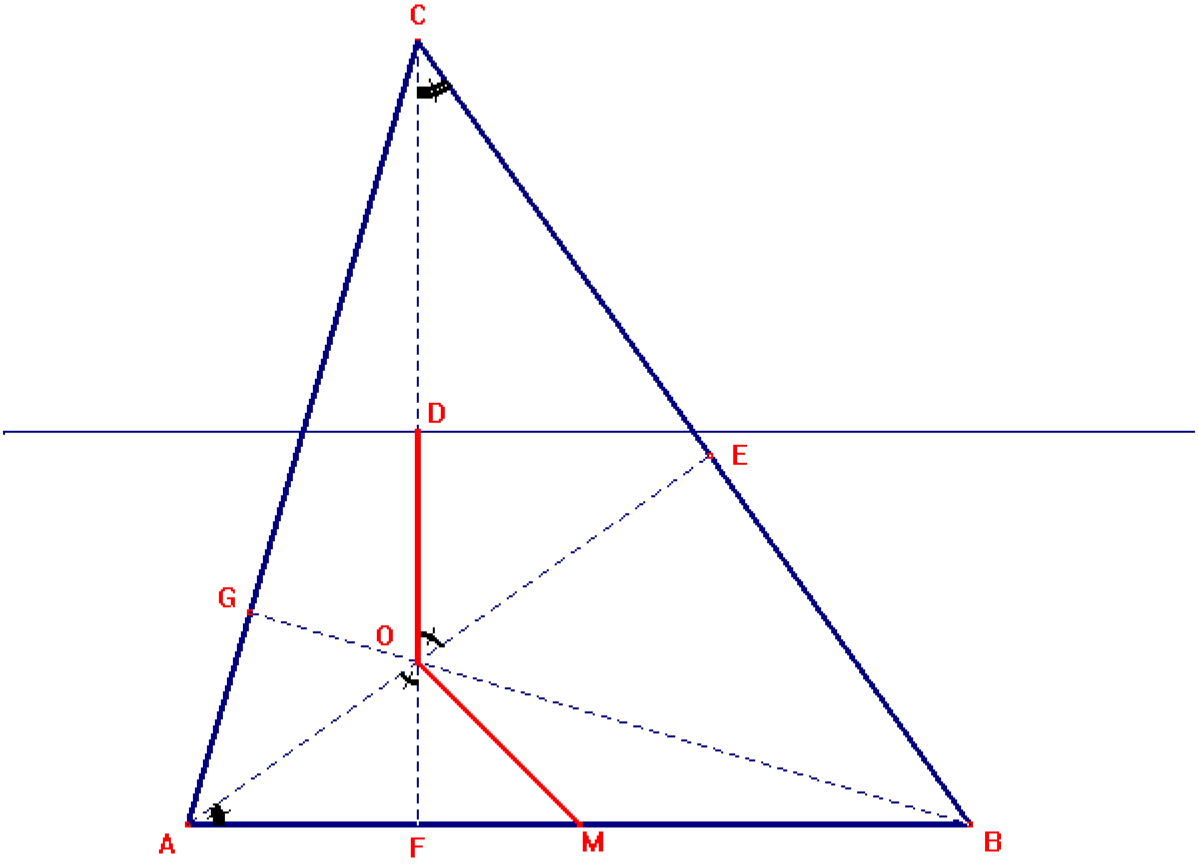
Ivano Lodato, Classe 5^ A Liceo Scientifico "P. Farinato" di Enna

probleMATEMATICAmente, problema di Marzo 2004

Dato un triangolo di base AB ed altezza h isometrica ad AB, dimostrare che l'ortocentro di tale triangolo è equidistante dal punto medio di AB e dalla retta parallela ad AB che dimezza h.

DIMOSTRAZIONE



Sia M il punto medio di $\overline{AB}$. Consideriamo i due triangoli $A\overset{\Delta}{F}O$ e $O\overset{\Delta}{E}C$. Per il criterio AA di similitudine questi sono simili poiché entrambi rettangoli e aventi l'angolo opposto al vertice uguale. Dunque $F\hat{A}O \equiv O\hat{C}E$. Inoltre i triangoli $O\overset{\Delta}{C}E$ e $F\overset{\Delta}{B}C$ sono simili pere lo stesso criterio AA, poiché entrambi rettangoli e aventi l'angolo in C in comune. Dunque sarà anche $A\overset{\Delta}{F}O$ simile ad $F\overset{\Delta}{B}C$. Se questi due triangoli sono simili allora vale la seguente proporzione:

$\overline{AF} : \overline{OF} = \overline{AB} : \overline{FB}$ poiché $\overline{AB} = \overline{CF}$

ma $$\overline{AF} = \overline{AM} - \overline{FM} = \frac{\overline{AB}}{2} - \overline{FM},$$

mentre $$\overline{FB}=\overline{AM}+\overline{FM}=\frac{\overline{AB}}{2}+\overline{FM}$$

da cui $$\left(\frac{\overline{AB}}{2}-\overline{FM}\right):\overline{OF}=\overline{AB}:\left(\frac{\overline{AB}}{2}+\overline{FM}\right)$$

quindi sarà $$\left(\frac{\overline{AB}}{2}-\overline{FM}\right)\left(\frac{\overline{AB}}{2}+\overline{FM}\right)=\overline{OF}\cdot\overline{AB}$$

da cui, esplicitando rispetto ad $\overline{FM}^2$ avremo:

$$\left(\frac{\overline{AB}^2}{4}-\overline{FM}^2\right)=\overline{OF}\cdot\overline{AB}$$

e quindi $$\overline{FM}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4}-\overline{OF}\cdot\overline{AB} \qquad (1)$$

Ma, come è possibile notare dalla figura è:

$$\overline{OF}=\overline{DF}-\overline{DO}=\frac{\overline{AB}}{2}-\overline{DO} \qquad (2)$$

da cui, sostituendo nella (1), avremo

$$\overline{FM}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4}-\left(\frac{\overline{AB}}{2}-\overline{DO}\right)\cdot\overline{AB}=\frac{\overline{AB}^2}{4}-\frac{\overline{AB}^2}{2}+\overline{AB}\cdot\overline{DO}$$

Ma, per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo $O\overset{\Delta}{F}M$, sarà:

$$\overline{OF}^2+\overline{FM}^2=\overline{OM}^2 \qquad (3)$$

Da cui, sostituendo la (1) e la (2) nella (3), otteniamo:

$$\overline{OM}^2=\left(\frac{\overline{AB}}{2}-\overline{DO}\right)^2+\frac{\overline{AB}^2}{4}-\frac{\overline{AB}^2}{2}+\overline{AB}\cdot\overline{DO}=\frac{\overline{AB}^2}{4}+\overline{DO}^2-\overline{AB}\cdot\overline{DO}+\frac{\overline{AB}^2}{4}-\frac{\overline{AB}^2}{2}+\overline{AB}\cdot\overline{DO}=\overline{DO}^2$$

cioè $$\overline{OM}^2=\overline{DO}^2$$

e quindi $$\overline{OM}=\overline{DO}\,.$$

Ivano Lodato classe VA
Liceo Scientifico "P.Farinato" - Enna