ProbleMATEMATICAmente - Gennaio 2004

Classe 4°A del Liceo Scientifico Statale "P.Paleocapa" di Rovigo.

Risoluzione del problema $\cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$

Siamo partiti dall'analisi dei grafici attraverso Derive e poi abbiamo dimostrato:
Th: $\cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x)) \ \ \forall x \in \Re$, x in radianti.

Si pone: $\begin{matrix} f(x) := \cos(\sin(x)) \\ g(x) := \sin(\cos(x)) \end{matrix}$ e si procede ad analizzare singolarmente le due funzioni

$f(x) := \cos(\sin(x))$

$f(x)$ si dimostra essere una funzione pari poiché:

$\cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin(x)) = \cos(\sin(x))$ per la definizione di coseno $\Rightarrow$ si dimostra $f(x)$ pari

$f(x)$ ha periodo π perché:

$\cos(\sin(x+\pi)) = \cos(\sin(x))$ perché $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

Considerando l'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si dimostra che in quell'intervallo $f(x)$ è decrescente:

presi $x_1 > x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x_1) > \sin(x_2)$ perché la funzione seno e crescente quindi

$\sin(x_1), \sin(x_2) \in [0,1]$ quindi anche all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dove la funzione coseno è decrescente

$\Rightarrow \cos(\sin(x_1)) < \cos(\sin(x_2))$ quindi è dimostrata la decrescenza di $f(x)$ in questo intervallo.

Essendo pari allora $f(x)$ è crescente tra $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Il valore massimo di $f(x)$ si ha per $\sin(x) = 0 \ \Rightarrow x = k\pi, k \in Z$ max=1

Il valore minimo di $f(x)$ si ha per $\sin(x) = 1 \ \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$ min=$\cos(1)$

$g(x) := \sin(\cos(x))$

$g(x)$ si dimostra essere una funzione pari poiché $\cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos(x))$.

$g(x)$ ha periodo 2π perché: $\forall x \in \Re, \sin(\cos(x+2\pi)) = \sin(\cos(x))$

$g(x)$ si interseca con l'asse delle ascisse per $\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Considerando l'intervallo $[0, \pi]$ si dimostra che in quell'intervallo $g(x)$ è decrescente:

in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ presi $x_1 > x_2, \cos(x_1) < \cos(x_2)$ perché la funzione coseno è decrescente quindi

$\cos(x_1), \cos(x_2) \in [0,1]$ e quindi anche all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dove la funzione seno è crescente

$\Rightarrow \sin(\cos(x_1)) < \sin(\cos(x_2)) \Rightarrow$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $g(x)$ è decrescente.

Essendo pari allora $g(x)$ è crescente in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Il valore massimo di $g(x)$ si ottiene per $\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in Z$ max=$\sin(1)$
Il valore minimo di $g(x)$ si ottiene per $\cos(x) = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in Z$ min=$-\sin(1)$.

In $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ presi $x_1 > x_2, \cos(x_1) < \cos(x_2)$ perché la funzione coseno è decrescente quindi

$\cos(x_1), \cos(x_2) \in [-1,0]$ e quindi anche all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ dove la funzione seno è crescente

$\Rightarrow \sin(\cos(x_1)) < \sin(\cos(x_2)) \Rightarrow$ in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $g(x)$ è decrescente.

Essendo $g(x)$ pari allora è crescente in $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow$ in $[0, \pi]$ $g(x)$ è decrescente, e positiva per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e negativa per $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Adesso rimane da verificare la disuguaglianza:
poiché entrambe le funzioni sono pari basta considerare come guida cosa succede nell'intervallo $[0, \pi]$.
Per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$f(x)$ e $g(x)$ non hanno intersezioni poiché:
$\cos(\sin(x)) = \sin(\cos(x))$
$\cos(\sin(x)) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos(x)\right)$

1) $\sin(x) = \frac{\pi}{2} - \cos(x)$

$\sin(x) + \cos(x) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ $\qquad \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > 1 \Rightarrow$ non ha soluzioni $\Rightarrow$ non ci sono intersezioni.

2) $\sin(x) = -\frac{\pi}{2} + \cos(x)$

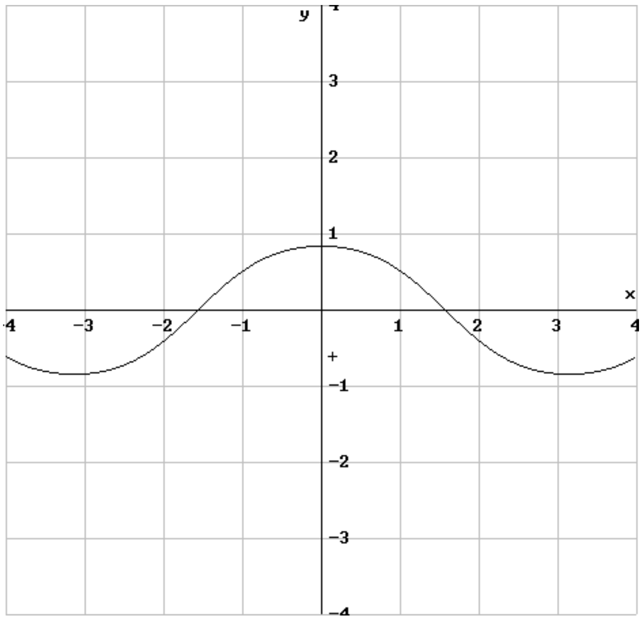
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ $\quad \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > 1 \Rightarrow$ non ha soluzioni $\Rightarrow$ non ci sono intersezioni.

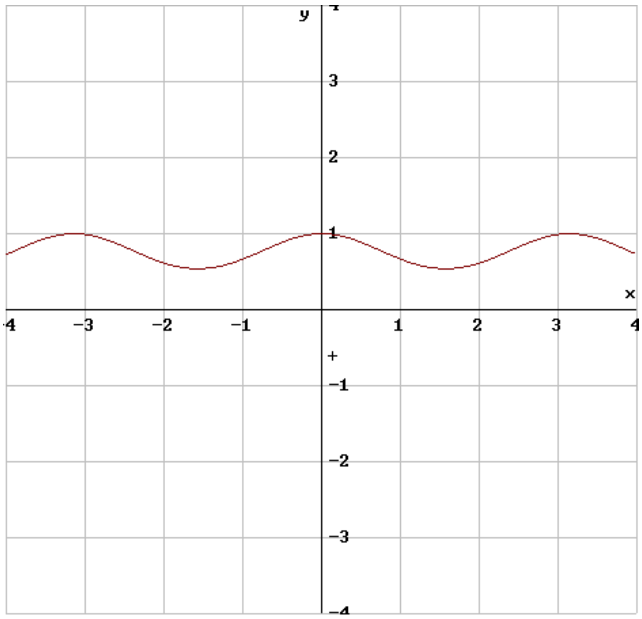
$\Rightarrow$ in quell'intervallo $\cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$

Per $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $f(x)$ è positiva e $g(x)$ è negativa come precedentemente dimostrato $\Rightarrow$ si conclude che $\cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$

$\Rightarrow$ dato che la disequazione è verificata in entrambi gli intervalli vale sempre nell'intervallo $[0, \pi]$.
Per la parità della funzione si può estendere la veridicità della disequazione $\forall x \in \Re$

$g(x) := sin(\cos(x))$ $f(x) := \cos(sin(x))$





Le funzioni di partenza sono continue quindi la loro combinazione è continua anche se questo affermazione la abbiamo accettata intuitivamente.