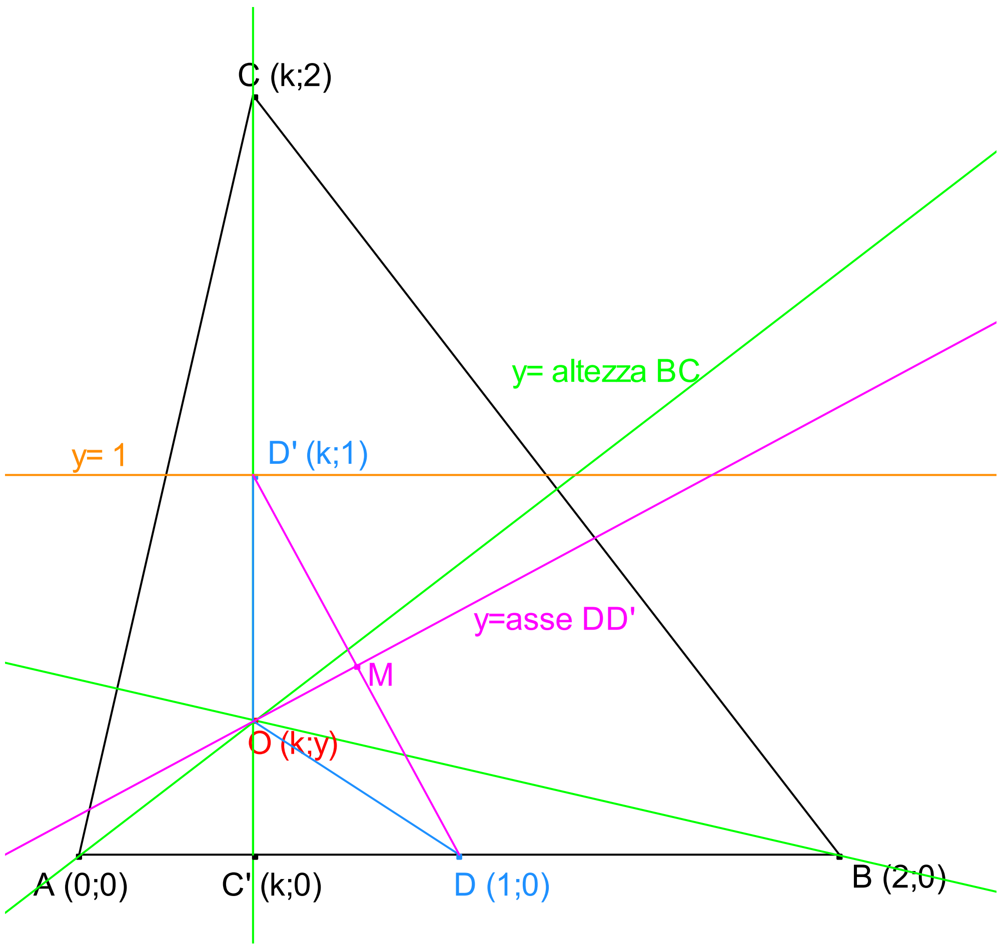
Andrea Bidoli, Classe 5^A Liceo Scientifico "Grigoletti" di Pordenone

probleMATEMATICAmente, problema di Marzo 2004

Dato un triangolo di base AB ed altezza h isometrica ad AB, dimostrare che l'ortocentro di tale triangolo è equidistante dal punto medio di AB e dalla retta parallela ad AB che dimezza h.

Si può interpretare il problema dimostrando che, se le sopracitate distanze si equivalessero, allora l'ortocentro del triangolo sta sull'asse del segmento ~~unente~~ che unisce il punto medio di AB con quello della sua relativa altezza h (ovvero il segmento DD').
Ciò può essere facilmente verificato.
Infatti ponendo AB=2 (per comodità di calcolo) e AC'=k si ha:



DIMOSTRAZIONE:
[Equazione della] RETTA PER DD': D' = (k;1) D = (1;0) → $\mathbf{y = -x / (1-k) + 1 / (1-k)}$
COEFF ANGOLARE ASSE DD': $\mathbf{m = (1-k)}$
EQ ASSE DD': fascio per M : $y - 1/2 = m\,(x - (k+1) / 2)$ sostituisco
$\mathbf{y = (1-k)x + (k^2) / 2}$ essa incontra l'altezza CC' nel punto O (k;y)
l'ordinata di O si ricava facilmente ed è $\mathbf{(2k - k^2) / 2}$

[Equazione della] RETTA PER BC: B = (2;0) C = (k;2) → $\mathbf{y = -2x / (2-k) + 4 / (2-k)}$
COEFF ANGOLARE ALTEZZA BC: $\mathbf{m = (2-k) / 2}$

Sapendo che l'altezza relativa a BC passa per A (0;0) posso determinarne l'equazione sostituendo il coefficiente angolare ricavato al fascio di rette di centro A.
EQUAZIONE ALTEZZA BC: **$y = (2-k)x / 2$** la quale interseca l'altezza CC' di equazione $x = k$ nel punto di ordinata $y =$ **$(2k-k^2) / 2$.**

Si conclude dunque che l'asse di DD' e l'altezza relativa a BC si incontrano nell'ortocentro del triangolo che pertanto risulterà equidistante dagli estremi del suddetto segmento D e D'.

Questa è la tesi del problema e si noti che data l'arbitrarietà delle lunghezze prese tale dimostrazione si può opportunamente ricondurre a qualsiasi specifico caso.

Nota. In rosso alcune annotazioni dei curatori della rubrica probleMATEMATICAmente
(E. Pontorno, L. Tomasi).