ProbleMATEMATICAmente – Gennaio 2004

Bidoli Andrea, V A Liceo Scientifico "Grigoletti" di Pordenone

Dimostrare che, per ogni numero reale x (radianti), si ha: cos(sinx) > sin(cosx).

Si procede come segue:
innanzitutto è opportuno ricordare la periodicità per multipli di angoli giri delle funzioni trigonometriche senx e cosx. Premesso questo basterà dimostrare la validità della disequazione in un intervallo di 2π radianti. Studiamo l'intervallo $-\pi \le x \le \pi$.

1) primo intervallo per $0 \le x \le \pi/2$ (A)
   si trova $0 \le \operatorname{sen}x \le x \le \pi/2$ e $\cos x \ge 0$
   inoltre per ogni $y \ge 0 \Rightarrow \operatorname{sen} y \le y$,
   dunque ponendo $y = \cos x$ si avrà: $\operatorname{sen}(\cos x) \le \cos x$ (1)
   ora sapendo che per $0 \le x \le \pi/2$ la funzione cosx è decrescente, essendo $\operatorname{sen}x \le x$ si avrà:
   $\cos(\operatorname{sen}x) \ge \cos x$ (2), e dal confronto con la (1)
   cos(senx) > sen(cosx)
   poiché il caso dell'eguaglianza è stato ricavato dalla disequazione $\operatorname{sen}x \le x$, che da $\operatorname{sen}x = x$ per $x=0$, mentre per questo valore $\cos(\operatorname{sen}x) \ne \operatorname{sen}(\cos x)$ e**,** in particolare
   cos(senx) > sen(cosx)

2) $\pi/2 < x \le \pi$ (B)
   in questo caso pongo $y = \operatorname{sen} x$ e sapendo che $\cos y > 0$ per $-\pi/2 < y < \pi/2$ e in ogni caso $-\pi/2 < \operatorname{sen}x < \pi/2$ deduco
   $\cos(\operatorname{sen}x) > 0$ (3) per ogni x di questo intervallo
   ragionando in termini equivalenti pongo ora $y = \cos x$ e sapendo che $\operatorname{sen}y > 0$ per $0 < y < \pi$
   mentre in questo intervallo (B) $\cos x < 0$ deduco che
   $\operatorname{sen}(\cos x) < 0$ (4) dunque confrontando la 3 e la 4:
   cos(senx) > sen(cosx)

3) $-\pi \le x < 0$ (C)
   pongo $y = -x$ e avrò dunque $0 < y \le \pi$
   $\cos(\operatorname{sen}x) = \cos(\operatorname{sen} -x) = \cos(\operatorname{sen}y)$ che per $0 < y \le \pi$ è sempre $\cos(\operatorname{sen}y) > \operatorname{sen}(\cos y)$
   (vedi punto 1 intervallo A) cambiando nuovamente y con $-y$ (cioè con x) la disequazione per le proprietà degli archi associati come pocanzi dimostrato non cambia, dunque si evince
   cos(senx) > sen(cosx)

   Avendo dimostrato la validità della disequazione in un intervallo completo per senx e cosx posso concludere che essa è valida per ogni x reale (in radianti).