ProbleMATEMATICAmente - Gennaio 2004

Dimostrare che cos(sin(x))>=sin(cos(x)) (1) per ogni x espresso in radianti.

Lemma:
Per ogni x>=0 vale x>=sin(x) :
La dimostrazione si trova in ogni libro di analisi

Notiamo innanzitutto che la tesi equivale a dimostrare che cos(cos(x))>=sin(sin(x)) (2), basta infatti effettuare la sostituzione x->Pi/2-x nella (1) per ottenere la (2) .
Notiamo inoltre che se la disuguaglianza vale per ogni x in [0, 2Pi] vale per tutti gli x e questo discende direttamente dalla periodicità delle funzioni in esame.
Detto questo dimostriamo che cos(cos(x))>0 per ogni x in [0,2Pi].
La dimostrazione è immediata e viene dal fatto che -1<=cos(x)<=1 ,infatti per ogni -1<=t<=1 cos(t)>0 C.V.D
Notiamo inoltre che la (2) è vera per ogni x compreso fra [Pi ,2Pi] , intervallo questo in cui sin(sin(x)) è negativa .
Limitiamo quindi lo studio ai soli x appartenenti a [0,Pi].

Dimostriamo ora che vale cos(cos(x))>=sin(x): (3)
Eleviamo ora entrambi i membri al quadrato(cosa che sì può fare in quanto entrambi i membri della (3) sono positivi nell'intervallo) e sfruttando una nota identità trigonometrica (cos^2(x)+sin^2(x)=1) possiamo riscrivere la (3) come cos^2(cos(x))>=1-cos^2(x), ponendo ora cos(x)=y otteniamo cos^2(y)>=1-y^2 che può anche essere scritta come sin^2(y)<=y^2.(4)
Ora se y=0 vale l'uguaglianza , supponiamo dunque y!=0 e riscriviamo la (4) come (sin(y)/y)^2<=1 che è vera per il lemma iniziale, dunque la (3) è dimostrata(notiamo che l'uguale vale solo per x=Pi/2)

Dimostriamo ora che sin(x)>=sin(sin(x)) per ogni x appartenente a [0,Pi].
Come prima ponendo sin(x)=t otteniamo t>=sin(t) che è vera per il lemma 1(notiamo che l'uguale vale solo quando x=0,x=Pi e x=2Pi).
A questo punto possiamo scrivere cos(cos(x))>=sin(x)>=sin(sin(x)) dove l'uguaglianza fra i tre termini non si verifica mai contemporaneamente dunque vale solo cos(cos(x))>sin(sin(x)).
C.V.D

Pinamonti Andrea
Appassionato di matematica
Trento