spigolo perché se si considera lo spigolo CB si ottengono le stesse sezioni.]

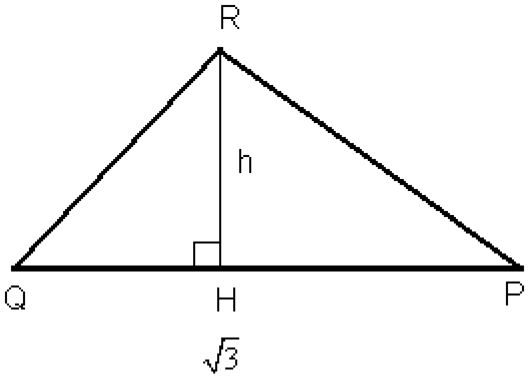


Ponendo AR=x, si ottiene:

PR= $\sqrt{1+x^2}$ (teorema di Pitagora nel triangolo PAR rettangolo in A).

RQ=$\sqrt{1+(1-x)^2}=\sqrt{x^2+2x+2}$ (teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BQR).

Consideriamo il triangolo PQR interno al cubo.



Considero altezza RH relativa alla base QP (diagonale del cubo) e indico con *h* la misura di RH.
Si ottiene

QH=$\sqrt{\mathrm{RQ}^2 - h^2}$ (teorema di Pitagora applicato al triangolo QRH)

HP=$\sqrt{\mathrm{PR}^2 - h^2}$ (teorema di Pitagora applicato al triangolo RHP).

Ma si ha:

QH+HP=QP=$\sqrt{3}$, perché la diagonale del cubo è $\sqrt{3}$.

Otteniamo quindi:

$\sqrt{1+x^2-h^2}+\sqrt{x^2-2x+2-h^2}=\sqrt{3}$.

Quadrando un paio di volte [tenendo conto delle condizioni sulle espressioni contenute sotto radice] si ottiene: $h^2=\dfrac{2x^2-2x+2}{3}$, da cui $h=\sqrt{\dfrac{2x^2-2x+2}{3}}$.

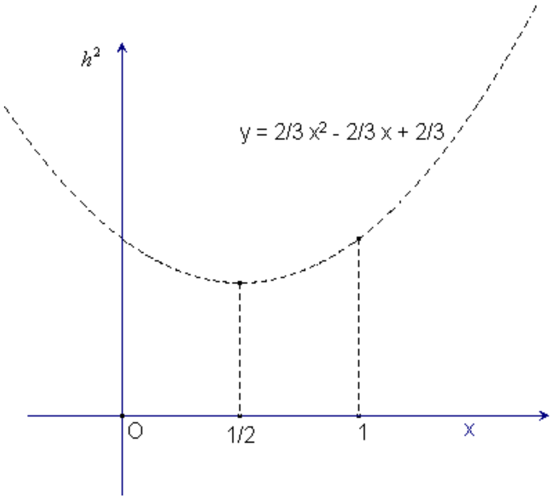
L'area del triangolo PQR è Area (PQR)= $\dfrac{\overline{PQ}\cdot h}{2}$.

L'area della figura che risulta dall'intersezione tra il cubo e il piano passante per PQ [il parallelogramma PRQR'] è il doppio del triangolo PRQ. Indichiamo con S l'area di questa figura:

$$\begin{cases} S=\overline{PQ}\cdot h=\sqrt{2x^2-2x+2} \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

Considero la funzione h^2 [osservando che la base PQ del triangolo PQR è costante]. Si ottiene una funzione che è un arco della parabola:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x^2-2x+2}{3} \\ 0\le x\le 1 \end{cases}.$$



Il vertice ha coordinate $V\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Quindi $h_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ per $x = 0$ e per $x = 1$; $h_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ per $x = \frac{1}{2}$.

Ne segue che $S_{\max} = \sqrt{2}$ e $S_{\min} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Nota
Tra parentesi quadrate sono inserite nostre integrazioni. (E. Pontorno e L. Tomasi)