ProbleMATEMATICAmente - Gennaio 2004

Mario Di Dio classe V B
Liceo Scientifico "P. Farinato" di Enna

Dimostrare che, per ogni numero reale x (radianti), si ha: cos(sinx) > sin(cosx).

Tenendo conto della periodicità delle funzioni seno e coseno, limitiamo lo studio all'intervallo $[0; 2\pi]$.

Per una proprietà degli archi associati si ha: $\cos\alpha = \sin(\pi/2-\alpha)$; la disequazione da verificare si può quindi scrivere:

$\sin(\pi/2-\sin x) > \sin(\cos x)$ oppure: $\sin(\pi/2-\sin x) - \sin(\cos x) > 0$

Applicando le formule di prostaferesi, la disequazione diventa:

$$2 \sin[(\pi/2-\sin x-\cos x)/2] \times \cos[(\pi/2-\sin x + \cos x)/2] > 0$$

Studiamo gli argomenti delle funzioni trigonometriche di quest'ultima disequazione:
consideriamo le funzioni:
$f(x) = (\pi/2-\sin x-\cos x)/2$ e $g(x) = (\pi/2-\sin x + \cos x)/2$.

Studiandole con il metodo delle derivate successive si ha:
$f'(x) = (\sin x - \cos x)/2$ $f'(x) = 0$ per: $x = \pi/4$ e per $x = 5/4\,\pi$
$f''(x) = \sin x + \cos x$ $f''(\pi/4) = \sqrt{2} > 0$, $f''(5/4\,\pi) = -\sqrt{2} < 0$
per cui f(x) ha un minimo per $x = \pi/4$ e un massimo per $x = 5/4\,\pi$;
il valore minimo è: $f(\pi/4) = (\pi/2 - \sqrt{2})/2 > 0$
il valore massimo è $f(5/4\,\pi) = (\pi/2 +\sqrt{2})/2 < \pi/2$ e quindi:
$0 < f(x) < \pi/2$ tutto ciò $\forall x$ dell'intervallo considerato.

Allo stesso modo si ricava che:
g(x) ha un minimo per $x = 3/4\,\pi$ e un massimo per $x = 7/4\,\pi$;
il valore minimo è: $g(3/4\,\pi) = (\pi/2 - \sqrt{2})/2 > 0$
il valore massimo è $g(7/4\,\pi) = (\pi/2 +\sqrt{2})/2 < \pi/2$ e quindi:
$0 < g(x) < \pi/2$, tutto ciò $\forall x$ dell'intervallo considerato.

Essendo gli argomenti del seno e del coseno della disequazione compresi tra 0 e $\pi/2$, si ha:
$\sin[f(x)] > 0$ e $\cos[g(x)] > 0$ $\forall x$.
Essendo i due fattori della disequazione entrambi positivi $\forall x$, risulta dimostrato che il loro prodotto è positivo.