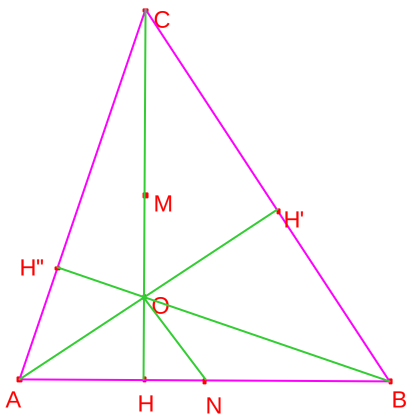
Canevari Giacomo, Classe 2^C Liceo Scientifico "G. Aselli" di Cremona

Soluzione del problema di "ProbleMATEMATICAcamente" di Marzo 2004

Dato un triangolo di base AB ed altezza h isometrica ad AB, dimostrare che l'ortocentro di tale triangolo è equidistante dal punto medio di AB e dalla retta parallela ad AB che dimezza h.



HP: AB = CH
CM = MH, AN = BN
CH - AB, AH` - CB, BH`` - AC
TH: OM = ON

1° caso: H è interno al segmento AB e perciò il triangolo ABC è acutangolo.

Indicando con a l'angolo OAB, si ha:
AOH = 90° - a = COH` (angoli opposti al vertice), HCB = 90° - (90° - a) = a, CBA = 90° - a
Dunque i triangoli AOH e CHB sono simili per il primo criterio. È allora possibile mettere le misure dei loro lati in proporzione; se indichiamo con a la misura di AH e con l quella di AB, otteniamo:

$$AH : CH = OH : BH$$
$$a : l = OH : (l – a)$$
$$OH = (a (l – a))/l$$
$$OH = a – a^2/l$$

Poiché il segmento HN misura l/2 – a, la misura di ON, per il teorema di Pitagora, sarà:

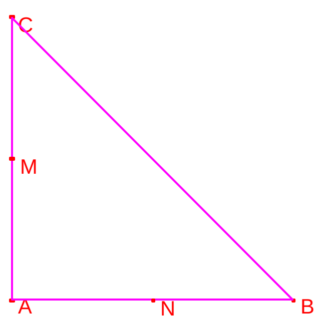
$$((a – a^2/l)^2 + (l/2 – a)^2)^{½} = (2a^2 – 2al + l^2)/(±2l)$$

[Il risultato di una radice quadrata deve essere un numero non negativo; quindi il doppio segno – "piu' o meno" – è sbagliato].

Trattandosi di misure di segmenti, il valore $(2a^2 – 2al + l^2)/(-2l)$ non è accettabile.
Il segmento OM è congruente a MH – OH; misurerà dunque:

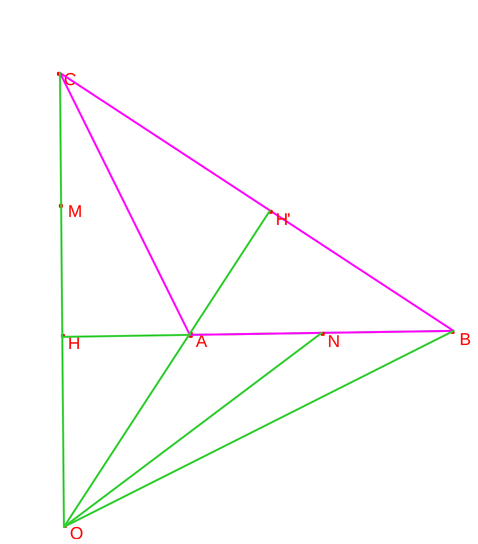
$$l/2 – a + a^2/l = (2a^2 – 2al + l^2)/ (2l) = HN$$

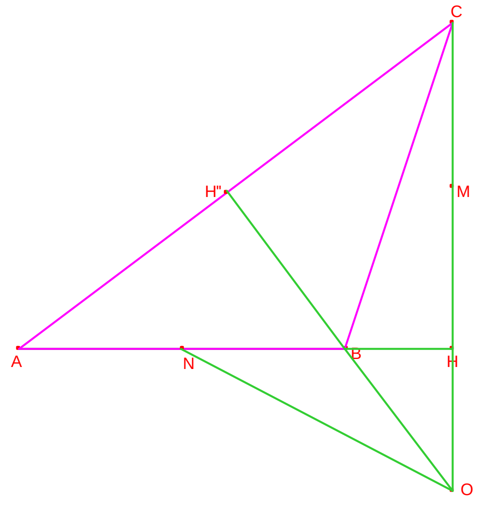
La tesi è dunque dimostrata, in questo caso.



2° caso: A coincide con a e il triangolo ABC è rettangolo.

È di facile dimostrazione: infatti l'altezza CH coincide con il lato AC e l'ortocentro O con il vertice A, perciò AN = AM perché metà di segmenti congruenti.





3° caso: il triangolo ABC è ottusangolo.

Il punto H si trova sul prolungamento di AB, dalla parte di A. Questa volta indichiamo HBC con a e otteniamo:
H`AB = 90° - a = HAO (angoli opposti al vertice), HOA = 90° - (90° - a) = a, HCB = 90° - a
Possiamo quindi affermare che i triangoli AOH e CHB sono simili e che, se a = AH e l = AB = CH, vale la relazione:

$$OH : AH = BH : CH$$
$$OH : a = (a + l) : l$$
$$OH = a\,(a + l)/l$$
$$OH = a^2/l + a$$

Poiché il segmento HN misura l/2 + a, la misura di ON, per il teorema di Pitagora, sarà:

$$((a^2/l + a)^2 + (l/2 + a)^2)^{½} = (2a^2 + 2al + l^2)/(\pm 2l)$$

[Il risultato di una radice quadrata deve essere un numero non negativo; quindi il doppio segno – "piu' o meno" – è sbagliato]
Anche in questo caso, il valore $(2a^2 + 2al + l^2)/(-2l)$ non è accettabile.
Il segmento OM è congruente a MH + OH; misurerà dunque:

$$l/2 + a + a^2/l = (2a^2 + 2al + l^2)/\,(2l) = HN$$

Per simmetria, la dimostrazione è valida anche se H si trova dalla parte di B.
La tesi è perciò dimostrata anche in questo caso.

c. v. d.

Nota. In rosso alcune annotazioni dei curatori della rubrica probleMATEMATICAmente (E. Pontorno, L. Tomasi).