ProbleMATEMATICAmente - Gennaio 2004
Soluzione del problema

Dimostrare che: cos(sinx) > sin(cosx) per ogni x (radianti).

Si tratta di mettere a confronto due funzioni:

$$y(x) = \cos(\sin x) \qquad e \qquad z(x) = \sin(\cos x).$$

La prima è periodica con periodo pi greca che indichiamo con p. Infatti, ricordando che

$$\cos a = \cos(-a) \quad e \quad \sin(x + p) = -\sin x$$

consegue:

$$y = \cos(\sin(x + p)) = \cos(\sin x).$$

La seconda, notoriamente, è periodica con periodo 2p.

Calcoliamo le derivate prime di y e z.

$$y' = -[\sin(\sin x)]\cos x \qquad e \qquad z' = [\cos(\cos x)](-\sin x).$$

a)
Nell'intervallo (0, p/2) si ha $y' < 0$ e $z' < 0$.
Quindi le due funzioni in esame sono decrescenti.
Agli estremi

$$y(0) = 1, \qquad y(p/2) = \cos(1)$$
$$z(0) = \sin(1), \quad z(p/2) = 0$$

Ora proviamo che in questo intervallo non è mai

$$y(x) = z(x). \qquad (1)$$

A tal fine basta osservare che $\cos a = \sin b$ se e solo se

$$a + b = p/2 + kp \quad \text{oppure} \quad b - a = p/2 + kp$$

(con k intero).
Quindi nel nostro caso per soddisfare alla (1) dovrebbe essere:

$$\sin x + \cos x = p/2 \quad \text{oppure} \quad \cos x - \sin x = p/2$$

(ovviamente escludiamo il caso di k non nullo).

Usando le note formule

$$\sin x = \frac{2u}{1 + u^2} \qquad e \qquad \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

si ottengono due equazioni di secondo grado che non hanno soluzioni reali.
Pertanto non si verifica mai la condizione (1).
Quindi le due funzioni y e z, essendo continue nell'intervallo in esame, da quanto precede sono sempre

$$y(x) > z(x).$$

b)

Nell'intervallo (p/2, p) si ha $y' > 0$ e $z' < 0$.
Quindi la prima funzione in esame è crescente mentre la seconda è ancora decrescantei.
Agli estremi

$$y(p) = 1, \qquad y (p/2) = \cos (1)$$
$$z(p) = \sin (-1), \quad z (p/2) = 0$$

Quindi si ha ancora

$$y (x) > z (x).$$

Considerazioni analoghe negli intervalli da p a 2p ci permettono di concludere quanto si doveva dimostrare.

Spartaco Spadon - Rovigo