ProbleMATEMATICAmente - Gennaio 2004

Baccaglini Roberto 4ª A PNI, Liceo Scientifico "P. Paleocapa", Rovigo

Per ogni $x \in \Re$, preso x come misura dell'angolo in radianti, si verifichi che:

$$\cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$$

Dimostrazione:

assumendo $\sin(x) = \alpha$ e $\cos(x) = \beta$ si può scrivere

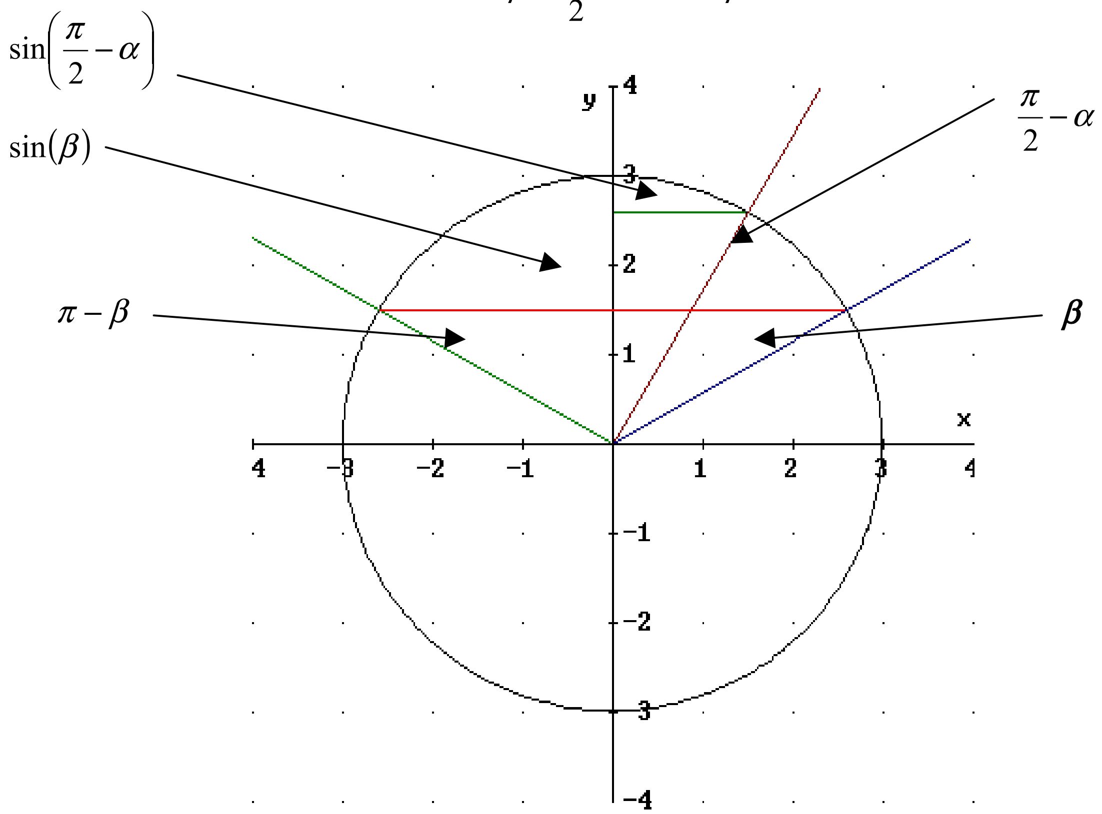
$$\cos(\alpha) > \sin(\beta)$$

che equivale a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > \sin(\beta)$$

Essendo $\cos(x)$ compreso nell'intervallo $[-1,1]$, il secondo lato di β può essere compreso solo nel 1° o nel 4° quadrante del piano intersecato con la circonferenza goniometrica, pertanto passando alla disequazione fra angoli risulta

$$\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha < \pi - \beta$$



ossia

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}-\alpha>\beta \\ \frac{\pi}{2}-\alpha<\pi-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta<\frac{\pi}{2} \\ \beta-\alpha<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x)+\cos(x)<\frac{\pi}{2} \\ \cos(x)-\sin(x)<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)<\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)<\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Il numero $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ è un numero maggiore di 1, pertanto il sistema risulta soddisfatto $\forall x \in \Re$.