Mario Di Dio, Classe 5^ B Liceo Scientifico "P. Farinato" di Enna

probleMATEMATICAmente, problema di Marzo 2004

Dato un triangolo di base AB ed altezza h isometrica ad AB, dimostrare che l'ortocentro di tale triangolo è equidistante dal punto medio di AB e dalla retta parallela ad AB che dimezza h.

Premessa:
Il luogo dei punti del piano che godono della proprietà di essere equidistanti da un punto fisso e da una retta , è una parabola.
Scopo del lavoro che segue è dimostrare che l'ortocentro del triangolo ABC, avente le caratteristiche indicate, al variare del punto C, descrive una parabola,.

Ricerca del luogo geometrico:
Posizioniamo il nostro triangolo in un sistema di assi cartesiani ortogonali in modo tale che il lato AB appartenga all'asse X, l'origine O coincida con il punto medio di AM e sia 2a la lunghezza del semento AB.
Il terzo vertice, C, del triangolo ABC è un punto della retta r di equazione y = 2a.
Le coordinate dei vertici del triangolo sono:
A:(-a;0) B:(a;0) C:(x_c;2a)
L'ortocentro del triangolo ABC è il punto P di intersezione di due delle tre altezze; scegliamo l'intersezione della retta perpendicolare al lato AC passante per B, con la retta perpendicolare al lato AB, passante per C.
Coefficiente angolare della retta AC: $m = 2a/(x_c + a)$
Coefficiente angolare delle rette perpendicolari ad AC: $m' = - (x_c + a)/2a$
Equazione della retta perpendicolare ad AC e passante per B:

$$y = - [(x_c + a)/2a] (x – a)$$

Equazione della retta perpendicolare ad AB e passante per C:

$$x = x_c$$

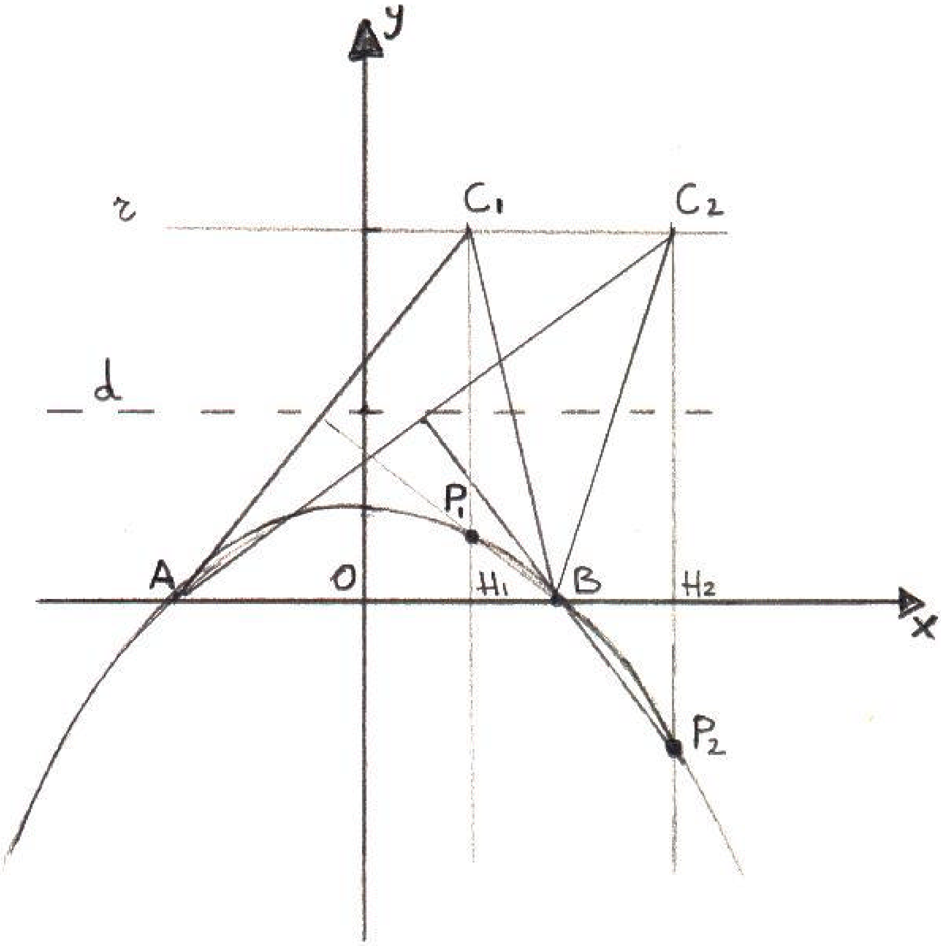
Sostituendo il valore x_c nella prima equazione si ottiene:

$$y = - 1/2a\ x_c^2 + a/2$$

Data la genericità di x_c possiamo anche scrivere:

$$y = - 1/2a\ x^2 + a/2$$

Questa, che è l'equazione del luogo geometrico individuato dall'ortocentro del triangolo ABC, è l'espressione analitica di una parabola che ha la retta y = a come direttrice e l'origine come fuoco.
Concludendo si ha che, al variare di C sulla retta r, ~~il baricentro~~ l'ortocentro P del triangolo ABC, individua la parabola di equazione $y = - 1/2a\ x^2 + a/2$ e quindi ciascun punto P è equidistante dal punto medio del lato AB e dalla retta y = a, parallela al lato AB, che dimezza l'altezza ad esso relativa.



[Nella figura vengono indicate due diverse scelte, C_1 e C_2, per il punto C e conseguentemente due diverse posizioni, P_1 e P_2, ~~del baricentro~~ dell'ortocentro P].

Nota. In rosso alcune annotazioni dei curatori della rubrica probleMATEMATICAmente
(E. Pontorno, L. Tomasi).