ProbleMATEMATICAmente - Gennaio 2004
Soluzione di Anita Valieri e Sara Boaretti
Classe VH del liceo scientifico "A. Roiti" di Ferrara

Dimostriamo che:

cos(senx)>sen(cosx) per ogni numero reale x (radianti).

La funzione $y = sin(\cos x)$ è periodica di periodo 2π , infatti :

$$\sin(\cos(x+2\pi)) = \sin(\cos x)$$

mentre la funzione $y = \cos(sinx)$ è periodica di periodo π , infatti :

$$\cos(\sin(x+\pi))=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)$$

La funzione $y = \cos(sinx) - sin(\cos x)$ è periodica di periodo 2π perché differenza delle due funzioni precedenti e quindi assume lo stesso periodo di quella con periodo maggiore.

Possiamo dunque limitarne lo studio in $[0,2\pi]$= I

La funzione è continua in tale intervallo per la continuità delle funzioni y = sinx , y = cosx, per il teorema della continuità di funzioni composte e per il teorema della somma di funzioni continue.
Cerco le intersezioni con l'asse Ox :

$$\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$$

$$\sin x = \frac{\pi}{2} - \cos x + 2k\pi \quad \text{V} \quad \sin x = \frac{3\pi}{2} + \cos x + 2k\pi \qquad k \in Z$$

$$\sin x+\cos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{V} \quad \sin x-\cos x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z$$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}k\pi$ imp. perché il secondo membro è esterno a $[-1,1]$

$\sin\left(-\frac{\pi}{4} + x\right)=\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}k\pi$ imp. Come sopra

Per un teorema sulle funzioni continue, f(I) è un intervallo, inoltre non contiene lo zero.
Si ha quindi : f(I) $\subseteq R^+{}_0$ V f(I) $\subseteq R^-{}_0$

Consideriamo x = 0 e calcoliamo f(0):

cos(sen0)-sen(cos0) = cos0-sen1≈ 1-0,8415 ≈ 0,158>0

=> f(I) $\subseteq R^+{}_0$ e f(x)>0 per ogni x ϵ I
=> f(x)>0 per ogni x ϵ R che è il dominio della funzione.

Con i seguenti grafici visualizziamo la funzione analizzata, prima nella forma
cos(senx)>sen(cosx)
poi in quella cos(senx)-sen(cosx)>0